ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

А.В.Буров, Я.С.Дербенёв

КОЛЛЕКТИВНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ В ОНДУЛЯТОРЕ

ПРЕПРИНТ 81-33

Новосибирск

КОЛЛЕКТИВНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА ЭЛЕКТРОНОВ В ОНДУЛЯТОРЕ

А.В.Буров, Я.С.Дербенёв

А Н Н О Т А Ц И Я

Для реализации предложенного ранее метода охлаждения пучков заряженных частиц – <u>когерентного электронного охлаждения</u> – необходимо создать в охлаждающем электронном пучке ту или иную мелкомасштабную неустойчивость, посредством которой будет усиливаться отклик электронной среды на поле частицы. Три типа таких неустойчивостей могут быть получены в широком диапазоне условий, если на продольное магнитное поле, сопровождающее электронный пучок, накладывается малое поперечное винтовое поле.

Появление данной работы вызвано поиском способов совершенствования метода электронного охлаждения пучков тяжелых заряженных частиц [I,2]. Возможность использования коллективных неустойчивостей электронного пучка для многократного усиления отклика на возмущение со стороны тяжелой частицы, т.е. для увеличения эффекта трения, уже обсуждалась в работе [3]. Для реализации этого способа необходимо детальное изучение свойств неравновесного движения электронного пучка вблизи той или иной неустойчивости, которая может быть выбрана в качестве рабочей. Неустойчивость, в частности, может быть создана наложением поперечного осциллирующего магнитного поля (ондулятора) на продольное, сопровождающее электронный пучок. Ниже в рамках линейного приближения исследуются три вида неустойчивостей, существующие в такой системе: циклотронная, отрицательной продольной массы и радиационная (последняя связана с генерацией когерентного излучения в системах, получивших название лазеров на свободных электронах, или ЛСЭ [4,5]).

I. Траектории электронов в магнитном поле

В целях простоты рассмотрения поле ондулятора будем считать спиральным

$$\mathcal{H}_x = H_0 \cos \varkappa z \;;\quad \mathcal{H}_y = -H_0 \sin \varkappa z \;;\quad \mathcal{H}_z = B \tag{I}$$

Здесь и далее x, y – поперечные, z – продольная координаты. В этом разделе рассматривается движение одной частицы в таком поле. Принята система единиц e =I, m =I, c =I, где e – заряд электрона, m – масса, c – скорость света. Уравнения движения электрона во внешнем поле $\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = [\vec{v}\,\vec{\mathcal{H}}]$, где $\vec{v}$ – скорость, γ – энергия (интеграл движения), имеют частное решение:

$$\begin{aligned} \dot z &= v_{\parallel} - const \\ \dot x &= \theta_0 v_{\parallel} \cos \varkappa z \\ \dot y &= -\theta_0 v_{\parallel} \sin \varkappa z \end{aligned} \;;\qquad \theta_0 = \frac{H_0}{B - \varkappa \gamma v_{\parallel}} \tag{2}$$

Условие $\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2 = v^2$ определяет $v_{\parallel}(v)$. Легко видеть, что поле (I) не удовлетворяет условию $\mathrm{rot}\,\mathcal{H}=0$, т.е. оно не может сохранять такой вид для любых x, y. Однако, если $\varkappa r_0 \ll 1$, $\varkappa a \ll 1$, где r_0 – радиус поперечного вращения, а – расстояние его центра до оси, этим эффектом можно пренебречь.

Поперечную скорость считаем малой по сравнению с продольной, т.е. $\varkappa r_0 = \theta_0 \ll 1$.

