

18

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР

И.Б.Вассерман, Ф.М.Израйлев

ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ МОДУЛЯЦИЙ  
НА ПОНИМАНИЕ ПОРОГА СТОХАСТИЧНОСТИ  
В ЭФФЕКТАХ ВСТРЕЧИ

ПРЕПРИНТ 81 - 25



Новосибирск

ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ МОДУЛЯЦИЙ НА ПониЖЕНИЕ  
ПороГА СТОХАСТИЧНОСТИ В ЭФФЕКТАХ ВСТРЕЧИ

И.Б.Вассерман, Ф.М.Израйлев

АННОТАЦИЯ

В работе исследуется влияние различных модуляций, имеющих место при взаимодействии встречных пучков в накопителе, на понижение критических значений токов в пучках. Рассматриваются стохастические эффекты, возникающие вследствие модуляции параметров в простых моделях "круглого" и "плоского" пучков. Проводится обсуждение результатов аналитического и численного анализа поведения такой модели в применении к реальным условиям на установках со встречными пучками.

Максимальная светимость установок со встречными пучками, как известно, ограничена эффектами электромагнитного взаимодействия пучков. Экспериментальное изучение этого вопроса оказывается недостаточным для полного понимания всех причин, приводящих к понижению светимости в конкретных установках. Это объясняется тем, что в эксперименте довольно трудно, а часто и вообще невозможно выделить тот или иной механизм и определить его роль в исследуемом явлении. С другой стороны, теоретическое рассмотрение связано со значительными трудностями, вызванными существенно нелинейным характером силы от встречного пучка. Поэтому в последнее время значительно возрос интерес к численному моделированию эффектов встречи на ЭВМ. Такой подход часто позволяет на сравнительно простых моделях выяснить характер и относительную роль исследуемых эффектов.

В работе /1/ было обнаружено, что модуляция бетатронного движения синхротронным из-за наличия энергетической дисперсионной функции в месте встречи приводит к значительному уменьшению величины предельного тока. Целью настоящей работы является сравнительное изучение других возможных типов модуляций, а также рассмотрение их совместного воздействия.

В первом параграфе описывается основная модель, приводятся некоторые аналитические оценки для "круглого" и "ленточного" пучков и обсуждаются результаты полученные в /1/. Во втором параграфе исследуется влияние модуляции набега бетатронной фазы между местами встречи. Исследованию модуляции, возникающей в результате зависимости  $\beta$ -функции от азимутальной координаты посвящен § 3. Наконец, в § 4 проводится сравнение действия различных типов модуляции и обсуждаются результаты по совместному их влиянию на порог возникновения стохастической неустойчивости.

#### 1. Описание модели

Рассмотрим поведение отдельной частицы, многократно взаимодействующей с неизменным встречным сгустком в часто используемом приближении (см., например, /1-2/). Встречный сгусток считается бесконечно коротким по продольной координате, при этом рассматривается движение только по одной поперечной координате, без учета

связи с другой. Радиационные эффекты (шум и затухание) также не учитываются, это означает, что будут рассмотрены только сильные эффекты, развивающиеся за времена, меньшие чем время затухания бетатронных колебаний. Несмотря на очевидные недостатки такой сильно упрощенной модели взаимодействия встречных пучков, ее изучение тем не менее имеет смысл, в особенности, в нашем случае, при сравнении действия различных типов модуляции. Более подробно этот вопрос будет обсуждаться в § 4. Если места встречи в накопителе располагаются через период магнитной системы, то движение отдельной частицы можно описать сравнительно простым отображением. Такое отображение связывает поперечные координату и импульс частицы в месте встречи, например, после взаимодействия со встречным пучком, со значениями координаты и импульса после предыдущего взаимодействия. В простейшем случае, когда нелинейными эффектами при движении частицы между местами встречи можно пренебречь, отображение будет состоять из линейного поворота на фазовой плоскости  $(x, p)$  и нелинейного толчка, обусловленного взаимодействием со встречным пучком. Если в местах встречи производная от  $\beta$ -функции по продольной координате  $s$  равна нулю ( $d\beta/ds = 0$ ) то отображение имеет вид:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \cos \mu + \beta_0 p_n \sin \mu + \beta_0 f(x_n) \sin \mu \\ p_{n+1} &= -\frac{x_n}{\beta_0} \sin \mu + p_n \cos \mu + f(x_n) \cos \mu \end{aligned} \quad (I.1)$$

Здесь  $x$  и  $p = \frac{dx}{ds}$  - поперечные координата и импульс,  $\beta_0$  - значение  $\beta$ -функции в местах встречи,  $\mu$  - набег бетатронной фазы между местами встречи ( $\mu = \frac{2\pi \nu}{m_0}$ , где  $\nu$  - бетатронная частота колебаний по  $x$ , а  $m_0$  - число мест встречи на кольце накопителя).

Величина  $f(x)$  в (I.1) пропорциональна относительному изменению импульса  $\Delta p$  и определяется распределением заряда  $\rho(x)$  в поперечном сечении. В дальнейшем для простоты будем называть  $f(x)$  просто силой. В работе /1/ рассмотрены два предельных случая распределения пространственного заряда. В одном из них предполагается, что пучок в поперечном направлении круглый с гауссовским распределением  $\rho(x) = \rho_0 \exp(-x^2/2\sigma^2)$ , где под  $x$  понимается расстояние от центра пучка. Поэтому, если

начальный импульс частицы направлен по этому направлению (радиусу), то движение останется одномерным и будет описываться отображением (I.1) с силой:

$$f_1(x) = -\frac{8\pi \xi}{\beta_0} \sigma^2 \frac{1 - \exp(-x^2/2\sigma^2)}{x}; \quad \xi_{x,z} = \frac{N_0 e \beta_{x,z} \sigma_{x,z}}{2\pi \gamma \sigma_x \sigma_z (\sigma_x + \sigma_z)} \quad (I.2)$$

где  $N_0$  - число частиц в пучке,  $r_e$  - классический радиус электрона,  $\gamma$  - релятивистский фактор,  $\sigma = \sigma_x = \sigma_z$  - средне-квадратичный размер пучка. Параметр  $\xi$  вводится обычным образом и характеризует величину взаимодействия.

Другой случай соответствует, наоборот, сильно вытянутому сечению пучка в одном поперечном направлении, например по радиусу накопителя. В предельном случае можно считать, такой пучок плоским и движение в поле такого пучка также будет одномерным. Тогда под  $x$  нужно понимать поперечную координату вдоль малого размера пучка. В реальных установках такому случаю в какой-то степени соответствует эллиптический в поперечном сечении пучок с большим соотношением между полуосями. Сила от такого "плоского" пучка с гауссовым распределением  $\rho(x)$  имеет вид ( $\sigma_x \gg \sigma_z$ )

$$f_2(x) = -\frac{4\pi \xi}{\beta_0} \int_0^x e^{-x^2/2\sigma^2} dx \quad (I.3)$$

Численное моделирование отображения (I.1) проводилось многими авторами (см., обзор /2/). Основным вопросом является определение критического значения  $\xi_c$  при котором возникает стохастическая неустойчивость, приводящая к значительному увеличению поперечной энергии. Механизмом такой неустойчивости, как известно, является взаимодействие нелинейных резонансов /3-6/. При этом соседние резонансы, обусловленные нелинейным возмущением, разрушаются и перекрываясь, образуют в фазовом пространстве стохастическую область, по которой частица может уходить на большие расстояния. Следует отметить, что понятие критического значения  $\xi_c$  является в известной степени условным. При численном моделировании под  $\xi_c$  часто понимается значение  $\xi$ , при котором частицы с наиболее типичными начальными данными  $(x_0, p_0)$  за рассматриваемое число отображений ( $N \sim 10^4 - 10^6$ ) достигают

больших значений  $x_m$  (см. например, /1/). В других случаях удобнее следить за относительным увеличением поперечной энергии частицы, как это делалось в /7/. Поэтому непосредственное сравнение таким образом полученных значений  $\xi_c$  с экспериментальными также условно. Основным результатом при таком подходе содержится не в абсолютных значениях  $\xi_c$ , а в зависимости  $\xi_c$  от различных параметров исследуемой модели. Как показывают данные, полученные на ВЭП-2М, даже такая простая модель, как отображение (I.1) правильно отражает некоторые экспериментальные зависимости.

