

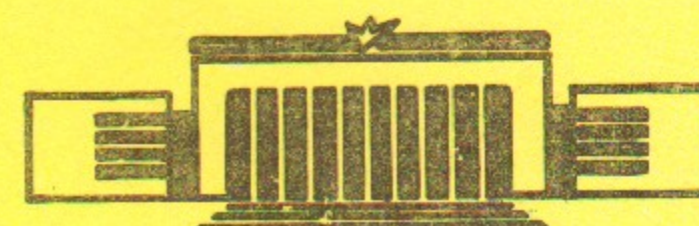
20

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Н.С.Диканский, В.А.Лебедев

АВТОФАЗИРОВКА ОХЛАЖДЕННОГО
ПУЧКА ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ

ПРЕПРИНТ 81 - 29



Новосибирск

Н. С. Диканский, В. А. Лебедев

АВТОФАЗИРОВКА ОХЛАЖДЕННОГО ПУЧКА ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе предлагается метод группировки пучка тяжелых частиц по фазе в накопителе с электронным охлаждением введением малой модуляции энергии электронного пучка на частоте обращения. Рассмотрено фазовое движение частиц, получены установившийся фазовый размер пучка и допуск на отклонения магнитного поля, частоты модуляции и энергии электронного пучка от равновесных значений.

Метод электронного охлаждения позволяет накапливать пучки тяжелых частиц (протонов, антипротонов, ионов)^[1]. Для накопления необходимо сжатие как поперечного, так и продольного фазовых объемов. Накопление частиц лучше осуществлять таким образом, чтобы при инъекции каждой новой порции не происходило возбуждения бетатронных колебаний накопленного пучка. Для осуществления такого режима накопления необходимо накопленный пучок группировать по фазе, с тем чтобы освободить часть орбиты для инъекции новой порции. При этом выпуск новой порции необходимо производить в свободную от пучка часть орбиты.

Группировку пучка, в принципе, можно производить при помощи обычной ВЧ системы при включенном электронном охлаждении. Однако сжатие пучка таким образом, как правило, сопровождается появлением неустойчивости типа электронного ветра^[2] и тем самым увеличением фазового объема пучка.

В настоящей работе предлагается другой способ группировки использующий сам процесс электронного охлаждения, для этого необходимо промодулировать скорость электронного пучка с частотой обращения.

Предположим, что в накопителе циркулирует охлажденный азимутально однородный пучок протонов. Введем малую модуляцию энергии электронов, модулируя ускоряющее напряжение пучка в электронной установке с частотой обращения. При этом возникнет разница скоростей между электронами и протонами, которые отклонены от равновесной фазы. Разница скоростей приводит к возникновению силы трения, направленной вдоль скорости пучков. Нетрудно видеть, что в момент прихода на участок охлаждения протоны, отстающие по фазе имеют меньшую скорость, чем электроны, и будут ускоряться, а частицы, которые опережают по фазе будут замедляться. Это приводит к возникновению затухающих фазовых колебаний и группировке пучка вокруг равновесной фазы.

I. ФАЗОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В НАКОПИТЕЛЕ

Пусть электронный пучок имеет малую модуляцию энергии E_e с частотой кратной равновесной частоте обращения частиц в накопителе ω_0 ,

$$E_e(t) = E_e + u \sin q\omega_0 t, \quad u \ll E_e - mc^2 \equiv \epsilon_e.$$

Получим уравнение фазового движения тяжелой частицы (в дальнейшем протон) в накопителе.

На протон, продольная скорость которого отличается от скорости электронного пучка, действует сила направленная вдоль скорости, которая приводит к замедлению или ускорению протона. Пусть в системе отсчета, в которой электронный пучок покоится, эта сила равна $F_{||} = F(\delta v_{||})$, здесь $\delta v_{||}$ — разница скоростей протона и электронного пучка в системе отсчета, связанной с электронным пучком. Считая фазовые колебания достаточно медленными легко получить уравнения фазового движения [3]:

$$\frac{d\varphi}{dt} = q\omega_0 K \frac{\delta E_p}{E_p}, \quad K = \frac{\gamma^{2\alpha} - 1}{\gamma^2 - 1}, \quad (I)$$

$$\frac{d(\delta E_p)}{dt} = V_0 F(\delta v_{||}), \quad \gamma = \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

здесь $E_p = \gamma M c^2$ — равновесная энергия протона, δE_p — отклонение энергии протона от равновесной, V_0 — равновесная скорость пучков, α — коэффициент расширения орбит. Разницу продольных скоростей в сопутствующей системе отсчета $\delta v_{||}$ выразим через $\delta E_p, u, \varphi$.

$$\delta v_{||} = \frac{\delta E_p}{M V_0 \gamma} + \frac{u \sin \varphi}{m V_0 \gamma}, \quad (2)$$

здесь M, m — массы протона и электрона. Представляя (2) в (I) окончательно получаем уравнение фазового движения

$$\ddot{\varphi} = \frac{q\omega_0 V_0 K}{m c^2 \gamma} F\left(\frac{c^2}{q\omega_0 V_0 K} \dot{\varphi} + \frac{u \sin \varphi}{m V_0 \gamma}\right). \quad (3)$$

Чтобы определить характер фазового движения необходимо в (3) подставить явную зависимость продольной силы трения от разницы скоростей. В работе [4] была предложена эмпирическая формула, объединяющая экспериментальные данные, полученные на установке НАР-М. В пренебрежении отстройкой скорости она выглядит следующим образом

$$F_{||} = - \frac{12\pi r_e^2 n_e' m c^4 \eta}{\sqrt{(\alpha' V_0/2)^2 + \delta v_{||}^2} \sqrt{(V_0/2)^2 + \delta v_{||}^2}}, \quad (4)$$

где n_e' — плотность электронов в системе частиц, η — доля орбиты протонов, занятая участком охлаждения, α' — коэффициент учитывающий искажения силовых линий магнитного поля (в экспериментах на установке НАР-М при энергии протонов 65 МэВ $\alpha' \approx 4 \cdot 10^{-4}$), r_e — классический радиус электрона, c — скорость света. Область применимости этой формулы ограничена значениями параметров

$$10^5 \text{ см/сек} < \delta v_{||} < 7 \cdot 10^6 \text{ см/сек},$$

$$4 \cdot 10^4 \text{ см/сек} < V_0 < 10^8 \text{ см/сек}, \quad (5)$$

$$10^7 \text{ см}^{-3} < n_e < 4,7 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}.$$

Эта формула несправедлива в области малых скоростей, поскольку сила трения не обращается в ноль при $\delta v_{||} = 0$. Чтобы выполнить это требование дополним формулу (4) следующим образом

$$F_{||} = - \frac{12\pi r_e^2 n_e' m c^4 \eta}{\sqrt{(\alpha' V_0/2)^2 + \delta v_{||}^2} \sqrt{(V_0/2)^2 + \delta v_{||}^2}} \frac{\delta v_{||}}{\sqrt{\Delta_{||}^2 + \delta v_{||}^2}}, \quad (6)$$

здесь $\Delta_{||}$ — характеризует продольную температуру электронного пучка, $\Delta_{||} \leq 10^5$ см/сек. Найти аналитическое решение уравнения (3) с силой (6) не представляется возможным. Однако чтобы представить характер фазового движения и найти область устойчивости достаточно рассмотреть некоторые частные случаи.

Поскольку в реальных экспериментальных условиях обычно $v_e \gg \alpha V_0/2 \gg \Delta_{||}$, то в случае $\delta v_{||} \lesssim \frac{\alpha V_0}{2}$ силу можно положить равной

$$F_{||} = - F_0 \text{sign} \delta v_{||} \quad (7)$$

Тогда уравнение движения будет:

$$\ddot{\varphi} = - \frac{q\omega_0 V_0 K F_0}{mc^2 \gamma} \operatorname{sign} \left(\frac{c^2}{q\omega_0 V_0 K} \dot{\varphi} + \frac{u \sin \varphi}{m V_0 \gamma} \right) \quad (8)$$

Переходя к безразмерным переменным, получим:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tilde{t}^2} = - \operatorname{sign} \left(\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} + T \sin \varphi \right) \quad (9)$$

где: $\tilde{t} = \frac{t}{\tilde{t}_0}$, $\tilde{t}_0^2 = \frac{mc^2 \gamma}{q\omega_0 V_0 K F_0}$, $T = \frac{u}{mc^2 \gamma} q\omega_0 \tilde{t}_0 K$.

Решением этого уравнения являются отрезки парабол

$$\varphi = \pm \tilde{t}^2 + C_1 \tilde{t} + C_2 \quad (10)$$

Поведение решения удобно рассматривать на фазовой плоскости. Фазовые траектории для уравнения (9) будут:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \right)^2 - \left(\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \right)_0^2 = \pm (\varphi - \varphi_0) \quad (11)$$

Построим на фазовой плоскости кривую $d\varphi/d\tilde{t} = -T \sin \varphi$, которая разделяет её на две области. В области (I) выражение (10) берется со знаком минус, а в области (II) со знаком плюс (см. рис. I). Таким образом, фазовая траектория будет состоять из отрезков парабол, приближающихся к нулю.

Для возможности перехода из области I в II необходимо, чтобы наклон фазовой траектории в точке перехода был меньше, чем наклон кривой $d\varphi/d\tilde{t} = -T \sin \varphi$, т.е.

$$\left| \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \right) \right| < |T \cos \varphi| \quad (12)$$

Используя уравнения движения из (12) получим

$$\left| \frac{1}{\dot{\varphi}} \right| < |T \cos \varphi| \quad (13)$$

Откуда поскольку в точке перехода $d\varphi/d\tilde{t} = -T \sin \varphi$ следует условие для возможности перехода из области (I) в (II) и обратно

$$\frac{2}{T^2} < |\sin 2\varphi| \quad (14)$$

Если условие (14) не выполняется, то как будет показано ниже, фазовая траектория частицы будет совпадать с кривой $d\varphi/d\tilde{t} = -T \sin \varphi$ и придет в начало координат (см. (18)). При $T < T_{кр} \equiv \sqrt{2}$ условие (14) не выполняется ни для каких φ и движение становится аperiodическим.

Рассмотрим теперь движение частицы при $\delta v_{II} \leq \Delta_{II}$. При $\Delta_{II} \rightarrow 0$ это дает решение уравнения (9) для случая движения частицы вдоль сепаратрисы ($|\sin 2\varphi| < 2/T^2$). При $\delta v_{II} < \Delta_{II}$ силу трения (6) можно представить в виде

$$F \approx F_0 \frac{\delta v_{II}}{\Delta_{II}} \quad (15)$$

тогда уравнение движения будет уравнением движения маятника с затуханием:

$$\ddot{\varphi} + \lambda \dot{\varphi} + \Omega^2 \sin \varphi = 0, \quad \lambda = \frac{F_0}{m \gamma \Delta_{II}}, \quad \Omega^2 = \frac{q\omega_0 K F_0 u}{m m c^2 \gamma^2 \Delta_{II}} \quad (16)$$

Для параметров установки НАП-М $\lambda \gg \Delta_{II}$. В этом случае движение становится аperiodическим, первым членом в уравнении (16) можно пренебречь и оно легко интегрируется

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} e^{-\Omega^2 t / \lambda} \quad (17)$$

При этом в показателе экспоненты Δ_{II} выпадает и (17) можно переписать в следующем виде

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} e^{-t/\tau_{II}}, \quad \tau_{II} = \frac{m c^2 \gamma}{u q \omega_0 K} \quad (18)$$

Фазовая траектория этого решения как и следовало ожидать совпадает с кривой $d\varphi/d\tilde{t} = -T \sin \varphi$.