Тогда
$$V_\parallel = V - \frac{\theta_0^2}{2} V \tag{3}$$

Эффективная продольная масса
$$\frac{1}{\mu_\parallel} = \frac{d\vartheta_\parallel}{dp_\parallel} = \frac{1}{\gamma^3}\frac{d\vartheta_\parallel}{d\vartheta} = \gamma_\perp^2 \frac{\varepsilon(\varepsilon - B' u_0^2)}{\lambda^2}$$

Здесь u_0 – поперечная скорость электрона в системе отсчета, где он в среднем покоится,
$$\gamma_\perp = (1-u_0^2)^{-1/2}; \quad \gamma_\parallel = (1-V_\parallel^2)^{-\frac{1}{2}};$$
$$B' = \frac{B}{\gamma_\perp}; \quad \omega_0 = \varkappa \gamma_\parallel V_\parallel; \quad \varepsilon = B' - \omega_0$$
$$\lambda^2 = \varepsilon^2 + B'\theta_0^2 \varepsilon$$

Видно, что знак эффективной массы зависит от выбора параметров. Траектории (2) устойчивы только при
$$\lambda^2 > 0 \tag{4}$$

2. Гидродинамические уравнения движения пучка

Задачу о движении в ондуляторе пучка взаимодействующих электронов будем решать, пренебрегая тепловым разбросом скоростей частиц. Условия этого пренебрежения сформулированы ниже. Отсутствие теплового разброса дает возможность перейти от кинетического к гидродинамическому способу описания движения частиц. Здесь и далее будем оставаться в сопутствующей системе отсчета, связанной с центром инерции электронного пучка. Исходя из кинетического уравнения, стандартным методом получим уравнение неразрывности и гидродинамические уравнения движения для малых отклонений плотности и скорости частиц от равновесных значений, отвечающих траекториям (2). Пучок всюду считаем

безграничным и однородным; применимость такого приближения оговаривается ниже.
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\vartheta}_0 \vec{\nabla})\rho + \vec{\nabla}\vec{u} = 0$$
$$\frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} + (\vec{\vartheta}_0 \vec{\nabla})\vec{\pi} + (\vec{\pi}\vec{\nabla})\vec{\vartheta}_0 + [\vec{B}_0 \times \vec{u}] = \vec{\mathcal{F}} \tag{6}$$

Здесь $\vec{\pi} = \vec{p} - \vec{p}_0$, $\vec{u} = \vec{v} - \vec{\vartheta}_0$, $\rho = \frac{n}{n_0} - 1$ – отклонения импульса, скорости и относительной плотности соответственно от их невозмущенных значений. B_0 – внешнее магнитное поле, $\vec{\mathcal{F}} = \vec{E}_c + [\vec{v}_0 \times \vec{\mathcal{H}}_c]$ – сила, действующая на частицы со стороны полей, возбужденных коллективным неравновесным движением. Далее мы часто будем пользоваться "вращающимися" компонентами векторов
$$V_1 + iV_2 = (V_x + iV_y)e^{i\psi}, \quad V_3 = V_z, \quad \vec{V} \text{ – произвольный вектор}$$
$$\psi = k_0 z + \omega_0 t; \quad k_0 = \varkappa\gamma_\parallel, \quad \omega_0 = \varkappa\gamma_\parallel V_\parallel$$

В отличие от обычных компонент будем помечать их греческими индексами μ, ν, например,
$$V_\mu = T_{\mu i} V_i \qquad T = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Воспользовавшись тем, что поперечные координаты x, y не входят явно в полученные уравнения, проведем по ним преобразование Фурье. В результате решение уравнений (6) можно записать в виде:
$$\pi_\mu = \sum_s e^{-i\phi + i\lambda_s t} f_{\mu s} \int \frac{dk}{2\pi} \alpha_s(k,t) e^{ikz}$$
$$\dot{\alpha}_s = f^{-1}_{s\nu} e^{-i\lambda_s t} \int dz\, e^{i\phi - ikz} F_\nu(z,t) \tag{7}$$
$$\rho(z,t) = e^{-i\phi} \sum_s \frac{f_{3s}}{\gamma_0} \int^t dt' e^{i\lambda_s t'} \int \frac{dk}{2\pi} ik\,\alpha_s(k,t') e^{ikz}$$

В последнем соотношении выброшены члены, содержащие интеграл по времени от быстроосциллирующих (с частотой $\sim \omega_0$) величин $\vec{q}_\perp = (q_x, q_y)$ – поперечный волновой вектор.