Численное моделирование, проведенное в /1/ показало значительное уменьшение  $\xi_c$  при введении в (I.1) модуляции центра встречного пучка. Такая модуляция имеет место, когда энергетическая дисперсионная функция  $\Psi$  в месте встречи не равна нулю. При этом орбита частицы, энергия которой отличается от равновесной на величину  $\Delta E$  смещается от орбиты равновесной частицы на величину /8/:

$$\Delta x = \Psi R \cdot \frac{\Delta E}{E} \quad (I.4)$$

где  $R$  - средний радиус кольца накопителя. Таким образом, частица, имеющая отклонение энергии от равновесной в месте встречи проходит область пучка с меньшей плотностью и большей нелинейностью. Поэтому наличие синхротронных колебаний приводит к модуляции силы встречного пучка, действующей на пробную частицу. В рассматриваемой модели это приводит к тому, что в выражении для силы (I.2, I.3) значение  $x$  необходимо заменить:

$$x \Rightarrow x + A_s \cos(2\pi n \nu_s / m_0) \quad (I.5)$$

где  $A_s$  и  $\nu_s$  - амплитуда и частота синхротронных колебаний, а  $n$  - номер толчка, играющий роль времени. К такой модуляции (I.5) приводит также пересечение пучков в месте встречи под углами /9/.

Уменьшение  $\xi_c$  при модуляции (I.5) объясняется появлением дополнительных, синхробетатронных резонансов, которые облегчают перекрытие основных резонансов и тем самым понижают порог стохастичности. В работе /2/ получены некоторые аналитические

оценки условий перекрытия резонансов для (I.1) с силой (I.2). Оказалось, что критерий перекрытия сложным образом зависит от параметров модели: параметра  $\xi$ , поперечной энергии  $\alpha$ , бетатронной частоты  $\nu$  и номера резонанса  $n$ . Последний параметр, правда не является независимым и определяется значениями  $\xi$ ,  $\nu$  и  $\alpha$ . С учетом синхротронных колебаний аналитические оценки становятся еще более сложными и дают, в основном, качественные результаты. Наиболее важным и сравнительно несложным является анализ резонансной структуры возмущения, позволяющий получить некоторые выводы об относительной силе модуляции и ее зависимости от параметров (см., например /10/).

Запишем гамильтониан, соответствующий отображению (I.1) в переменных "действие - фаза" ( $\gamma = \sqrt{2J\beta_0} \cos \Psi$ ;  $\rho = \sqrt{\frac{2J}{\beta_0}} \sin \Psi$ , см /2/):

$$H = J\nu_0 + V(\gamma, \Psi, \theta) \delta_T(\theta)$$

Здесь  $\nu_0$  - невозмущенная бетатронная частота,  $\delta_T(\theta)$  - периодическая дельта-функция, зависящая от фазы  $\theta$ , введенной вместо азимутальной координаты  $s$ :  $\theta = 2\pi s/L$ , где  $L$  - период взаимодействия по  $s$ . Период внешнего возмущения  $V(\gamma, \Psi, \theta)$  задается значением  $\theta_0$ , которое равно  $\theta_0 = 2\pi/m_0$ . Возмущение  $V(\gamma, \Psi, \theta)$  определяется силой  $\xi(x)$  и для круглого пучка (I.2) имеет вид /2/:

$$V_1(\gamma, \Psi, \theta) = -\frac{4\pi\xi}{\beta_0} \epsilon^2 \int_0^1 \frac{1 - \exp(-u_s z)}{z} dz \quad (I.6)$$

Величина  $u_s$  при наличии модуляции типа (I.5) зависит также от фазы  $\theta$ , играющей роль безразмерного времени:

$$u_s = \frac{(x + A_s \cos \Psi_s)^2}{2\epsilon^2}; \quad \Psi_s = \nu_s \theta = \frac{2\pi n \nu_s}{m_0} \quad (I.7)$$

Аналогично, для ленточного пучка имеем:

$$V_2(\gamma, \Psi, \theta) = -\frac{4\pi\xi}{\beta_0} \epsilon^2 \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1 - \exp(-u_s z)}{z^{3/2}} dz \quad (I.8)$$

Из сравнения (I.6) и (I.8) видно, что несмотря на существенное различие в силе  $\{x\}$ , возмущения, обусловленные круглым и ленточным пучками сходны по своей резонансной структуре. Особенно это становится заметным, если перейти к резонансному гамильтониану, описывающему поведение системы вблизи отдельного резонанса. Для этого, как обычно, необходимо разложить возмущение в ряд Фурье по  $\psi$  и  $\theta$  и оставить наиболее существенные резонансные члены.

Для круглого пучка имеем  $/2/$ :

$$H_1^r = \gamma v_0 + \varepsilon \int_0^1 \frac{dz}{z} \left\{ 1 - e^{-(a+h)z} I_0(az) I_0^2(zz) I_0(hz) \right\} - \\ - 2\varepsilon \int_0^1 \frac{dz}{z} e^{-(a+h)z} \sum_{p,q,k,m,n=-\infty}^{\infty} I_n(az) I_p(zz) I_q(zz) I_m(hz) \cos \vartheta_{npqkm} \quad (I.9)$$

Аналогично можно получить и резонансный гамильтониан для ленточного пучка:

$$H_2^r = \gamma v_0 + \varepsilon \int_0^1 \frac{dz}{z^{3/2}} \left\{ 1 - e^{-(a+h)z} I_0(az) I_0^2(zz) I_0(hz) \right\} - \\ - \varepsilon \int_0^1 \frac{dz}{z^{3/2}} e^{-(a+h)z} \sum_{p,q,k,m,n=-\infty}^{\infty} I_n(az) I_p(zz) I_q(zz) I_m(hz) \cos \vartheta_{npqkm} \quad (I.10)$$

В (I.9-I.10) через  $I_k$  обозначена модифицированная функция Бесселя, а  $\vartheta_{npqkm}$  - новая невозмущенная фаза колебаний вблизи выделенного нелинейного резонанса. В гамильтониане (I.9-I.10) для удобства выделен член, независимый от фаз, который определяет нелинейный сдвиг  $\Delta v$  бетатронной частоты. Соответственно, в сумме отсутствует член, для которого все  $p, q, k, m, n$  равны нулю одновременно. Новый параметр возмущения  $\varepsilon$  связан с  $\xi$  соотношением  $\varepsilon = 2m_0 \xi^2 / \beta_0$ , а величины  $a$ ,  $r$  и  $h$  выражаются через амплитуды

бетатронных и синхротронных колебаний  $x_m$  и  $A_s$  по формулам:

$$a = \left( \frac{x_m}{2\varepsilon} \right)^2; \quad h = \left( \frac{A_s}{2\varepsilon} \right)^2; \quad z = \sqrt{ah} z = \frac{A_s x_m}{2\varepsilon^2} \quad (I.11)$$

Под  $\varepsilon$  вообще говоря, надо понимать полный среднеквадратичный размер пучка, складывающийся из бетатронного ( $\varepsilon_p$ ) и синхротронного ( $\varepsilon_s$ ) размеров:  $\varepsilon^2 = \varepsilon_p^2 + \varepsilon_s^2$ . Однако, поскольку обычно  $\varepsilon_s \ll \varepsilon_p$ , будем считать что  $\varepsilon \approx \varepsilon_p$ .