На рисунке (2) приведены численно рассчитанные кривые затухания для установки НАП-М. Значения параметров при этом были

взяты равными $E_p - mc^2 = 65 \text{ МэВ}$, $K = 0,8$, $\omega_0/2\pi = 2,2 \text{ МГц}$, $\varphi = 1$, $v_0 F_0 = 1,5 \text{ МэВ/сек}$, $\Delta_{II} = 10^5 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$, U — изменяется от 1,5 эВ до 42 эВ.

Характер поведения кривых соответствует качественному рассмотрению, приведенному выше. С ростом напряжения модуляции U растет параметр T (см. (9), (14)) и движение при $U \sim U_{кр}$ переходит из апериодического в колебательное, здесь $U_{кр}$ это напряжение модуляции соответствующее $T_{кр} = \sqrt{2}$. Минимальное время группировки достигается при $U \sim U_{кр}$ и равно 60-90 мс.

Если разброс энергии инжектируемого пучка δE_p достаточно велик, то для получения правильной оценки времени затухания необходимо учитывать уменьшение силы трения с ростом разницы скоростей. В этом случае можно пренебречь изменением скорости электронного пучка по сравнению с разбросом скоростей в протонном пучке, и время группировки будет совпадать со временем продольного затухания

$$\tau_{II} = \int_0^{\delta E_p} \frac{\lambda E}{v_0 F_0 (E/mv_0 \gamma)} \approx \frac{U_L (\delta E_p)^2}{48 \pi e n_e \eta m m c^4 \gamma v_0^2}$$

$$\alpha v_0 \ll \frac{2 \delta E_p}{m v_0 \gamma} \ll U_L$$

2. УСТАНОВИВШИЙСЯ РАЗМЕР ПРОТОННОГО ПУЧКА

Диффузия протонов на электронном пучке, а также внутренние столкновения в протонном пучке и продольное электростатическое расталкивание протонов приводит к конечному азимутальному размеру протонного пучка. Равновесная функция распределения протонов $f(\varphi, \psi)$ определяется уравнением:

$$\psi \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ \frac{q \omega_0 v_0 K}{m c^2} [F(\delta v_{II}) + e E_{II}] f \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{q \omega_0 v_0 K}{m c^2} \right)^2 \frac{\langle \Delta p_{II}^2 \rangle}{\Delta t} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} \quad (19)$$

Здесь E_{II} — собственное продольное поле протонного пучка, $F(\delta v_{II})$ — сила трения, $\langle \Delta p_{II}^2 \rangle / \Delta t$ — коэффициент диффузии в системе отсчета пучка.

В работе [5] для $\langle \Delta p_{II}^2 \rangle / \Delta t$ было получено выражение:

$$\left\langle \frac{\Delta p_{II}^2}{\Delta t} \right\rangle = 8 \pi e^4 L \left(\frac{\bar{n}_e}{v_L} \eta + \frac{\bar{n}_p}{U_L P} \right) \quad (20)$$

где e — заряд электрона, L — кулоновский логарифм, \bar{n}_e/v_L — среднее отношение плотности электронного пучка к разбросу поперечных скоростей электронов, \bar{n}_p/v_{Lp} — то же для протонного пучка. Первый член в (12) обусловлен диффузией протонов на электронном пучке, второй передачей энергии поперечных колебаний протонов в продольное движение за счет внутреннего рассеяния, так как продольная температура протонного пучка много меньше поперечной.

а) Случай линейной силы трения ($U/mv_0 < \Delta_{II}$, $\langle \delta v_p^2 \rangle < \Delta_{II}^2$).

Предположим, что плотность протонного пучка достаточно мала, чтобы можно было пренебречь влиянием протонов друг на друга, а среднеквадратичная скорость частиц в пучке меньше Δ_{II} . Силу трения в этом случае можно считать линейной

$$F_{II} = F_0 \frac{\delta v_{II}}{\Delta_{II}} \quad (21)$$

Подставляя (20) в (19) и пренебрегая взаимодействием протонов между собой, получим уравнение для функции распределения

$$\psi \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \psi} \left[(\lambda \psi + \Omega^2 \sin \varphi) f \right] = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} \quad (22)$$

где $D = \left(\frac{q \omega_0 v_0 K}{m c^2} \right)^2 8 \pi e^4 L \frac{\bar{n}_e}{v_L} \eta$,

а λ, Ω определяются равенством (16). Решением этого уравнения будет

$$f = 2 \sqrt{\pi} \frac{\exp(-\lambda \frac{\psi^2 - 2 \Omega^2 \cos \varphi}{D})}{\sqrt{D} I_0 \left(\frac{2 \Omega^2 \lambda}{D} \right)} \quad (23)$$

здесь I_0 — модифицированная функция Бесселя, f нормирована на 1. Отсюда получаем разброс энергии частиц в пучке равным

$$\frac{\delta E_p^2}{E_p^2} = \frac{L m}{6 m} \frac{\beta^3 \alpha \Delta_{II} \delta}{c} \quad , \quad \beta = \frac{v_0}{c} \quad (24)$$

Для установки НАИ-М это дает разброс энергии протонов в пучке $\sqrt{\delta E_p^2}/E_p = 2,7 \cdot 10^{-7}$, при следующих параметрах $L = 15$, $\beta = 0,37$, $\alpha = 4 \cdot 10^{-4}$, $\Delta_{||} = 10^5$ см/сек. Соответствующий разброс скоростей $\sqrt{\delta v_p^2}/v_0 = 1,5 \cdot 10^{-6}$ см/сек) значительно меньше $\Delta_{||}$, что оправдывает сделанное выше предположение. Фазовый размер пучка при этом будет

$$\sqrt{\varphi^2} = \sqrt{\frac{D}{2\lambda R^2}} = \sqrt{\frac{L}{576\pi}} \frac{qK\alpha^2\gamma^3\beta^4}{\eta} \frac{\omega_0 \Delta_{||}^2 m v_0}{\mu c^2 n_e r_e} \quad (25)$$

Для установки НАИ-М это дает фазовый размер $\sqrt{\varphi^2} = 4,37 \cdot 10^{-3}$ рад, при следующих параметрах $q = 1$, $K = 0,8$, $\eta = 0,02$, $\omega_0 = 13,8$ МГц, $n_e = 10^{-8}$ см $^{-3}$, $U = 9$ В, $v_L = 10^7$ см/сек. Очевидно, такой чрезвычайно малый азимутальный размер пучка, может быть только при очень малом числе частиц в пучке.

В случае большого числа протонов в пучке уже нельзя пренебрегать внутренним рассеянием в протонном пучке и действием собственного продольного электрического поля пучка. Соответствующие уравнения для функции распределения имеют простое решение, при $\lambda \gg \lambda$, когда фазовые колебания являются аперриодическими. Обычно это условие хорошо выполняется в эксперименте. Рассмотрим нерелятивистское движение в накопителе и, для простоты, будем считать вакуумную камеру круглого сечения и постоянного радиуса R , а пучок постоянного радиуса a . Кроме этого предположим, что длина сгустка $l \gg a$. Тогда продольное электрическое поле пучка будет равно:

$$E_{||} = -\frac{2\pi a^2 e}{R} \ln \frac{b}{a} \frac{\partial n_p}{\partial \varphi} \quad (26)$$

здесь n_p - плотность протонного пучка, R - средний радиус накопителя. Уравнение для функции распределения в этом случае будет:

$$\dot{\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(\lambda \dot{\varphi} + \lambda^2 \sin \varphi + \alpha \frac{\partial n_p}{\partial \varphi}) f \right] = \frac{D}{2} \left(1 + \frac{n_p}{n_{кр}} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (27)$$

здесь: $\alpha = \frac{2\pi a^2 e^2}{R} \left(\ln \frac{b}{a} \right) \frac{q \omega_0 v_0 K}{m c^2}$, $n_{кр} = n_e \eta \frac{v_L}{v_0}$.

Умножим это уравнение на $\dot{\varphi}$ и проинтегрируем его по $d\dot{\varphi}$, при этом положим следующие интегралы равными

$$\int f d\dot{\varphi} = n_p(\varphi) \quad ,$$

$$\int f \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = 0 \quad ,$$

$$\int f \dot{\varphi}^2 d\dot{\varphi} = \overline{\dot{\varphi}^2}(\varphi) n_p(\varphi) \quad ,$$

в результате получим уравнение для плотности протонов $n_p(\varphi)$:

$$\frac{d}{d\varphi} (\overline{\dot{\varphi}^2} n_p) + \lambda n_p \sin \varphi + \alpha n_p \frac{dn_p}{d\varphi} = 0 \quad (28)$$

Чтобы найти неизвестное $\overline{\dot{\varphi}^2}(\varphi)$, воспользуемся тем, что при достаточно большом λ , $\overline{\dot{\varphi}^2}(\varphi)$ определяется локальным коэффициентом диффузии. Или, что тоже самое, время за которое частица получает среднеквадратичную скорость, по порядку величины, равное λ^{-1} , много меньше периода колебаний. В этом случае можно пренебречь первым, третьим и четвертым членами в левой части уравнения (27). При этом зависимость от φ выпадает, и два раза интегрируя по $d\dot{\varphi}$ оставшиеся члены, получим

$$f(\dot{\varphi}, \varphi) = c(\varphi) \exp\left(-\frac{\lambda \dot{\varphi}}{D(1 + \frac{n_p}{n_{кр}})}\right) \quad (29)$$

здесь $c(\varphi)$ константа определяемая нормировкой функцией распределения на плотность протонов $n_p(\varphi)$. Отсюда получаем

$$\overline{\dot{\varphi}^2} = \left(1 + \frac{n_p}{n_{кр}}\right) \frac{D}{2\lambda} \quad (30)$$

Подставляя (30) в (28) окончательно получим:

$$\frac{d}{d\varphi} \left[\left(1 + \frac{n_p}{n_{кр}}\right) \frac{D}{2\lambda} n_p \right] + n_p \lambda^2 \sin \varphi + \alpha n_p \frac{\partial n_p}{\partial \varphi} = 0 \quad (31)$$

Интегрируя имеем

$$\ln \left(\frac{n_p}{n_{кр}} \right) + \frac{n_p}{n_{кр}} = \frac{\cos \varphi}{\varphi^2} \quad (32)$$

здесь $n_{кр} = \left(\frac{2}{n_{кр}} + \frac{24\pi a^2 c^2 r_e}{L \alpha \beta^2 q \omega_0 K \Delta_{||} R} \ln \frac{b}{a} \right)^{-1}$,

$\bar{\varphi}^2$ — определяется равенством (25), $n_{кр}^*$ — константа интегрирования определяется полным числом частиц в накопителе, которое выражается через $n_p(\varphi)$ следующим равенством:

$$N = \pi a^2 \bar{R} \int_0^{2\pi} n_p(\varphi) d\varphi \quad (33)$$

Логарифмическое уравнение (32) разрешается относительно n_p в двух предельных случаях. В первом случае $\max n_p \ll N_{кр}$, и получающееся решение совпадает с (23)

$$n_p(\varphi) = \frac{N}{2\pi^2 a^2 \bar{R}} \frac{\exp(\cos \varphi / \bar{\varphi}^2)}{2\pi I_0(1/\bar{\varphi}^2)} \quad (34)$$

Другой предельный случай $\min n_p \gg N_{кр}$ дает:

$$n_p = \frac{N}{2\pi^2 a^2 \bar{R}} + \frac{N_{кр} \cos \varphi}{\bar{\varphi}^2} \quad (35)$$

Для установки НАП-М критические плотности равны $N_{кр} = 830 \text{ см}^{-3}$, $n_{кр} = 2 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$ для следующих параметров $a = 0,1 \text{ см}$, $\ln(b/a) = 4$, $L = 15$, $\alpha = 4 \cdot 10^{-4}$, $\beta = 0,37$, $q = 1$, $\omega_0 = 13,8 \text{ МГц}$, $K = 0,8$, $\Delta_{||} = 10^5 \text{ см/сек}$, $\bar{R} = 7 \text{ м}$, $n_e = 10^8 \text{ см}^{-3}$, $\eta = 0,02$, $v_{гр}/v_0 = 10^{-5}$, $v_{||}/v_0 = 10^{-3}$. Из сравнения критических плотностей видно, что основным эффектом, приводящим к удлинению слутки в накопителе будет электростатическое расталкивание за счет собственного поля пучка.

Одной из основных характеристик группировки пучка является отношение максимальной по азимуту плотности пучка и минимальной. Приравнявая в (32) $\varphi = 0, \pi$ получим уравнения для $n_{p \max}$, $n_{p \min}$. Исключая затем $N_{кр}^*$, легко получить

$$n_{p \max} = N_{кр} \frac{\frac{2}{\bar{\varphi}^2} - \ln \frac{n_{p \max}}{n_{p \min}}}{1 - n_{p \min}/n_{p \max}} \quad (36)$$

При $\bar{\varphi}^2 \ll 1$, $n_{p \min} \ll n_{p \max}$ это дает

$$n_{p \max} \approx \frac{2N_{кр}}{\bar{\varphi}^2} \quad (37)$$

$$\frac{n_{p \max}}{n_{p \min}} = \exp \left[\frac{2}{\bar{\varphi}^2} - \frac{n_{p \max}}{N_{кр}} \right]$$

Видно, что для $\bar{\varphi}^2 \ll 1$ разрушение группировки происходит экспоненциально быстро, когда $n_{p \max}$ достигает значения $2N_{кр}/\bar{\varphi}^2$. Приведенные выше рассуждения позволяют оценить максимальное число частиц в сгруппированном пучке,

$$N_{p \max} = \frac{2\pi^2 a^2 \bar{R} N_{кр}}{\bar{\varphi}^2} = \frac{48\pi^2 \bar{R}^2 \epsilon_0 n_e U \eta}{\alpha \beta^2 m \Delta_{||} v_0 \ln(b/a)} \quad (38)$$

Для установки НАП-М это дает $6 \cdot 10^9$ частиц. Однако при таком большом числе протонов в слутке, установившийся разброс скоростей протонов относительно электронов для установки НАП-М больше $\Delta_{||}$ и приближение линейной силы трения не справедливо.

б) Накопление большого числа частиц в слутке.

Из уравнения (38) видно, что с ростом амплитуды модуляции энергии электронного пучка U растет число накопленных частиц. Однако при $U/mv_0 > \Delta_{||}$, разница скоростей электронов и протонов становится больше $\Delta_{||}$ (поскольку фазовый размер пучка порядка $\pi/2$, $\delta v_{||} = \delta v_p + u \sin \varphi / m v_0 \gg \Delta_{||}$) и приближение линейной силы трения не справедливо.

В этом случае уравнение для равновесной функции распределения будет:

$$\dot{\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{q \omega_0 v_0 K}{m c^2} \left[F \left(\frac{c^2}{q \omega_0 v_0 K} + \frac{U \sin \varphi}{m v_0} \right) - \alpha \frac{\partial n_p}{\partial \varphi} \right] f \right\} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (39)$$

где: $\alpha = \frac{2\pi a^2 e^2}{R} \ln(b/a) \frac{q \omega_0 v_0 K}{m c^2}$, $D = \left(\frac{q \omega_0 v_0 K}{m c^2} \right)^2 8\pi e^4 L \frac{n_e}{v_0} \eta$.

Здесь мы пренебрегли внутренним рассеянием в протонном пучке поскольку как видно из предыдущего (см. (37), (38)) $n_{p \max} < n_{кр}$.

Аналогично (27) домножим (39) на $\dot{\varphi}$ и проинтегрируем в результате получаем

$$\frac{d}{d\varphi} (\dot{\varphi}^2 n_p) + \alpha n_p \frac{\partial n_p}{\partial \varphi} = \frac{q \omega_0 v_0 K}{m c^2} \int d\varphi f(\varphi, \psi) F \left(\frac{c^2 \dot{\varphi}}{q \omega_0 v_0 K} + \frac{U \sin \varphi}{m v_0} \right) \quad (40)$$

Точно решить полученное уравнение не представляется возможным, однако для оценки можно предположить, что функция распределения по импульсам не зависит от координаты, т.е. $f(\varphi, \psi) = n_p(\varphi) f(\psi)$.

Тогда уравнение (40) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{d\psi} (\bar{\psi}^2 n_p) + \alpha n_p \frac{dn_p}{d\psi} + I(\psi) n_p = 0, \quad (41)$$

здесь $I(\psi) = -\frac{q\omega_0 V_0 K}{mc^2} \int_0^\pi d\psi' f(\psi') F\left(\frac{c^2 \bar{\psi}}{q\omega_0 V_0 K} + \frac{u \sin \psi'}{m V_0}\right)$.

Интегрируя уравнение (41) получим

$$\bar{\psi}^2 \ln \frac{n_p}{n_{mp}} + \alpha n_p + \int_0^\psi I(\psi') d\psi'$$

Полученное трансцендентное уравнение не решается численно, но аналогично (36) легко получить отношение максимальной и минимальной плотностей

$$\bar{\psi}^2 \ln \frac{n_{max}}{n_{min}} + \alpha n_{max} \left(1 - \frac{n_{min}}{n_{max}}\right) - \int_0^\pi I(\psi) d\psi = 0 \quad (42)$$

При $n_{min} \ll n_{max}$ отсюда получаем

$$n_{max} = \frac{1}{\alpha} \left(\int_0^\pi I(\psi) d\psi - \bar{\psi}^2 \ln \frac{n_{max}}{n_{min}} \right) = -\frac{\bar{R}}{2\pi a^2 e^2 \ln b/a} \left\{ \int_0^\pi \int_0^\pi f(\psi') F\left(\frac{c^2 \bar{\psi}}{q\omega_0 V_0 K} + \frac{u \sin \psi'}{m V_0}\right) d\psi d\psi' - \frac{mc^2 \bar{\psi}^2}{q\omega_0 V_0 K} \ln \frac{n_{max}}{n_{min}} \right\} \quad (43)$$

Для оценки функции распределения по скоростям можно взять прямоугольной, поскольку вклад в интеграл хвостов функции распределения мал

$$f(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}\bar{\psi}^2} & , \quad \psi^2 < 3\bar{\psi}^2 \\ 0 & , \quad \psi^2 > 3\bar{\psi}^2 \end{cases} \quad (44)$$

Силу трения при $u/mV_0 \gg \Delta$, можно выбрать ступенчатой

$$F = -F_0 \text{sign } \delta v_0 \quad (45)$$

тогда после интегрирования получим оценку максимального числа частиц в накопителе

$$N_{max} = \frac{\pi^2 R^2}{2e^2 \ln b/a} \left[\int_0^\pi \int_{-\sqrt{3}\bar{\psi}}^{\sqrt{3}\bar{\psi}} \frac{F_0}{2\sqrt{3}\bar{\psi}^2} \text{sign} \left(\frac{c^2 \bar{\psi}}{q\omega_0 V_0 K} + \frac{u \sin \psi'}{m V_0} \right) d\psi d\psi' - \right.$$

$$- \frac{mc^2}{q\omega_0 V_0 K} \bar{\psi}^2 \ln \frac{n_{max}}{n_{min}} \left. \right] \approx \frac{\pi^2 R^2}{2e^2 \ln b/a} \left(F_0 - \frac{2q\omega_0 V_0 K \epsilon_p}{\pi c^2} \frac{\delta v_0^2}{V_0^2} \ln \frac{n_{max}}{n_{min}} \right)$$

Подставляя F_0 окончательно получим максимальное число частиц в накопителе

$$N_{max} = \frac{\pi^2 R^2}{2e^2 \ln b/a} \left(\frac{4\delta v_0^2 n_c m c^2 \gamma}{\alpha V_0 V_c} - \frac{2q\omega_0 V_0 K \epsilon_p}{\pi c^2} \frac{\delta v_0^2}{V_0^2} \ln \frac{n_{max}}{n_{min}} \right) \quad (46)$$

Для установки НАП-М отсюда получаем $N_{max} = 9,3 \cdot 10^8 (1 - 2,5 \cdot 10^{-7} \frac{\delta v_0^2}{V_0^2} \ln \frac{n_{max}}{n_{min}})$, для следующих параметров $\bar{R} = 7$ м, $\ln b/a = 4$, $n_c = 10^8$ см, $\epsilon_p = 65$ MeV. Поскольку разброс скоростей протонов должен измениться слабо $\sqrt{\delta v_0^2}/V_0 \approx 10^{-5} + 10^{-6}$, то вторым членом можно пренебречь и полное количество частиц будет порядка $9,3 \cdot 10^8$. Из (46) видно, что максимальное количество частиц не зависит от напряжения модуляции и определяется плотностью электронного пучка и его поперечной температурой.

3. ДОПУСКИ НА ОТКЛОНЕНИЯ ВЕДУЩЕГО ПОЛЯ НАКОПИТЕЛЯ, ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ И ЧАСТОТЫ МОДУЛЯЦИИ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

Аналогично (1) уравнения для малых отклонений будут:

$$\frac{d\psi}{dt} = q \left[\omega_0 K \frac{\delta E_p}{E_p} - \Delta\omega(t) - \alpha \frac{\Delta B(t)}{B} \omega_b \right], \quad (47)$$

$$\frac{d(\delta E_p)}{dt} = V_0 F \left(\frac{\delta E_p}{m V_0 \gamma} + \frac{u \sin \psi + \Delta e(t)}{m V_0 \gamma} \right)$$

здесь $\Delta\omega(t)$, $\Delta B(t)$, $\Delta e(t)$ - отклонения частоты, магнитного поля и энергии электронов от равновесных значений, B_0 - равновесное магнитное поле в накопителе.

Из системы уравнений (47) получим:

$$\dot{\psi} = \frac{q\omega_0 K V_0}{E_p} F(\delta v_{||}) - q \frac{d}{dt} \left(\Delta\omega(t) + \alpha \omega_b \frac{\Delta B(t)}{B_0} \right), \quad (48)$$

$$\text{где } \delta V_{II} = \frac{c^2}{q\omega_0 v_0 K} (\dot{\varphi} + q\Delta\omega(t) + q\alpha\omega_0 \frac{\Delta B(t)}{B}) + \frac{U \sin\varphi + \Delta e(t)}{m\beta\gamma}$$

Исследуем устойчивость движения частиц, когда $\Delta\omega, \Delta B, \Delta e$ меняются медленно (характерные времена изменения много больше времени затухания), тогда в (48) можно пренебречь их производными по времени. Если разница скоростей протона и электронного пучка мала, так что сила трения при движении линейна, то расстройка приводит к радиальному смещению протонного пучка. Это не приводит к неустойчивости, если протонный пучок не выходит из электронного. Неустойчивость наступает, когда δV_{II} велика и сила трения выходит на максимум. Для понимания механизма неустойчивости удобно рассмотреть, аналогично (8), модель со ступенчатой силой. Переходя в (48) к безразмерным переменным, получим:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\text{sign}\left(\frac{d\varphi}{dt} + T \sin\varphi + W\right), \quad (49)$$

где

$$W = \frac{q\omega_0 K \tilde{v}_0 \Delta e}{\varepsilon_e} + q\tilde{v}_0 (\Delta\omega + \alpha\omega_0 \frac{\Delta B}{B}), \quad (50)$$

а \tilde{v}_0, T — определяются (9). Анализ решения уравнения (50) удобно вести на фазовой плоскости. Покоящейся частице соответствуют $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$, тогда из (49) следует, что необходимое условие устойчивости

$$W < T \quad (51)$$

На рис. 3а приведен пример незатухающего решения уравнения (49). На участке АВ, согласно (14), частица не может выйти со склона сепаратрисы, в точке В траектория отрывается от сепаратрисы и возвращается на нее в точке D уже в следующем периоде синусоиды. Стрелками показано направление движения на фазовой плоскости.

При $T < 2/\sqrt{3} \approx 0,87, |W| < T$ решение не может выйти со склонов сепаратрисы, и любая траектория приходит в точку покоя, определяемую равенством

$$T \sin\varphi + W = 0 \quad (52)$$

При дальнейшем росте T возникает описанная выше неустойчивость, границу возникновения которой легко найти при $T \gg 1$. В этом случае максимум $\dot{\varphi}$ при движении, а также допустимая отстройка W много меньше T, и кривую $\dot{\varphi} = T \sin\varphi + W$ можно аппроксимировать ломаной (рис. 3б). Граница области устойчивости определяется равенством

$$\dot{\varphi}_D = 0 \quad (53)$$

Из уравнений движения следует:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_c^2 - \dot{\varphi}_B^2 &= 2(\varphi_c - \varphi_B), \\ \dot{\varphi}_D^2 - \dot{\varphi}_c^2 &= -2(\varphi_D - \varphi_c). \end{aligned} \quad (54)$$

С другой стороны на ломаной выполняются условия:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_B &= T \varphi_B + W, \\ \dot{\varphi}_c &= T(\pi - \varphi_c) + W, \\ \dot{\varphi}_D &= T(\varphi_D - 2\pi) + W. \end{aligned} \quad (55)$$

Точка отрыва φ_B определяется из условия равенства производных $d\dot{\varphi}/d\varphi$ на ломаной и траектории

$$T = \frac{1}{\dot{\varphi}_B} \quad (56)$$

Решим получившуюся систему из семи уравнений (53), (54), (55), (56) относительно T и W. В результате получим границу области устойчивости

$$W = \frac{1}{8T} + \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8T^2}}, \quad (57)$$

что при $T \gg 1$ дает $W \approx \sqrt{\pi/2} \approx 1,25$. В промежуточном случае, когда T не достаточно велико, граница области устойчивости рассчитывалась на ЭВМ. Результаты этих расчетов приведены на рис. 4.

Подставляя в (50) $w = \sqrt{\pi/2}$ получим оценку на максимальную отстройку частоты, магнитного поля и энергии электронов:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \alpha \frac{\Delta B}{B_0} + \kappa \frac{\Delta e}{E_e} < \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{q v_0 \omega_0} \quad (58)$$

Для установки НАП-М это дает следующую оценку:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \alpha \frac{\Delta B}{B_0} + \kappa \frac{\Delta e}{E_e} < 1,1 \cdot 10^{-5}$$

Проведенный анализ и предварительные эксперименты показывают возможность группировки пучка модуляцией энергии электронов на частоте обращения со временем группировки порядка 50 мсек. Требования стабильности поля и энергии электронов при этом порядка 10^{-5} являются очень жесткими, поэтому для создания устойчивой группировки пучка, повидимому, необходимо осуществлять обратную связь, чтобы расстройку одной величины можно было компенсировать расстройкой другой. Этот сложный вопрос требует дополнительного исследования.

Авторы благодарны В.В.Пархомчуку и Д.В.Пестрикову за плодотворные дискуссии.

Л и т е р а т у р а

1. Г.И.Будкер, А.Н.Скринский. УФН, 1978, т.124, с.561.
2. Я.С.Дербенев, А.Н.Скринский "Кинетика электронного охлаждения в накопителях тяжелых частиц" Институт ядерной физики, Новосибирск, препринт 255 (1968).
3. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев "Теория циклических ускорителей" М., Физматгиз, 1962.
4. Н.С.Диканский, В.И.Кононов, В.И.Куделайнен, И.Н.Мешков, В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков, А.Н.Скринский, Б.Н.Сухина. Труды XI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1978.
5. В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков. Препринт 77-37, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1977.

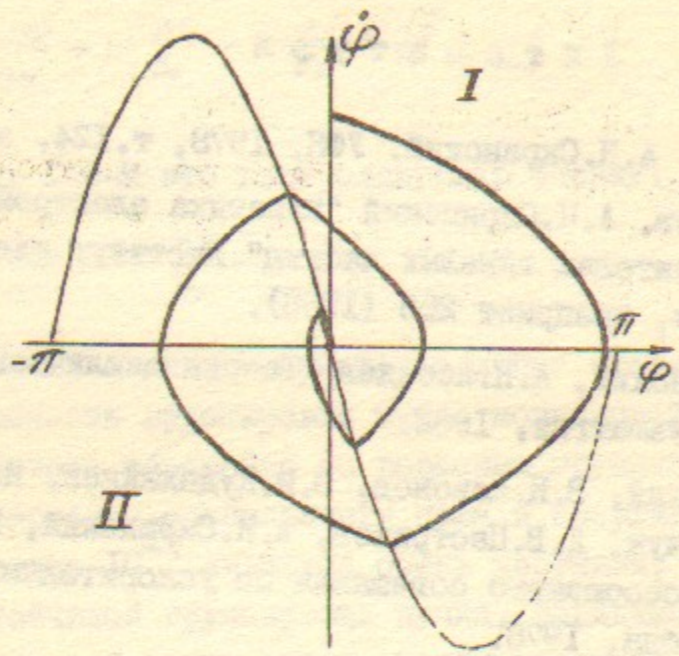


Рис. 1

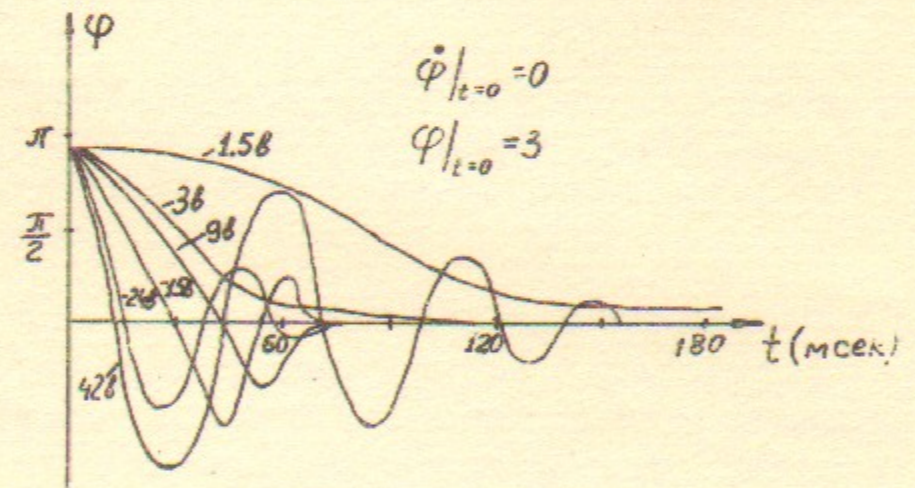


Рис. 2

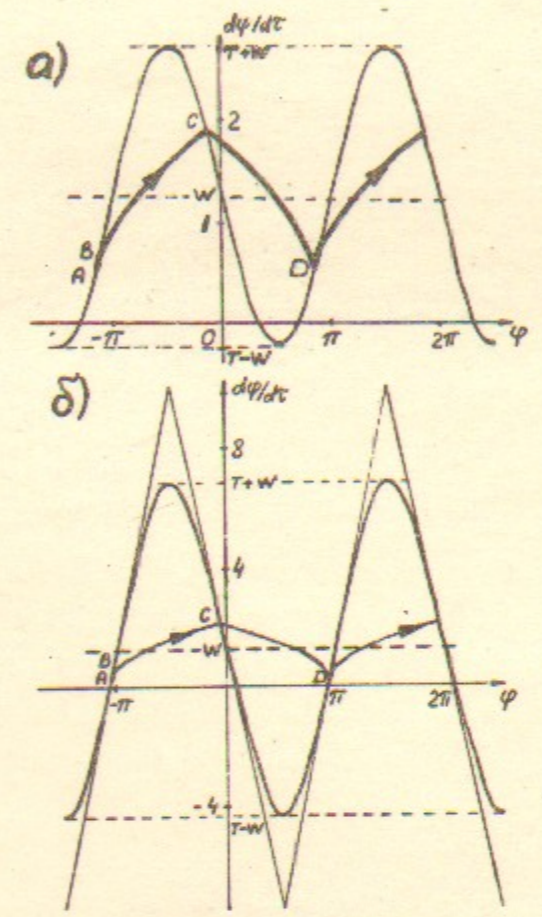


Рис. 3

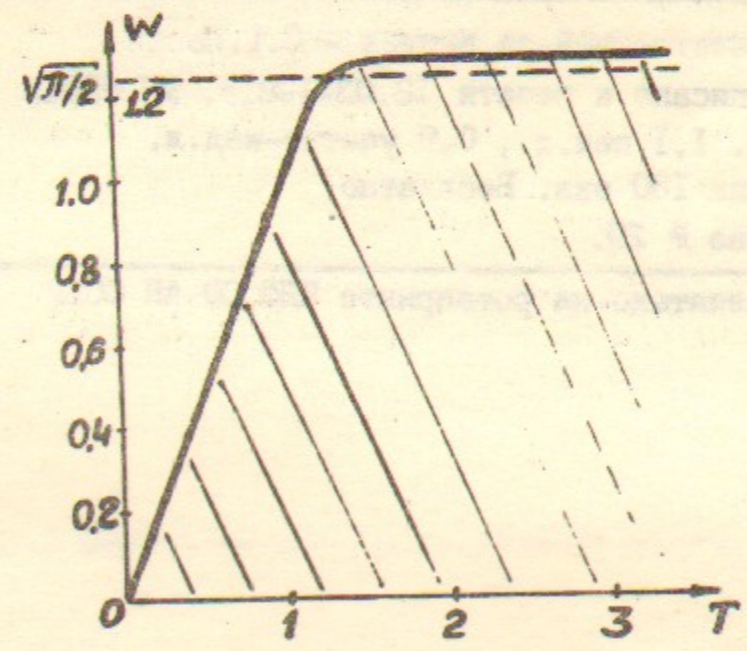


Рис. 4