Здесь $\Phi = r_0 q_\perp(z,t)$
$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = \lambda = \sqrt{\varepsilon^2 + B'\theta_0^2\varepsilon}; \quad \lambda_3 = -\lambda$$

$$2\omega_{1-4}^2 = \lambda^2 + \frac{\omega_e^2\cos^2\vartheta}{\gamma_0} \pm \sqrt{\left(\lambda^2 + \frac{\omega_e^2\cos^2\vartheta}{\gamma_0}\right)^2 - 4\lambda^2\frac{d\vartheta_\parallel}{d\vartheta}\frac{\omega_e^2\cos^2\vartheta}{\gamma_0^3}} \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{d\vartheta_\parallel}{d\vartheta} = \frac{\varepsilon(\varepsilon - B'u_0^2)}{\lambda^2}\gamma_0^2$$

Отсюда видно, что существует два типа кулоновских неустойчивостей. I) Одна из них соответствует эффекту отрицательной массы $\frac{d\vartheta_\parallel}{d\vartheta} < 0$. Впервые неустойчивость такого типа обсуждалась в [6,7] . Можно понять причину возникновения неустойчивости, принимая во внимание, что образование флуктуаций плотности становится энергетически выгодным, т.к. частицы эффективно притягиваются. В предельных случаях можно получить более простые выражения для инкремента

$$(\operatorname{Im}\omega)^2 = \Lambda^2 = \left|\frac{d\vartheta_\parallel}{d\vartheta}\right| \frac{\omega_e^2\cos^2\vartheta}{\gamma_0^3} \;; \quad \left(\lambda^2 \gg \frac{\omega_e^2}{\gamma_0},\ \frac{\omega_e^2}{\gamma_0^3}\left|\frac{d\vartheta_\parallel}{d\vartheta}\right|\right) \qquad \text{(IIa)}$$

Этот случай соответствует усреднению в уравнениях движения по свободным поперечным ("бетатронным") колебаниям с частотами $\pm\lambda$, т.е. пренебрежению одночастичными модами s=2,3 ($\lambda_{2,3} = \pm\lambda$). Остается только движение с медленным изменением невозмущенной продольной скорости (λ_1 =0). Ленгмюровское движение частиц с отрицательной массой имеет инкремент, совпадающий с (IIa).

В другом предельном случае

$$\Lambda^2 = \frac{1}{\gamma_0^2}\left|\frac{d\vartheta_\parallel}{d\vartheta}\right| \lambda^2\left(1 - \frac{\gamma_0^2\lambda^2}{\omega_e^2\cos^2\vartheta}\right); \qquad \left(\frac{\omega_e^2\cos^2\vartheta}{\gamma_0} \gg \lambda^2,\ \lambda^2\left|\frac{d\vartheta_\parallel}{d\vartheta}\right|\frac{1}{\gamma_0^2}\right)$$

В условиях одночастичной устойчивости $\frac{d\vartheta_\parallel}{d\vartheta} \le \gamma_\parallel^2\vartheta^2$, причем выход на предельное значение совершается при $\varepsilon \lesssim B'\theta_0^2$.

2. Другая возможность возникновения комплексных корней в (II) соответствует отрицательности подкоренного выражения. Необходимым условием здесь является $\varepsilon < 0$, в отличие от неустойчивости отрицательной массы. В этом случае инкремент

$$\Lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\lambda^2\left(\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{d\vartheta_\parallel}{d\vartheta} - 1\right) - \left(\frac{\lambda}{\gamma_0}\sqrt{\frac{d\vartheta_\parallel}{d\vartheta}} - \omega_e\frac{|\cos\vartheta|}{\sqrt{\gamma_0}}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \text{(I2)}$$

При оптимальном выборе параметров $\frac{\omega_e}{\sqrt{\gamma_0}} = \frac{\lambda}{\gamma_0}\sqrt{\frac{d\vartheta_\parallel}{d\vartheta}} \equiv \frac{\bar\omega_e}{\sqrt{\gamma_0}}$

$$\Lambda(\omega_e = \bar\omega_e) = \frac{\bar\omega_e}{2\sqrt{2\gamma_0}}\left\{1 - \frac{d\vartheta_\parallel}{d\vartheta} - (1 - |\cos\vartheta|)^2\right\}^{1/2} \le \frac{\bar\omega_e}{2\sqrt{2\gamma_0}} \qquad \text{(I2a)}$$