Связь резонансной фазы  $\vartheta_{npqkm}$  в (I.9-I.10) определяется соотношением:

$$\vartheta_{npqkm} = (2n+p+q)\psi - (p-q+2m)\varphi_s - km\theta \quad (I.12)$$

где производные по  $\theta$  равны:  $\varphi'_s = v_s$ ;  $\theta' = 1$ ;  $\psi' = v = v_0 + \Delta v$ . В последнем равенстве сдвиг  $\Delta v$  бетатронной частоты зависит от поперечной энергии  $2a$  и будет получен ниже. Из (I.12) легко получается резонансное условие:

$$v = v_0 + \Delta v(a) = \frac{m_0 k + (p-q+2m)v_s}{2n+p+q} \quad (I.13)$$

В отсутствии синхротронных колебаний  $p=q=m=0$ , поэтому расстояние между соседними резонансами  $n$  и  $n+1$  равно  $\Delta v_n = \frac{m_0}{2n(n+1)}$ . При учете синхротронного движения (в системе появляются синхробетатронные резонансы (см.(I.13)), которые мы будем для простоты называть боковыми, поскольку по частоте они располагаются вблизи (при малых  $v_s \ll 1$ ) основных резонансов с гармониками  $n$ . Отметим, что без модуляции, но при наличии постоянного смещения пучка ( $v_s = 0$ ;  $A_s \neq 0$ ) также возникают дополнительные резонансы, располагающиеся между основными. Ближайшему такому резонансу соответствует условие  $p+q = \pm 1$  а расстояние до него от основного резонанса  $n$  равно:  $(\Delta v)_s = \frac{m_0}{2n(2n+1)}$ , что при  $n \gg 1$  в два раза меньше расстояния между основными резонансами. Амплитуда этих дополнительных резонансов определяется (см.(I.9-I.10)) в основном значениями  $p=0, q=\pm 1$ , и  $p=\pm 1, q=0$  и зависит

от величины  $\xi$ . При достаточно большом постоянном смещении, когда  $\xi \gg 1$  эти резонансы становятся сравнимыми с основными ( $p=q=0$ ) и критическое значение  $\xi_c$  уменьшится примерно в два раза.

Поскольку  $\xi_c$  определяется критерием перекрытия резонансов, которое обратно пропорционально расстоянию между резонансами (по частоте), ясно, что наличие боковых резонансов может существенно понизить значение  $\xi_c$ . Действительно, при  $v_s \ll 1$  расстояние до ближайшего бокового резонанса, как это следует из (I.13) равно  $(\Delta v)_{ns} \approx v_s/n \ll v$ . Мощность боковых резонансов определяется значениями  $p, q, m$  и резко падает с их ростом при  $A_s \ll \xi$ . Однако, поскольку расстояние между ними очень мало, они могут перекрываться при значениях  $\xi$ , меньших, чем это необходимо для перекрытия основных резонансов. При этом возникает медленная диффузия обусловленная перекрытием этих боковых резонансов. Если же полная область перекрытия по частоте  $v$  оказывается порядка расстояния между основными резонансами, то это приводит к диффузии по основным резонансам, а следовательно к значительному увеличению поперечной энергии. Именно таким механизмом объясняется значительное уменьшение  $\xi_c$  в /1/ при введении в модель модуляции (I.7).

Из гамильтониана (I.9-I.10) нетрудно получить нелинейный сдвиг частоты  $\Delta v(a)$ . Поскольку  $A_s \ll \xi$ , а, значит,  $h \ll 2 \ll i$ , то при  $h \ll a$  сдвиг  $\Delta v(a)$  практически такой же, как и в отсутствие модуляции:

$$\Delta v_1(a) = \frac{m_0 \xi}{a} \{1 - e^{-a} I_0(a)\} \quad (I.14)$$

$$\Delta v_2(a) = \frac{m_0 \xi}{2a} \{1 - e^{-a} I_0(a)\} + \frac{m_0 \xi}{4\sqrt{a}} \int_0^a \frac{dz}{z^{3/2}} \{1 - e^{-z} I_0(z)\}$$

Из (I.14) при  $a \ll 1$  получается обычный линейный сдвиг:  $\Delta v \approx m_0 \xi$ , а с увеличением поперечной энергии (при  $a \gg 1$ )  $\Delta v$  стремится к нулю:

$$\Delta v_1 \approx \frac{m_0 \xi}{a}; \quad \Delta v_2 \approx \frac{2m_0 \xi}{\sqrt{2\pi a}} \quad (I.15)$$

Зависимость частоты от энергии является одной из главных характеристик нелинейного движения и от нее существенно зависит условие перекрытия резонансов (см. /3-6/). Из оценок (I.14-I.15) следует, что на одном и том же расстоянии от центра фазовой плоскости  $(x, p)$  для круглого пучка располагаются резонансы более высоких гармоник  $n$  чем для ленточного. И, наоборот, один и тот же резонанс с номером  $n$  располагается для круглого пучка гораздо ближе к центру, чем для ленточного. Для дальнейшего сравнения запишем оценки для ширины нелинейного резонанса /3-6/:

$$(\Delta J)_r = 4\sqrt{\frac{\xi v_n}{2v/v_s}}; \quad (\Delta v)_r = 4\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial J}\right) \xi v_n} \quad (I.16)$$

Здесь  $(\Delta J)_r$  определяет область, занимаемую резонансом по действию  $J$  (а, значит, и по энергии  $a$ ), а  $(\Delta v)_r$  - ширину резонанса по частоте  $v$ . Через  $\xi v_n$  обозначено возмущение, взятое при резонансном значении  $J_r$ , которое, в свою очередь определяется резонансным условием (I.13). Из выражений (I.9-I.10) следует, ( $A_s \ll \xi$ ) что:

$$(\xi v_n)_1 \approx 2\xi \int_0^{a_1} \frac{dz}{z} e^{-z} I_{n_1}(z) = 2\xi F_1(n_1, a_1) \quad (I.17)$$

$$(\xi v_n)_2 \approx \xi \sqrt{a_2} \int_0^{a_2} \frac{dz}{z^{3/2}} e^{-z} I_{n_2}(z) = \xi \sqrt{a_2} F_2(n_2, a_2)$$

При  $a \gg 1$  интегралы в (I.17) зависят от  $a$  только через  $n_1, n_2$ .