Из вида инкремента можно заключить, что неустойчивость связана с резонансом между свободным поперечным движением (которое при достаточно слабом поле ондулятора есть ларморовское вращение) и ленгмюровскими колебаниями: $|\varepsilon| = \omega_0 - B' \simeq \omega_e$. Видно, что неустойчивость возникает именно в суммовом резонансе, что соответствует общим представлениям теории колебаний. Результат (I2) можно получить и несколько иным способом, отправляясь от уравнений плазменной гидродинамики, которые в отсутствии ондулятора имеют нетривиальные решения, соответствующие ленгмюровским колебаниям и ларморовскому вращению. Включение ондулятора приводит к тому, что амплитуды этих гармоник становятся зависящими от времени. Инкремент может быть получен путем выделения резонансных слагаемых с помощью метода усреднения.

Радиационная неустойчивость

Дисперсионное уравнение, полученное, как описано выше, из (7) и (9), выглядит следующим образом:

$$1 = \frac{n}{2}\frac{\omega_e^2 K_0 u_0^2}{\gamma_0\,\omega(\omega-\Delta)} f_{3s}\frac{1}{\omega+\lambda_s} f_{s\mu}^{-1}(1+v_0\cos\vartheta)L_\mu + (\text{кулоновская часть}) \qquad \text{(I3)}$$

где $\Delta = \omega_q - n\omega_0$, L_μ – вектор с компонентами ~I, зависящими от угла ϑ , кулоновский член есть правая часть I0), которая пренебрежимо мала при

$$\frac{K_0 u_0^2}{\omega} \gg 1$$

В противоположном случае радиационное слагаемое в (I3) несущественно, и спектр колебаний плотности даже при малых расстройках Δ определяется кулоновским взаимодействием. Пренебрегая кулоновским слагаемым, получаем уравнение 5-й степени на $\omega(\Delta)$

$$(\omega-\Delta)\omega^2(\omega^2-\lambda^2)=\frac{n\omega_e^2 k_0 u_0}{2\gamma_0}(1+v_\parallel\cos\vartheta)\Big\{-\frac{\theta\lambda^2}{\gamma_0^2}\frac{dv_\parallel}{d\vartheta}(\cos^2\vartheta\,\bar{C}_n^2+\bar{S}_n^2)+$$
$$+H'\omega\left[\bar{C}_n\bar{S}_n(1+\cos^2\vartheta)-J_n\bar{S}_n u_0\sin\vartheta\right]+\left(\omega^2-\frac{\lambda^2}{\gamma_0^2}\frac{dv_\parallel}{d\vartheta}\right)\times$$
$$\times\left[\frac{u_0\cos\vartheta}{2}(J_{n-1}^2+J_{n+1}^2)-J_n\bar{C}_n\sin\vartheta\cos\vartheta\right]\Big\} \qquad (14)$$

здесь $\bar{C}_n=\frac{1}{2}(J_{n+1}(r_0q_\perp)+J_{n-1}(r_0q_\perp))$

$\bar{S}_n=\frac{1}{2}(J_{n+1}(r_0q_\perp)-J_{n-1}(r_0q_\perp))$

$J_n=J_n(r_0q_\perp)$

В том случае, если $\left|\frac{n\omega_e^2k_0u_0^2}{\gamma_0}\right|^{1/3}\ll\lambda,\ \lambda\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{dv_\parallel}{d\vartheta}$ можно получить $\omega(\Delta)$ в явном виде, решив кубическое уравнение. При $\Delta\ll\omega(0)$