Критерием перекрытия резонансов является условие, при котором ширина резонанса по частоте  $(\Delta v)_r$  становится сравнимой с расстоянием между ближайшими резонансами. В отсутствие

модуляции, как уже отмечалось, оно равно  $(\Delta V)_n \approx \frac{m_0}{2n^2}$ . Численные результаты /I/ показали, что  $\xi_c$  в этом случае для круглого и ленточного пучков отличается слабо. Тем не менее, из оценок (I.16-I.17) можно получить, что модуляция, вообще говоря, должна сильнее влиять на ленточный пучок чем на круглый. Это связано с разной зависимостью  $(\Delta V)_c$  от  $a$  при постоянном возмущении  $F_1$  и  $F_2$  вблизи рассматриваемого основного резонанса  $n$ . Действительно, как показало численное моделирование /I/, при одних и тех же условиях величина для ленточного пучка при модуляции (I.5) меньше, чем для круглого. Из этого, в частности, можно сделать заключение, что, пучок с биггауссовым распределением по обеим поперечным координатам  $x$  и  $z$  ( $\rho = \rho_0 \exp(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2})$ ) будет менее устойчив при наличии модуляции, чем круглый пучок. Причем, поскольку выражения для сил  $f_x$  и  $f_z$  действующих со стороны такого пучка зависят от соотношения  $\sigma_x/\sigma_z$  и имеют своими пределами выражения (I.2-I.3) для круглого и ленточного пучка (см. /II/), можно также предположить, что неустойчивость будет более сильной в направлении, перпендикулярном большему размеру пучка. Последний вывод согласуется с предварительными данными по исследованию влияния различных модуляций и шума в модели с эллиптическим пучком (с учетом связи поперечных колебаний по  $x$  и  $z$ ) /I2/.

## 2. Модуляция бетатронной фазы

Наличие синхротронных колебаний в установках со встречными пучками приводит к слабой модуляции набега бетатронной фазы  $\Delta\mu$  между местами встречи, /7/. Такая модуляция появляется вследствие зависимости периода обращения от энергии частицы. Азимутальное отклонение частицы с импульсом  $p_{||} + \Delta p_{||}$  от равновесной за время  $t$  составляет /8/:

$$\Delta\theta = \int_{t_0}^{t_0+t} h \Omega_0 \frac{\Delta p_{||}}{p_{||}} dt; \quad h = \frac{p_{||}}{\Omega_0} \frac{d\Omega_0}{dp_{||}} \quad (2.1)$$

где  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  - циклическая частота обращения. Учитывая слабую зависимость  $\Delta p_{||}$  и  $\Omega_0$  от времени, в релятивистском случае получим:

$$\Delta\mu = \mu(t) - \mu_0 = \frac{R \cdot \Delta\theta}{\beta_0} \approx -\alpha \frac{\Delta p_{||}}{p_{||}} \frac{\gamma_0}{m_0} \frac{R}{\beta_0} = \Delta\mu_0 \sin(\nu_s \Omega_0 t + \delta) \quad (2.2)$$

Здесь  $\alpha$  - коэффициент пространственного утолщения орбиты,

$$\Delta p_{||}/p_{||} = (\Delta p_{||}/p_{||}) \cdot \sin(\Omega_0 \nu t + \delta).$$

Аналогичная модуляция имеет место при наличии хроматизма в кольце, когда  $\partial \nu_{x,z} / (\partial p/p) \neq 0$ :

$$\Delta\mu_{x,z} = \frac{2\gamma^2}{m_0} \cdot \frac{\partial \nu_{x,z}}{(\partial p/p)} \cdot \left\{ \frac{\Delta p_0}{p_0} \sin(\Omega_0 \nu_s t + \delta) \right\} \quad (2.3)$$

Как и предыдущий вид модуляции, он возникает при изменении энергии частицы между местами встречи. Однако, поскольку обычно хроматизм бывает скомпенсирован с помощью секступолей, этот вид модуляции практически не работает.

Аналогичная модуляция возникает при наличии пульсаций магнитного поля в элементах накопителя. В этом случае набег бетатронной фазы между местами встречи также зависит от времени. Следует упомянуть также об одном частном случае модуляции бетатронной фазы за счет неточной выставки элементов кольца по азимуту. При этом  $\mu$  меняется скачкообразно; например, для двух мест встречи, изменение  $\mu$  будет равно:

$$\mu_1 = \mu_0 + \Delta\mu_0; \quad \mu_2 = \mu_0 - \Delta\mu_0; \quad \Delta\mu_0 \approx \frac{\Delta S}{\beta} \quad (2.4)$$

где  $\Delta S$  - геометрический сдвиг центра противоположного промежутка от места встречи, индексы 1 и 2 относятся соответственно к 1-ому и 2-му месту встречи. Такой вид модуляции получается из (2.3) при  $\nu_s = 1$ . Поскольку обычно  $\beta_z \ll \beta_x$  то модуляции (2.2) и (2.4) должны сильнее сказываться на  $z$ -движении. Для численного исследования влияния модуляции бетатронной фазы в модели ленточного и круглого пучков (I.2-I.3) в матрице преобразования (I.1) величина  $\mu$  считалась зависящей от номера



толчка  $\eta$  по соотношению:

$$\mu = \mu_0 + \Delta\mu = \mu_0 + B \cos\left(\frac{2\pi \gamma_s n}{m_0} + \delta\right); \quad \mu_0 = \frac{2\pi \gamma_0}{m_0} \quad (2.5)$$

В качестве  $\xi_c$ , так же как и в /7/ принималось такое значение  $\xi$ , при котором величина  $W$ , пропорциональная максимальной амплитуде поперечного движения:

$$W = \sqrt{X^2 + P_x^2}; \quad X = x/\epsilon; \quad P_x = p\beta_0/\epsilon \quad (2.6)$$

увеличивалась на  $\Delta W = 2$ . Полное время (число отображений) каждой пробной частицы составляло  $t_m = 10^5$ , при этом значение  $W$  усреднялось за каждый промежуток времени  $\Delta t = 1000$ . Таким путем определялась зависимость  $W$  от времени, которая характеризовала либо устойчивое движение ( $W \approx \text{const}$ ), либо стохастическую неустойчивость (нерегулярный рост  $W$  со временем). В качестве пробных частиц выбирались частицы с начальным нулевым импульсом ( $P_0 = 0$ ) и начальным смещением  $X_0 \approx 2; 4; 6$ . Несмотря на условность определения  $\xi_c$ , такой подход дает возможность исследовать условия возникновения сильной стохастичности в зависимости от различных параметров системы. (См. например, /1/). Результаты приведены на рис.1, где отражена полученная зависимость  $\xi_c$  от амплитуды модуляции  $B$  при постоянной частоте  $\gamma_s \approx 0.008$ . (Такое значение  $\gamma_s$  близко к реальному для установки ВЭПМ-2М). Для существующих накопителей величина  $B$  обычно мала. Тем не менее, даже для малых величин эта модуляция оказывает заметное влияние на величину  $\xi_c$ . Сравнение кривых 1 и 2 показывает, что  $\xi_c$  с увеличением значения  $B$  становится для ленточного пучка даже меньше, чем для круглого, хотя при  $B=0$  величина  $\xi_c$  для ленточного пучка примерно в 1,5 раза больше (см. /1/).

Рассмотрим резонансную структуру возмущения при таком типе модуляции. Для этого запишем резонансный гамильтониан, описывающий колебания вблизи одного из боковых резонансов. Поскольку потенциал возмущения  $V(\mathcal{J}, \psi)$  в этом случае не зависит от  $\theta$ , а модулируется фактически период  $\delta$ -функции,

(см. (I.6)) выражение для  $H^r$  гораздо проще, чем для модуляции (I.7) /2/:

$$H_1^r = \gamma \nu_0 + \epsilon \int_0^1 \frac{d\nu}{\nu} \{1 - e^{-a\nu} I_0(a\nu)\} - 2\epsilon \int_0^1 \frac{d\nu}{\nu} e^{-a\nu} I_n(a\nu) J_m(b_k) \cos \vartheta_{nkm} \quad (2.6)$$

$$H_2^r = \gamma \nu_0 + \epsilon \int_0^1 \frac{d\nu}{\nu^{3/2}} \{1 - e^{-a\nu} I_0(a\nu)\} - 2\epsilon \int_0^1 \frac{d\nu}{\nu^{3/2}} e^{-a\nu} I_n(a\nu) J_m(b_k) \cos \vartheta_{nkm}$$

Здесь  $J_m(b_k)$  - обычная функция Бесселя  $m$ -го порядка с аргументом  $b_k = \frac{b m_0 k}{\mu_0 \gamma_s}$ , а  $\vartheta_{nkm}$  - новая фаза:

$$\vartheta_{nkm} = 2n\psi - k\theta + m\psi_s. \quad \text{Резонансное условие имеет вид:}$$

$$\nu = \nu_0 + \Delta\nu(a) = \frac{km_0 + m\gamma_s}{2n} \quad (2.7)$$

Сравнение (2.7) с (I.13) показывает, что спектр резонансных частот при модуляции  $\mu$  (2.5) значительно проще, чем в случае модуляции  $x$  (I.7). Из (2.7) также следует, что для модуляции фазы расстояние между боковыми резонансами  $(\Delta\nu)_{ns} = \gamma_s/2n$  вдвое меньше чем для (I.7). Однако наиболее существенное отличие рассматриваемого типа модуляции от предыдущего состоит в следующем. Из (2.6) видно, что амплитуда резонансного возмущения для фиксированного значения  $n$  при  $b_k \gg 1$  меняется слабо с увеличением  $m$  вплоть до  $m = m^* \approx b_k$ . Поэтому для всех боковых резонансов, которые отстоят от основного резонанса не больше, чем на  $m^* \gamma_s$  условие их перекрытия не зависит от  $m$ . Поскольку расстояние между этими резонансами очень мало, критическое значение  $\xi_c$  может быть гораздо ниже, чем значение  $\xi$ , необходимое для перекрытия основных резонансов  $n$  и  $n+1$  и определяется величиной  $J_m(b_k)$ . Оценка полной ширины перекрывающихся резонансов зависит от значения  $m^*$ , которое примерно равно:

$$m^* \approx \frac{B m_0 k}{\mu_0 v_s} = \frac{B n m_0}{\gamma v_s} \quad (2.8)$$

В оценке (2.8) использовалось соотношение  $m_0 k = 2v_0 n$  (см. (2.7)). Зная максимальный номер бокового резонанса  $m^*$  можно найти полную ширину (по частоте), занятую всеми боковыми резонансами:

$$(\Delta\nu)_{m^*} \approx 2m^* \cdot \frac{v_s}{2n} = \frac{B m_0}{\gamma} \quad (2.9)$$

Из (2.9) видно, что  $(\Delta\nu)_{m^*}$  определяется только глубиной модуляции  $B$  и не зависит от синхротронной частоты  $v_s$ .

В результате такого перекрытия возникает стохастическая область со слабой диффузией. Если же ширина  $(\Delta\nu)_{m^*}$  становится сравнимой с расстоянием между основными резонансами, это ведет к более сильной диффузии по основным резонансам системы. Оценка критического значения  $B_c$ , при котором возникает такой эффект дает:

$$B_c \approx \frac{(\Delta\nu)_{m^*}}{\Delta\nu_n} \approx \frac{\gamma}{2n(n+1)} \quad (2.10)$$

При  $B > B_c$  боковые резонансы перекрывают весь интервал между основными резонансами  $n$  и  $n+1$  и в этом случае величина  $\xi_c$  должна значительно уменьшиться.

Сравним полученную оценку (2.10) с результатами численного моделирования. Для простоты выберем случай круглого пучка. Тогда значения  $n$  в (2.10) определяется соотношением (1.14) для  $\Delta\nu_1(a)$ :

$$\frac{m_0 k}{2n} = v_0 + \frac{m_0 \xi}{a} \{1 - e^{-a} I_0(a)\} \quad (2.11)$$

где  $a = \left(\frac{x_m}{2\sigma}\right)^2$ . Пусть нас, например, интересует перекрытие дополнительных резонансов в области смещений  $x \approx 5\sigma$ , т.е. для  $a \approx 6.25$ . В нашем случае ( $v_0 \approx 3.08$ ,  $m_0 = 2$ ) при  $\xi = 0.07$  это дает:  $n = 11$ . Соответственно значение  $B_c$  по (2.10) оказывается равным  $B_c \approx 0.014$  (ср. рис.1). Для

$\xi \approx 0.1$  имеем  $n = 9$ , т.е. при  $B \approx 0.01$  число  $m^*$  равно:  $m^* = 7$ , в то время как на половине интервала между резонансами  $n = 9$  и  $n = 10$  укладывается  $N_m = \frac{1}{v_s(n+1)} \approx 12$  боковых резонансов. Другими словами, полного эффективного перекрытия всего интервала не происходит. Это соответствует некоторому подъему  $\xi_c$  на рис.1 при  $B \approx 0.01$ . Из (2.8-2.10) также следует, что полное перекрытие возникает сначала при больших смещениях  $x$ , а затем при увеличении  $B$  (или  $\xi$ ) распространяется в область меньших  $x$ .

Таким образом, сравнение показывает, что довольно грубые оценки (2.8-2.10) дают не только правильное качественное понимание эффекта перекрытия боковых (синхротронных резонансов) но и согласуются с численными данными.

Следует особо отметить, что если даже не происходит полного перекрытия основных резонансов и образуется лишь некоторый слой, в котором стохастичность дает лишь ограниченное изменение энергии по координате  $x$ , если ввести связь с движением по другой координате  $z$ , то появляется возможность неограниченной диффузии по  $z$ . Это связано с тем, что тогда возникает диффузия вдоль образовавшегося стохастического слоя (см. подробнее, например /7,13,14/). Хотя такая диффузия и значительно более слабая, чем рассмотренная выше диффузия поперек слоя (по  $x$ ), тем не менее, она может оказаться существенной при значениях  $\xi$  ниже порога возникновения сильной стохастичности.

Численные данные показывают, что несмотря на относительно малые значения амплитуды модуляции  $B$ , критическое значение  $\xi_c$  значительно падает. Модуляция, возникающая из-за различия в набеге бетатронной фазы в разных промежутках между местами встречи, обусловленная нетождественностью промежутков, (см.2.4) также приводит к серьезному уменьшению  $\xi_c$  (рис.2). Это может накладывать довольно жесткие требования на азимутальную выставку элементов кольца, например, для работы на резонансе связи с равными и малыми  $\beta$ -функциями в месте встречи. В этом случае движение близко к одномерному /7/ и результаты предыдущего рассмотрения являются справедливыми.

означает, что в первом приближении имеются всего два боковых резонанса по обе стороны от  $\nu_n$  и условие резонанса примет вид: (ср. с (I.13) и (2.7)):

$$\nu = \frac{m_0 k \pm 2\nu_s^*}{2n} \quad (3.4)$$

Амплитуда такого резонансного возмущения  $\varepsilon \nu_n$  будет пропорциональна  $A_0/4$ .

На первый взгляд такой тип модуляции не является опасным из-за малого числа боковых резонансов. Однако если учесть следующее приближение (по  $\varepsilon$ , см. (I.6)), то картина резко меняется. Действительно, уравнение для бетатронной фазы имеет вид:  $\dot{\psi} = \nu = \nu_0 + \Delta\nu(\alpha)$  (в первом приближении для  $n \gg 1$  и вдали от целого резонанса, см. подробнее /2/). Поскольку теперь величина  $\xi$  в  $\Delta\nu$  модулирована, это фактически означает модуляцию бетатронной фазы:

$$\dot{\psi} \approx \nu_0 + (\Delta\nu)_0 \left\{ \frac{A_0}{4} \cos \nu_s^* \theta + 1 \right\} \quad (3.6)$$

где  $(\Delta\nu)_0$  определяется (I.14) с  $\xi = \xi_0$ . Поэтому фактически мы приходим к модуляции, исследованной в предыдущем параграфе. Соотношение (3.6) можно записать в виде, аналогичном (2.5):

$$\mu \approx \mu_0 + \Delta\mu_0 \left\{ \frac{A_0}{4} \cos \nu_s^* \theta + 1 \right\} \quad (3.7)$$

$$\mu_0 = \frac{2\pi\nu_0}{m_0}; \quad \Delta\mu_0 = \frac{2\pi(\Delta\nu)_0}{m_0}$$

Таким образом, параметр  $A_0$  можно выразить через  $B$  и оценить критическое значение  $A_c$ , при котором боковые резонансы перекрывают весь интервал частот между основными резонансами  $n$  и  $n+1$ :

$$A_c \approx \frac{1}{2} B_c \cdot \frac{4}{(\Delta\mu)_0} = \frac{m_0^2}{4n(n+1)(\Delta\nu)_0} \quad (3.8)$$

### 3. Модуляция амплитуды внешнего возмущения

К такой модуляции, в частности, приводит зависимость  $\beta$ -функции от азимута в промежутке, где происходит взаимодействие встречных пучков. Такая зависимость задается формулой:

$$\beta = \beta_0 + \frac{\ell^2}{\beta_0} \quad (3.1)$$

где  $\beta_0$  - минимальное значение  $\beta$ -функции в центре промежутка,  $\ell$  - азимутальное отклонение. Для жесткофокусирующей установки с малой  $\beta$ -функцией в месте встречи величина  $\beta$ -функции в области взаимодействия может существенно отличаться от  $\beta_0$ .

Наличие синхротронных колебаний приводит к тому, что для частицы, фаза которой отличается от равновесной, вследствие модуляции места встречи, величина  $\xi$ , зависящая от  $\beta$  (см. (I.2)), также изменяется:

$$\xi = \xi_0 \left( 1 + \frac{\ell^2}{\beta_0^2} \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

Формула (3.2) справедлива при условии, что  $\beta$ -функция по второму направлению много больше.

Так как для круглого пучка  $\xi_{x,z} \sim \beta_{x,z}/\sigma^2$  а  $\sigma \sim \sqrt{\beta}$  то нетрудно видеть, что при условии  $\beta_x = \beta_z$  зависимость от продольной координаты исчезает, а следовательно, отсутствует и модуляция (3.2). Поэтому для численного моделирования использовалась модель ленточного пучка (I.3), в которой параметр  $\xi$  менялся согласно соотношению:

$$\xi = \xi_0 \left\{ 1 + A_0 \cos^2 \left( \frac{2\pi\nu_s n}{m_0} + \delta \right) \right\}^{1/2} \quad (3.3)$$

где  $A_0 = \left( \frac{s_0}{\beta_0} \right)^2$ ;  $s_0$  - амплитуда колебаний частицы с неравновесной энергией по азимуту в месте встречи.

Результаты численного моделирования (рис.3) показывают существенную зависимость  $\xi_c$  от амплитуды модуляции  $A_0$ . Учет модуляции (3.3) приводит к появлению боковых резонансов вблизи выделенного резонанса с номером  $n$ . Если  $A_0 \ll 1$  то можно считать, что  $\xi \approx \xi_0 \left( 1 + \frac{A_0}{4} \cos \nu_s^* \theta \right)$ ;  $\nu_s^* = 2\nu_s$ . Это

В соотношении (3.8) использована оценка (2.10) с учетом того, что расстояние между боковыми резонансами теперь в два раза больше, чем в рассмотренном в § 2 случае. Сравним полученную оценку (3.8) с численными данными (рис.3). Для этого, так же, как и в § 2 рассмотрим условие перекрытия основных резонансов в области смещений  $\chi_m \approx 4$  ( $q \approx 6.25$ ). Из выражения для сдвига частоты  $(\Delta\nu)_2$  (ленточный пучок) можно численно найти:  $(\Delta\nu)_2 \approx m_0 \xi \cdot 0.32$ . Значение  $n$ , как обычно, находится из резонансного условия (2.7). Для значений  $\xi_c, A_0$ , взятых из рис.3 отношение  $A_c$ , полученное по (3.8) к  $A_0$  дает:  $A_c/A_0 \approx 0.75 + 2.7$ . Полученный результат служит указанием на то, что критерий (3.8) дает завышенное значение для  $A_c$ , что вполне возможно, поскольку зависимость (3.7) не вполне соответствует (3.3), особенно при не очень малых значениях  $A_0$ . Другими словами, в оценке (3.8) не полностью учтены все боковые резонансы. Тем не менее соотношение (3.8) дает правильный порядок для  $A_c$ .

Аналогичная модуляция возникает при пересечении пучков в месте встречи под углами. Такая ситуация всегда имеет место при взаимодействии пучков одного знака, а также для пучков с противоположными знаками, если они накапливаются в разных кольцах. Экспериментальные результаты полученные на установках DORIS и DCI показывают, что по всей видимости, такая модуляция дает значительный вклад в понижение  $\xi_c$ . (см. например /15-16/). Подробное аналитическое и численное исследование эффектов, возникающих при модуляции  $\xi$  из-за пересечения пучков под углами проведено в работе /9/.

#### 4. Совместное действие различных модуляций

Представляет интерес рассмотреть результат одновременного действия нескольких модуляций, поскольку в реальном эксперименте имеет место именно такая ситуация. Результаты численного моделирования с двумя модуляциями (2.5) и (3.3) приведены на рис.4 (кривая I). Видно, что на начальном участке ( $B \leq 0.003$ ) величина  $\xi_c$  определяется, в основном, модуляцией параметра  $\xi$  (3.3). Действительно, для выбранного значения амплитуды

этой модуляции ( $A_0 \approx 0.1$ ) значение  $\xi_c \approx 0.17$ , как это следует из рис.3. При значениях  $B \geq 0.01$ , кривая I совпадает с кривой 4, полученной при  $A_0 = 0$ . Это свидетельствует о том, что эти два вида модуляции действуют отдельно в том смысле, что  $\xi_c$  определяется той модуляцией, которая сильнее. И только в малой промежуточной области значений  $0.003 \leq B \leq 0.01$  имеется некоторый совместный эффект. Примерно то же самое происходит и для несколько большего значения  $A_0 \approx 0.25$  (ср. кривые 3 и 4).

Полученный результат качественно можно объяснить, исходя из анализа обоих типов модуляции (§ 2-3). Как было показано, обе модуляции сходны и основным механизмом является перекрытие дополнительных резонансов, возникающих из-за модуляции фазы. При этом резонансная структура возмущения примерно одна и та же, и происходит простое сложение амплитуд резонансных гармоник.

Для количественного сравнения с аналитическими оценками, полученными в § 2-3, используем соотношение между  $A_c$  и  $B$  (3.8). Для  $\chi_m \approx 5$  из (1.14) имеем  $(\Delta\nu)_2 = m_0 \xi \cdot 0.32$ . Поэтому для значения  $A_0 = 0.1$ ,  $\xi = 0.17$  (кривая I) получим  $B \approx 0.004$ , а для  $A_0 = 0.25$ ,  $\xi \approx 0.11$  (кривая 3) значение  $B$  равно  $B \approx 0.006$ . Видно, что найденные значения  $B$  хорошо соответствуют промежуточной области, в которой обе модуляции дают сравнимый эффект.

На рис.4 (кривая 2) представлен также результат совместного действия модуляции смещения  $\chi$  (1.7) и модуляции бетатронной фазы (2.5). Из рисунка следует, что совместное действие этих модуляций приводит к значительному уменьшению  $\xi_c$  по сравнению с действием одной модуляции (2.5).

Для примера рассмотрим точку, соответствующую  $B = 0.01$ . Модуляция типа (1.7) по данным /1/ уменьшает  $\xi_c$  при  $B = 0$ ,  $A_c = 0.46$  от  $\xi_c = 0.2$  до  $\xi_c = 0.1$ , т.е. в два раза. Модуляция (2.5) при  $B = 0.005$  уменьшает  $\xi_c$  при  $A_c = 0$  от 0.28 до 0.19, т.е. примерно в 1.5 раза. Совместное же действие этих модуляций уменьшает  $\xi_c$  до уровня  $\xi_c \approx 0.05$ , т.е. примерно в 6 раз. При изменении величины  $B$  это соотношение также меняется. Таким образом, по сравнению с рассмотренным выше случаем эти два типа модуляции понижают порог сто-

частичности независимо. Такой эффект становится понятным, если вспомнить различие в резонансной структуре возмущения (см. § I-2). Как было получено, модуляция фазы приведет к появлению боковых резонансов около каждого резонанса с номером  $n$  (см. (2.7)). Однако при наличии модуляции  $\chi$  каждый из этих дополнительных резонансов в свою очередь расщепляется согласно (I.9-I.10). Это, естественно, резко облегчает перекрытие всех дополнительных резонансов.

#### 4. Заключительные замечания

Как показывают эксперименты, проведенные на установке ВЭПП-2М, даже такая простая одномерная модель, в которой рассматривается движение только по одной поперечной координате, без учета связи с другой, дает хорошее согласие с экспериментальными данными в том случае, когда определяющим является движение по той же координате, по которой пучок имеет больший фазовый объем. Под определяющим направлением понимается такое направление, по которому раньше достигается порог стохастичности ( $\xi_x^c$  или  $\xi_z^c$ , где  $x$  и  $z$  - радиальная и вертикальная координата). При этом время жизни пучка обусловлено уходом частиц на большие амплитуды именно по этому направлению. Специальные измерения показывают, что на накопителе ВЭПП-2М определяющим направлением, как правило, является радиальное. По-видимому, это связано с наличием большой дисперсионной  $\Psi_x$ -функции, приводящей к модуляции движения по  $x$  и, соответственно, к существенному понижению критического значения  $\xi_x^c$ . В обычном режиме работы ВЭПП-2М  $\beta_x$ -функция в месте встречи достаточно велика ( $\beta_x \approx 40$  см). Поэтому модуляция, рассмотренная в разд. 3 оказывается несущественной по сравнению с модуляцией, обусловленной наличием  $\Psi_x$ -функции (см. разд. I). Аналогично, влияние модуляции бетатронной фазы (разд. 2), амплитуда которой обратно пропорциональна  $\beta$ -функции в месте встречи (см. (2.2)), также можно считать слабым.

Следует отметить, что ниже порога  $\xi_x^c$ , увеличение размеров пучка может происходить, тем не менее, в основном, по другому направлению (по  $z$ ). Это означает, что падение светимости и уменьшение времени жизни пучка, вообще говоря, определяются различными эффектами.

В случае, когда определяющим является вертикальное движение, и, соответственно, вертикальный сдвиг частоты ( $\Delta \nu_z$  или  $\xi_z$ ), одномерное приближение, как показывают экспериментальные данные, является явно недостаточным. Для изучения влияния модуляций в этом случае требуется учет двумерности пучка и связи поперечных колебаний.

Отметим также, что амплитуда рассмотренных в разд. 2, 3 модуляций возрастает с увеличением энергии пучков. Возможно, что именно этим фактом объясняется наблюдаемое на SPEAR отсутствие эффекта возрастания  $\xi_c$  на энергиях выше 2 ГэВ /18/.

В заключение авторы выражают благодарность А.Н.Скрипскому и Г.М.Тумайкину за полезные дискуссии и Л.Ф.Хайло за помощь в проведении численного моделирования.

Л и т е р а т у р а :

- I. Ф.М.Израйлев, С.И.Мишнев, Г.М.Тумайкин. Численные эксперименты по определению критерия стохастичности при взаимодействии встречных пучков (одномерная модель). Препринт 77-43 ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1977;  
И.Б.Вассерман, Ф.М.Израйлев, С.И.Мишнев, Г.М.Тумайкин. "Труды Международной конференции по ускорителям заряженных частиц высоких энергий", Серпухов, 1977, т.П, стр.302.
2. Ф.М.Израйлев. Почти-линейные отображения и их приложения, Препринт 80-149 ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1980;  
*Physica D*, (1980) 243.
3. Б.В.Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности, Препринт № 267 ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1969.
4. B.V.Chirikov, *Physics Reports*, 52 (1979), 263.
5. Б.В.Чириков. Нелинейный резонанс, Новосибирск, НГУ, 1977.
6. Б.В.Чириков. Взаимодействие нелинейных резонансов, Новосибирск, НГУ, 1978.
7. И.Б.Вассерман, Ф.М.Израйлев, Г.М.Тумайкин. Критерий стохастичности при взаимодействии встречных пучков на основном резонансе связи, Препринт 79-74, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1979.
8. H.Bruck, *Accelerateurs Circulaire de Particules* (Press Universitaires de France, Paris, 1966).
9. J.L.Tennyson, in *Nonlinear Dynamics and Beam-Beam Interaction*, A.I.P. Conf. Proc. No 57, 1979, p.158.
10. А.А.Жоленц, Ф.М.Израйлев, А.Б.Темных. Анализ эффектов встречи в монохроматических экспериментах с большой вертикальной дисперсией, Препринт 80-146, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1980.
11. В.В.Вечеславов. Приближенное представление потенциала встречного взаимодействия эллиптических пучков, Препринт 80-72, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1980.
12. Т.В.Саликова. Дипломная работа, Новосибирск, НГУ, 1980.
13. B.V.Chirikov, *Adiabatic Invariants and Stochasticity in Magnetic Confinement Systems*, Int. Conf. on Plasma Physics, Nagoya, 1980.

14. J.L.Tennyson, M.A.Lieberman, A.J.Lichtenberg, in *Nonlinear Dynamics and Beam-Beam Interaction*, A.I.P. Conf. Proc. No. 57, 1979, p.272.
15. A.Piwinski, in *Nonlinear Dynamics and Beam-Beam Interaction*, A.I.P. Conf. Proc. No. 57, 1979, p.115.
16. H.Zyngier, in *Nonlinear Dynamics and Beam-Beam Interaction*, A.I.P. Conf. Proc. No. 57, 1979, p.136.
17. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский. Динамическая стохастичность в классической механике, Препринт 80-209, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1980.
18. H.Wiedemann, *Beam-Beam Effect and Luminosity in SPEAR*. SLUC-PCB-2543, 1980.

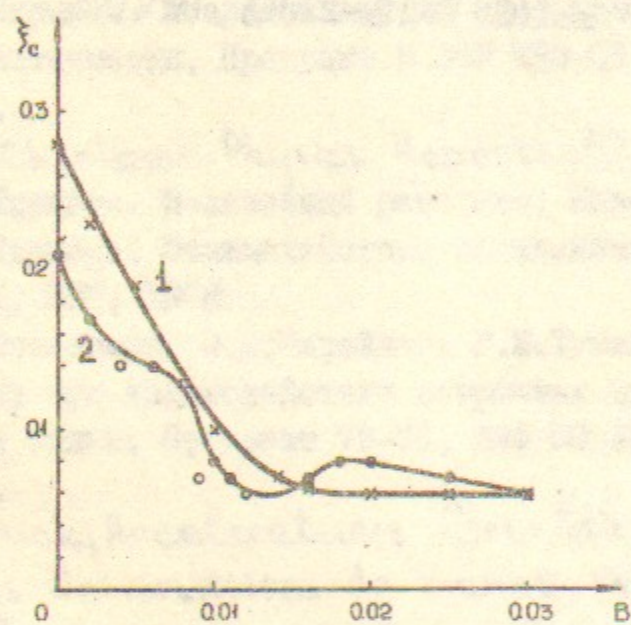


Рис.1. Зависимость критического значения  $\xi_c$  от амплитуды модуляции бетатронной фазы (2.5).  
Кривая 1 - лепточный пучок (1.3); кривая 2 - круглый пучок (1.2).

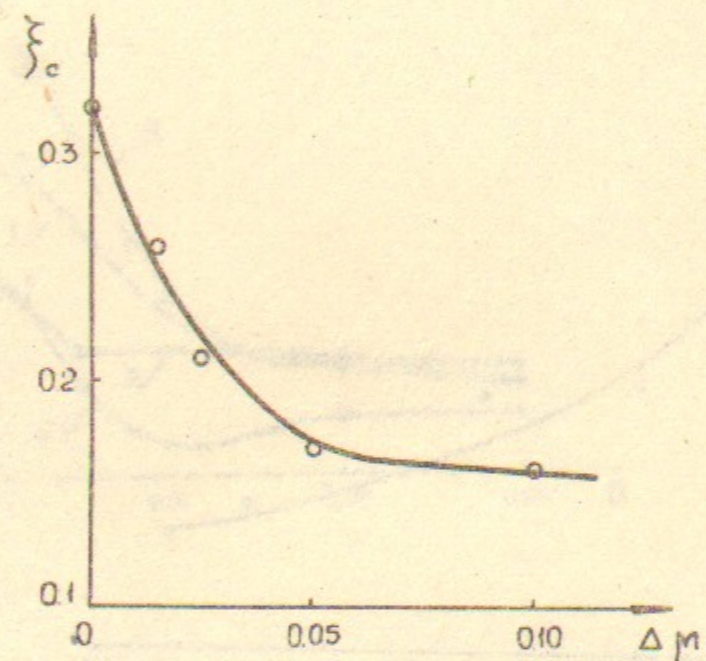


Рис.2. Зависимость критического значения  $\xi_c$  от величины  $\Delta\mu$  (2.4), обусловленной неточностью выставки элементов кольца по азимуту.

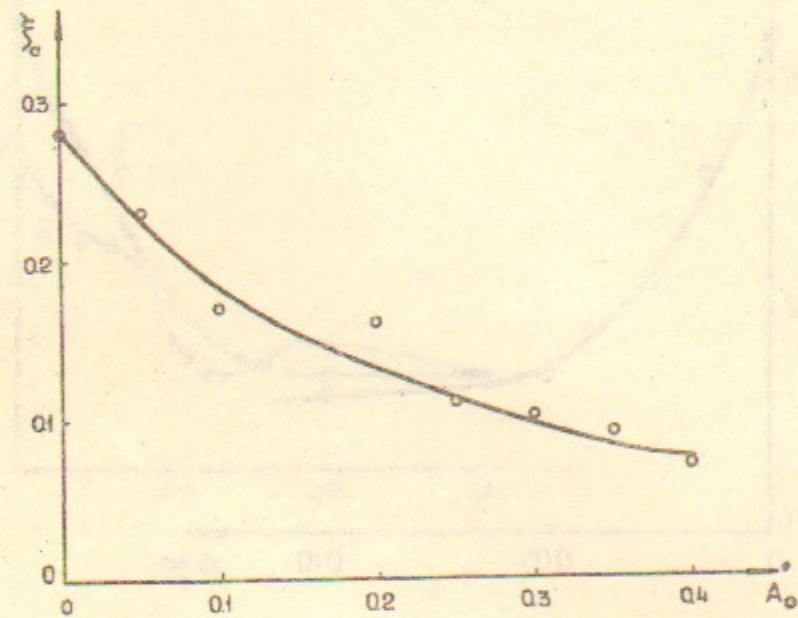


Рис.3. Зависимость критического значения  $\xi_c$  от амплитуды  $A_0$  модуляции  $\xi$  в месте встречи (3.3).

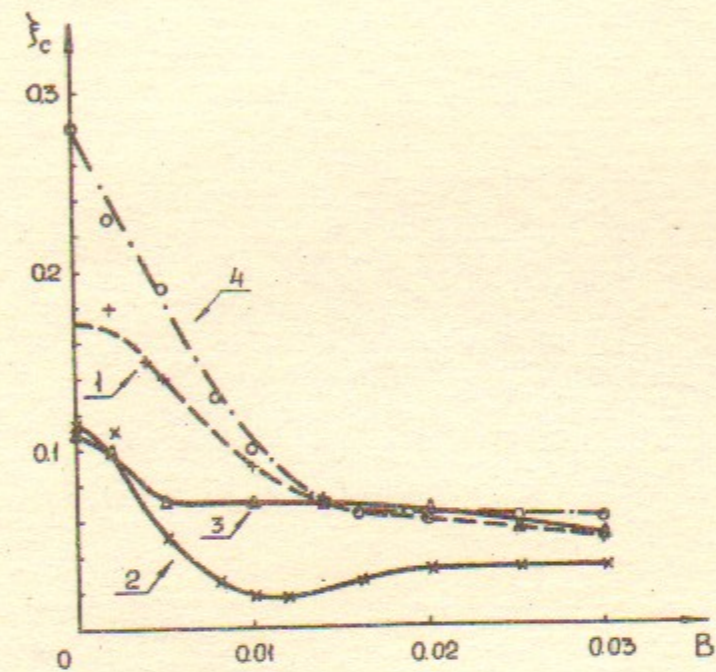


Рис.4. Совместное действие различных модуляций на величину  $\xi_c$ . Кривая 1 - модуляции (2.5) и (3.3) для  $A_0 = 0.1$  (см.разд.4), кривая 3 - то же самое для  $A_0 = 0,25$ ; кривая 4 - ( $A_0 = 0$ ) взята из рис.1 (кривая 1) для сравнения с кривыми 1 и 3. Кривая 2 - совместное действие модуляций (1.7) и (2.5) при  $A_c = 0.46$ .