$\omega(\Delta)=\omega(0)+\frac{\Delta}{3}+\frac{\Delta^2}{9\omega(0)}+O\left(\frac{\Delta^3}{\omega(0)^2}\right)$, а $\omega(0)$ – произвольная ветвь решения уравнения $\omega^3(0)=b$

$$b=\frac{n\omega_e^2k_0u_0}{2\gamma_0^3}\frac{dv_\parallel}{d\vartheta}(1+v_\parallel\cos\vartheta)\left\{\theta\left[\cos^2\vartheta\,\bar{C}_n^2+\bar{S}_n^2\right]+\frac{u_0\cos\vartheta}{2}(J_{n-1}^2+J_{n+1}^2)-J_n\bar{C}_n\sin\vartheta\cos\vartheta\right\}\times$$

В обратном предельном случае вид зависимости $\omega(\Delta)$ сохраняется, а

$$b=\frac{n\omega_e^2k_0u_0}{2\gamma_0}(1+v_\parallel\cos\vartheta)\left\{\frac{u_0\cos\vartheta}{2}(J_{n-1}^2+J_{n+1}^2)-J_n\bar{C}_n\sin\vartheta\cos\vartheta\right\}$$

Видно, что инкремент $\Lambda_n=Im(\omega_n)$ по сравнению с Λ_1 имеет дополнительный множитель $\sim n^{1/3}|u_0\sin\vartheta|^{\frac{2(n-1)}{3}}$. В некоторых работах, посвященных ЛСЭ (например, [5], приводятся выражения для радиационного инкремента при n =I, ϑ =0, и малой плазменной частоте (наш I предельный случай). При этих предположениях результаты согласуются.

Сделаем несколько замечаний о пределах применимости полученных результатов.

I. Поперечный размер пучка a считался бесконечным. Условие $q_\perp a\gg 1$ необходимо для справедливости этого допущения. Кроме того, нужно потребовать, чтобы дифракционный размер волнового пакета, составленного из мод с волновыми векторами $\sim q$, не превышал поперечника пучка, а также, чтобы центр пакета за время нарастания не успел подойти к границе:

$$\sqrt{\frac{l_g}{q}}\ll a\ ,\quad l_g\ll\frac{a}{\sin\vartheta} \qquad (16)$$

Здесь $l_g=\frac{v_{gr}}{\Lambda}$; $v_{gr}=\frac{d\omega}{dk}$

Для кулоновских мод $v_{gr}\sim\frac{\omega_e}{k}\sim\frac{\Lambda}{k}$ и последние неравенства автоматически выполняются, как только $ka\gg 1$. Для радиационной неустойчивости $v_{gr}\sim c$ и мы получаем из (I6) дополнительные требования:

$\frac{c}{\Lambda a}\ll ka$; $\frac{c}{\Lambda a}\ll\frac{1}{\sin\vartheta}$ (в случае $q_\perp\lesssim|k|$).

Как показано в [5], невыполнение этих условий не отменяет неустойчивость, но изменяет поведение инкрементов, которые в таком случае определяются не плотностью, а полным током частиц.

2. Пренебрежение тепловым разбросом скоростей справедливо, если "тепловое" время прохождения расстояния порядка длины волны превышает время нарастания: $k\Delta v_\parallel<\Lambda$ (иначе: $\frac{1}{k}=\lambda>r_D=\frac{\Delta v_\parallel}{\Lambda}$ – длина волны колебаний должна быть больше дебаевского радиуса). Для некоторой частицы с начальными условиями отличными от равновесных, отклонение продольной скорости от равновесной в ондуляторе содержит, в общем случае, как постоянную, так и осциллирующую (с частотой λ – см. выше) составляющие. Если $\lambda\gg\Lambda$, то осциллирующая составляющая несущественна, т.к. не приводит к среднему по времени отклонению частиц. Постоянная же составляющая за счет правильного ввода пучка в ондулятор может быть сделана такой, что соответствующая ей продольная температура не изменится сильно по сравнению с той же величиной до участка ввода, т.е. останется весьма малой ($T_\parallel\sim\frac{T_\perp^2}{W}$, W – энергия частиц пучка в лаб. системе, $T_\perp$ – поперечная температура). Если же $\lambda\lesssim\Lambda$, то в продольной скорости становится существенной осциллирующая компонента $\Delta v_\parallel^{osc}\simeq\theta_0\Delta v_\perp\cos(\lambda t+\varphi)$; продольная температура в этом случае $T_\parallel\sim\theta_0^2T_\perp$.

5. Некоторые численные оценки

При нерелятивистском движении пучка радиационная неустойчивость будет заметно ослаблена, т.к. условие $q_\perp a < 1$ не может быть выполнено. Максимально достижимый инкремент неустойчивости отрицательной массы в $\beta = \frac{v}{c}$ раз меньше, чем та же величина для циклотронной неустойчивости. Минимальная инкрементная длина циклотронной неустойчивости

$$\ell_c \simeq \frac{3 v_\parallel}{\omega_e} \simeq \frac{10^9 \beta}{\omega_e}\ \text{см}$$

$\beta = \frac{v_\parallel}{c}$; ω_e – в обратных секундах.

В релятивистском случае существенной становится радиационная неустойчивость. Для её минимальной инкрементной длины в лаб. системе можно получить оценку

$$\ell_{rad} \simeq \frac{\gamma}{(\Omega_e^2 \varkappa)^{1/3}} \quad ; \qquad \omega_e^2 = \frac{\Omega_e^2}{\gamma_\parallel}$$

Для неустойчивости отрицательной массы можно получить усиление инкремента за счет параметра $\frac{dv_\parallel}{d\vartheta}$, который можно сделать большим (тогда $\lambda^2 \frac{dv_\parallel}{d\vartheta} \sim \frac{\beta^2}{\gamma^2}$, $\lambda^2 \ll \omega_e^2 \ll \lambda^2 \frac{dv_\parallel}{d\vartheta}$).

Инкрементная длина в этом случае

$$\ell_{-\mu} \sim \frac{\gamma^{5/4}}{(\Omega_e \beta)^{1/2}}$$

Для циклотронной неустойчивости

$$\ell_c \sim \frac{\gamma^2}{\Omega_e} \gg \ell_{-\mu}$$

Для сгустка длиной I м, поперечным сечением 10^{-2} мм^2, содержащего 10^{12} частиц, движущегося в ондуляторе с шагом I см, радиационная инкрементная длина $\ell_{rad} \simeq 0.1\gamma$ см.

Если магнитное поле в ондуляторе B = 20 кГс, то можно получить неустойчивость отрицательной массы с инкрементной длиной

$$\ell_{-\mu} \simeq 0{,}1\, \gamma^{5/4}\ \text{см}$$

Для пучка с плотностью в лаб. системе $n_0 \sim 10^9$ см$^{-3}$ в магнитном поле B = 2 кГс $\ell_{-\mu} \sim 5\gamma^{5/4}$ см.

Из полученных результатов видно, что в широком диапазоне условий может быть эффективно реализована та или иная ондуляторная неустойчивость.

Авторы благодарят А.М.Кондратенко, Е.Л.Салдина, В.В.Пархомчука, Б.Н.Брейзмана за обсуждения и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.И.Будкер "Атомная энергия", т.22, в.5 (1967).

2. Г.И.Будкер, А.Н.Скринский. УФН, т.124, в.4, 561 (1978).

3. Я.С.Дербенёв. Препринт ИЯФ СО АН 80-185; Доклад на УП Всесоюзном совещании по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1980 г.

4. N.M.Croll, W.A. McMillan. Phys. Rev. A17, 300 (1978)

5. А.М.Кондратенко, Е.Л.Салдин. Препринт ИЯФ СО АН 79-48.

6. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев "Атомная энергия", т.7, 549 (1959).

7. C.E. Nielsen, A.M. Sessler, K.R. Symon. Proc. Inter. Confer. on High Energy Accel., CERN (1959) p.239

Работа поступиоа - 4 марта I98I г.

Ответственный за выпуск - С.Г.Попов
Подписано к печати 20.3-I98I г. МН 03058
Усл. I,0 печ.л., 0,8 учетно-изд.л.
Тираж 230 экз. Бесплатно
Заказ № 33.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР