

И.39

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ 39

Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

ДИНАМИЧЕСКАЯ СТОХАСТИЧНОСТЬ
В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

ПРЕПРИНТ 80 - 209

Библиотека
Института ядерной
физики им. Д.П.Ситникова
ИЯФ СО АН СССР



Новосибирск

ДИНАМИЧЕСКАЯ СТОХАСТИЧНОСТЬ В КЛАССИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ

Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе приводятся некоторые последние результаты исследования стохастического движения в классических динамических системах. Рассматриваются вопросы, связанные с нахождением границы стохастичности и выяснением статистических свойств движения в стохастической области. Подробно обсуждаются условия возникновения и особенности модуляционной диффузии.

Термин "динамическая стохастичность" в названии настоящей работы подчеркивает, что речь пойдет о некотором специфическом случае движения полностью детерминированной (динамической) системы. То, что движение в этом случае оказывается крайне нерегулярным, сложным и непредсказуемым, определяется исключительно внутренней динамикой системы и никак не связано с каким-либо влиянием внешних случайных возмущений. Такой тип динамического движения получил название стохастического, или хаотического — термины, неопределенность которых отражает огромное разнообразие различных частных случаев такого движения.

Все возрастающий интерес к изучению стохастического движения определяется, в основном, двумя факторами. Во-первых, в различных областях физики, техники и других наук появляется все больше и больше конкретных задач, для решения которых необходима хорошо развитая теория стохастического движения. Во-вторых, этот необычный (нетривиальный) режим движения перебрасывает мостик между считавшимися когда-то противоположными динамическими и статистическими законами физики и дает возможность понять и вывести последние из первых.

С прикладной точки зрения стохастическое движение представляет наиболее распространенную (и опасную) неустойчивость нелинейных колебаний, которая приводит к диффузии системы в фазовом пространстве и другим неприятным последствиям. Примером могут служить потери заряженных частиц в ускорителях /1/, плазменных ловушках /2,3/ или радиационных поясах Земли /4/. Впрочем, иногда та же стохастическая неустойчивость может оказаться и полезной, например, для нагрева плазмы высокочастотным полем (см., например, /5/) или для реализации стохастического метода ускорения заряженных частиц (см. /6/).

В рамках приложения теории стохастичности наибольший интерес представляют две проблемы:

1. Нахождение границы, или условий возникновения стохастической неустойчивости движения.

2. Выяснение статистических свойств стохастического движения, и, в первую очередь, скорости диффузии системы в фазо-

вом пространстве. Именно эти вопросы и будут обсуждаться, в основном, в настоящей статье.

С точки зрения более фундаментальной проблемы соотношения динамических и статистических законов физики наиболее "острым" является вопрос: может ли строго детерминированное движение (динамической системы) быть в то же время случайным (в интуитивном смысле слова)? Сколько-нибудь детальное обсуждение этой (отчасти философской) проблемы выходит за рамки настоящей статьи. Однако мы хотели бы сделать несколько кратких замечаний, поскольку нам кажется важным способствовать преодолению все еще существующего психологического барьера, воздвигнутого многовековой традицией противопоставления детерминированного и случайного. Развитие современной эргодической теории, а также алгоритмической теории сложности Колмогорова достигло в последнее время такого уровня, что на поставленный выше вопрос можно дать вполне утвердительный ответ, а именно, существуют такие динамические (полностью детерминированные) системы, движение которых принципиально неотличимо от "случайного", какое бы содержание мы ни вкладывали в последний термин. Справедливость такого "глобального" утверждения связана с одной интересной (частной) особенностью движения случайной динамической системы: на языке символической динамики множество ее траекторий является полным, т.е. содержит вообще все возможные траектории. Систематическое и относительно доступное изложение этого круга вопросов можно найти, например, в обзорах /7-9/. вполне реальным примером такой случайной динамики является упругие столкновения шариков в бильярде, как это было показано в классических работах Синая (см./9/). Поэтому сегодня образцом настоящего случайного процесса является не традиционная монетка и не рулетка в Монте-Карло, а шарики "Спортлото"!

Такие системы называются в эргодической теории бернуллиевскими, мы будем называть их ниже просто случайными. Напомним, что такие системы могут быть очень простыми, в частности, для случайной динамики достаточно всего двух степеней свободы (см., например, /9/).

Ниже мы ограничимся рассмотрением гамильтоновых (недиссипативных) систем. Такие системы называют иногда консерва-

тивными, однако, этот термин представляется нам неудачным, так как возникает путаница с сохранением энергии. В действительности, энергия гамильтоновой системы может и не сохраняться, если гамильтониан явно зависит от времени. Существенно, однако, что и в этом случае сохраняется фазовая плотность (теорема Лиувилля). Это значительно упрощает статистический анализ стохастического движения гамильтоновых систем, так как они обладают простой и известной заранее инвариантной мерой.

До недавнего времени считалось, что включение диссипации упрощает динамику, поскольку казалось, что все траектории системы асимптотически приближаются при этом либо к устойчивому равновесию, либо к устойчивому периодическому решению (предельный цикл) — простейшие примеры аттракторов в диссипативной системе. Сейчас мы знаем, что это далеко не всегда так. Первый пример нетривиального (стохастического) аттрактора был исследован в классической работе Лоренца /10/. Нетривиальность аттрактора Лоренца связана как с тем, что движение на нем является стохастическим, так и с тем, что его геометрическая структура в динамическом пространстве системы является весьма сингулярной (канторовой). Следует отметить, что такая структура стохастического аттрактора является типичной для так называемых систем Аносова /11/ с диссипацией, которые также оказываются бернуллиевскими. Один из видов стохастического аттрактора был подробно исследован Смейлом /12/. Поэтому популярность в последнее время термина "странный аттрактор" вызывает удивление (странный — для кого?).

Основная трудность теоретического анализа движения на стохастическом аттракторе связана с тем, что необходимо предварительно найти инвариантную меру, которая может оказаться очень сингулярной в исходном динамическом пространстве. Заметим, однако, что в случае системы Аносова со слабой диссипацией можно приближенно использовать простую инвариантную меру соответствующей системы без диссипации, например, фазовую плотность близкой гамильтоновой системы. Это следует из того факта, что все системы Аносова являются грубыми /11/. Здесь возникает, однако, другая трудность, связанная с тем,

что во многих практически интересных случаях приходится иметь дело с более общими системами, которые, в частности, не являются грубыми. Для таких систем слабая диссипация приводит, как правило, к вырождению стохастического движения в периодическое /13/. Это вырождение, правда, снимается с ростом диссипации, однако, при этом инвариантная мера может оказаться уже достаточно сложной.

Следует отметить, что диссипативная система не является, строго говоря, чисто динамической, во всяком случае, если речь идет о реальной физической системе. Действительно, диссипация отражает (в очень упрощенном виде) некоторый стохастический процесс на молекулярном уровне и потому неминуемо сопровождается флуктуациями, т.е. некоторым внешним по отношению к динамической системе случайным возмущением, которое вообще говоря необходимо также принимать во внимание. Прекрасный обзор работ по диссипативной стохастичности можно найти, например, в статьях /14/.

Возвращаясь к гамильтоновым системам, отметим, что в некоторых простейших случаях полное и строгое исследование стохастического движения возможно на основе современной эргодической теории. Это, например, уже упоминавшиеся системы Аносова. Однако такой класс динамических систем оказывается слишком узким с точки зрения приложений. Отметим, что в последнее время достигнуты некоторые успехи в направлении расширения класса динамических систем, допускающих строгий математический анализ /15/.

Основным содержанием настоящей работы являются некоторые последние результаты физической теории стохастичности, которая опирается на модельные представления, различные приближения и оценки и подкрепляется численным моделированием. Мы рассмотрим как стохастичность в классической механике, так и поведение квантовых систем, стохастических в классическом пределе (см. /33/). Значение последней проблемы с точки зрения физики состоит в том, что квантовая механика дает более точное описание реальных физических систем. Поэтому возникает вопрос: в какой мере необычные свойства стохастического движения классической системы сохраняются в квантовой теории? В принципе, ответ на

этот вопрос давно известен (см., например, /34/), хотя некоторым он и может показаться неожиданным: в квантовой динамике стохастичность вообще невозможна, точнее, временная эволюция волновой функции (или матрицы плотности) ограниченной в фазовом пространстве замкнутой квантовой системы всегда оказывается почти - периодической, т.е. ее частотный спектр является дискретным. В классической механике такое движение рассматривается как прямая противоположность стохастичности, например, движение полностью интегрируемой системы.

В работе /3/ предпринята попытка разрешить это кажущееся противоречие с помощью представления о переходной, или временной стохастичности. Этот подход основан на введении разных масштабов времени таким образом, что различные статистические свойства классической динамики проявляются на некоторых конечных интервалах времени квантового движения.

Если теперь перенести такой подход назад в классическую механику, мы приходим к любопытному выводу, что и здесь почти периодическое движение, например, движение полностью интегрируемой системы, может, при определенных условиях, имитировать стохастический процесс на конечном интервале времени. Подобная имитация фактически давно известна и, более того, является основным приемом при исследовании статистических свойств макросистем (в частности, при выводе кинетических уравнений) в статистической физике. Насколько нам известно, такой подход был использован впервые Боголюбовым /16/, который исследовал статистические свойства большого числа несвязанных линейных осцилляторов, и в некотором смысле закончен в работе /25/, где строго доказана бернуллиевость (случайность) классического идеального газа, также при $N \rightarrow \infty$.

Новая постановка задачи, естественно возникающая в классической механике из анализа квантовой динамики, состоит в следующем: при фиксированном (и необязательно большом) числе степеней свободы классической полностью интегрируемой системы найти условия и масштабы времени, для которых имеет место имитация стохастического движения. В частности, такая задача возникает при численном моделировании классической стохастичности. В силу дискретного представления чисел в компьютере все траектории любой динамической системы оказываются при

этом просто периодическими. Учитывая широкое распространение численного моделирования при исследовании различных динамических систем, оценка точности и пределов такого моделирования представляется весьма важной. Этот круг вопросов обсуждается в работе /33/.

Пользуемся случаем выразить нашу искреннюю благодарность Ф. Вивальди, Дж. Грину, Г. М. Заславскому, Дж. Казати, Дж. Кроммесу, Я. Г. Синаю, В. В. Соколову, Дж. Теннинсону, Дж. Форду и С. А. Хейфецу за полезные обсуждения ряда вопросов, затронутых в настоящем обзоре.

2. Нетривиальные задачи классической гамильтоновой динамики

Нетривиальность задачи понимается здесь двояко. С одной стороны, имеются ввиду задачи о стохастическом движении, которое все еще остается довольно необычным режимом классической динамики. С другой стороны, речь пойдет о таких (более сложных) задачах, которые пока не поддаются строгому математическому анализу. Их решение (конечно, частичное) основано на системе качественных представлений о механизме стохастического движения, дополненных приближенными оценками и результатами численного моделирования. Для гамильтоновых систем наиболее эффективным методом такого полужемпирического исследования является анализ нелинейных резонансов и их взаимодействия. Соответствующая методика подробно описана, например, в обзорах /17, 18/.

В этом разделе мы рассмотрим несколько конкретных задач, связанных со стохастическим поведением простых систем классической механики.

2.1. Граница стохастичности

Определение границы стохастической неустойчивости нелинейных колебаний является одной из основных задач теории стохастичности. При этом следует различать границу стохастичности по параметрам системы, т.е. критические значения таких параметров, как, например, величины возмущения, и границу стохастичности в фазовом пространстве системы, в том числе и крити-

ческое значение энергии замкнутой системы. Особенно сложной является последняя задача. Действительно, структура фазового пространства нелинейных колебаний характеризуется, как правило, чрезвычайно сложным чередованием устойчивых и стохастических компонент движения. Пример подобной структуры изображен на рис. 1 и более подробно будет описан ниже. Такая структура получила название разделенного (на устойчивые и стохастические компоненты) фазового пространства.

Сложность структуры разделенного фазового пространства определяется, в основном, двумя факторами. Во-первых, эта структура является иерархической, т.е. чередование устойчивых и стохастических областей имеет место на все более и более мелких пространственных масштабах. Во-вторых, граница между устойчивой и стохастической компонентами сама является стохастической поверхностью. Все это чрезвычайно затрудняет строгий математический анализ подобных динамических систем. Более того, даже сама постановка задачи о границе стохастичности представляет известные трудности.

Существуют, однако, такие специальные системы, для которых можно, по крайней мере, четко сформулировать задачу. Примером может служить так называемое стандартное отображение

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p + \mathcal{K} \cdot \sin x \\ \bar{x} &= x + \bar{p} = x + p + \mathcal{K} \cdot \sin x \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

К такому отображению приводятся многие конкретные задачи теории нелинейных колебаний с двумя степенями свободы (см., например, /18/). Сейчас, однако, это отображение интересует нас с другой точки зрения. Для нас существенно, что фазовое пространство этой модели (x, p) является периодическим не только по x , но и по p (с тем же периодом 2π). Поэтому существует такое критическое значение единственного параметра этого отображения $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{cr}$, выше которого движение становится инфинитным^{*}). Тривиальный случай $\mathcal{K}_{cr} = 0$ исключается теорией

^{*} При $\mathcal{K} > \mathcal{K}_{cr}$ движение оказывается стохастическим /18/. Фактически и при $\mathcal{K} < \mathcal{K}_{cr}$ существуют ограниченные по p стохастические области сложной структуры. Поэтому условие $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{cr}$ следует понимать как границу глобальной, или связанной стохастичности.

КАМ (Колмогорова-Арнольда-Мозера, см., например, /19/).

Численные эксперименты со стандартным отображением привели к результату /18/:

$$\mathcal{K}_{cr} \approx 0.989 \quad (2.1.2)$$

По порядку величины этот результат может быть получен из простого критерия перекрытия нелинейных резонансов (см., например, /18/). Для этого отображение (2.1.1) следует заменить эквивалентной непрерывной системой с гамильтонианом

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \mathcal{K} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\theta - 2\pi n t) \quad (2.1.3)$$

Если учитывать только резонансы первого приближения $\dot{\theta} \approx p = 2\pi n$ то

$$\mathcal{K}_{cr}^{(1)} = \frac{\pi^2}{4} \approx 2.5 \quad (2.1.4)$$

Более сложные вычисления с учетом резонансов высших приближений, а также стохастического слоя резонансов позволяют /18/ улучшить согласие с численным результатом (2.1.2): $\mathcal{K}_{cr} \approx 1.1$

Совсем другой подход к решению задачи о границе стохастичности был развит в последнее время Грином /20/. Его подход основан на исследовании устойчивости периодических траекторий в центре резонансов. Вообще говоря, такой метод всегда завышает \mathcal{K}_{cr} , так как инфинитное движение возможно по системе касающихся (пересекающихся) сепаратрис, когда центры резонансов еще устойчивы. Так, например, неподвижные точки отображения (2.1.1) $x = \pi; p = 2\pi n$, т.е. траектории с периодом $T = 1$, остаются устойчивыми вплоть до $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 = 4$, что превышает даже значение (2.1.4). Однако уже $\mathcal{K}_2 = 2$ ($T=2$); $\mathcal{K}_3 = 1.52$ и т.д. /21/. Поэтому гипотеза Грина о том, что при $T \rightarrow \infty$, $\mathcal{K}_T \rightarrow \mathcal{K}_{cr}$ представляется вполне правдоподобной. Его результат для стандартного отображения /20/:

$$\mathcal{K}_{cr} = 0.971635... \quad (2.1.5)$$

заметно меньше значения (2.1.2). В связи с этим расхождением мы произвели новую, более тщательную обработку численных данных по стандартному отображению, приведенных в /18/. Однако новый результат $\mathcal{K}_{cr} \approx 1.00$ еще больше увеличил расхождение.

Одна из причин этого расхождения может состоять в следующем. Исследование устойчивости периодических траекторий при больших T может быть проведено только численно. Поэтому нет возможности перебрать все периодические траектории и приходится принять дополнительную гипотезу о том, что наиболее устойчивыми являются траектории со средней частотой

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{M}{T} \rightarrow g = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\dots}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618 \quad (2.1.6)$$

где M, T - целые, причем T является полным периодом траектории до замыкания. Число g Грин называет "самым иррациональным числом" на том основании, что оно хуже всего приближается рациональными числами, как это видно из представления g в форме цепной дроби (2.1.6). С точки зрения перекрытия резонансов, однако, последняя гипотеза Грина не представляется убедительной, так как для перекрытия имеет значение не только расстояние между резонансами, но и их ширина, которая зависит от знаменателя рационального числа. $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{M}{T}$.

Для более подробного исследования этого вопроса мы выбрали несколько иную модель, заданную отображением /22/:

$$\bar{p} = p + \frac{\mathcal{K} \cdot \sin x}{(1 - a \cos x)^2} \quad (2.1.7)$$

$$\bar{x} = x + \bar{p}$$

В отличие от стандартного отображения возмущение в этой системе содержит уже в первом приближении много гармоник по x (при $a \rightarrow 1$):

$$\frac{\sin x}{(1 - a \cos x)^2} \approx \frac{2}{\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\sigma m} \cos mx \quad (2.1.8)$$

где $\epsilon \approx \sqrt{1-a^2}$. Поэтому уже в первом приближении "работают" не только целые резонансы $p=2\pi n$, но и дробные $p=2\pi n/m$ ($m \leq 1/\epsilon$), как это видно из гамильтониана эквивалентной непрерывной системы /22/:

$$H(x,p,t) \approx \frac{p^2}{2} + \frac{2K}{\epsilon} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\epsilon m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Cos}(mx - 2\pi n t) \quad (2.1.9)$$

Рассмотрим сначала каждый из резонансов в отдельности в приближении "маятника" /18/. Полуширина сепаратрисы резонанса равна

$$(\Delta p)_m = 2 \sqrt{\frac{2K}{\epsilon}} e^{-\epsilon m/2} \quad (2.1.10)$$

а простая сумма всех резонансов в интервале $0 \leq \frac{\omega}{2\pi} \leq 1$ есть

$$S(K, \epsilon) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m (\Delta p)_m = 4 \sqrt{\frac{2K}{\epsilon}} \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot e^{-\frac{\epsilon m}{2}} \quad (2.1.11)$$

Из условия $S(K, \epsilon) \approx 2\pi$ можно получить грубую оценку K_{cr} в виде

$$K_{cr} \approx \frac{\pi^2}{128} \epsilon^5 \quad (2.1.12)$$

Эту оценку можно улучшить следующим образом /22/. Во-первых, сумму в (2.1.11) нужно брать не по всем m, n а только по таким m_0, n_0 , которые образуют несократимые дроби n_0/m_0 . Число таких неприводимых резонансов составляет в среднем 2/3 от всех резонансов. Остальные резонансы разбиваются на группы, каждая из которых соответствует одному неприводимому резонансу: $m = m_0 \ell; n = n_0 \ell; \ell = 1, 2, \dots$. При $\epsilon \ll 1$ движение вблизи каждого неприводимого резонанса будет определяться всеми членами возмущения в гамильтониане (2.1.9), принадлежащими к этой группе, т.е. суммой по ℓ при заданных m_0, n_0 . В результате приближение маятника нарушается и ширина резонансов низких гармоник ($\epsilon m_0 \leq 1$) заметно возрастает.

Однако самым существенным оказывается учет неравномернос-

ти расположения резонансов. Действительно, полное число резонансов с $m_0 < m_1$ на единичном интервале величины $\omega/2\pi$ равно $\frac{2}{3} m_0^2$, откуда среднее расстояние между резонансами $\langle \Delta \omega \rangle \approx \frac{3\pi}{m_0^2}$. Между тем вблизи целых резонансов на краях интервала (например, $\frac{n_0}{m_0} = 1$) образуются щели $(\Delta \omega)_1 = \frac{2\pi}{m_0}$. Поэтому ясно, что K_{cr} будет на самом деле определяться не средним перекрытием резонансов (2.1.11), а "закрыванием" этих щелей. Это существенно повышает критическое значение возмущения в рассматриваемой модели /22/:

$$K_{cr} \approx \frac{\pi^2 \epsilon^4}{(L + \frac{1}{L})^2}; \quad L = \ln \frac{128}{9\epsilon} \quad (2.1.13)$$

Некоторые результаты по численному моделированию системы (2.1.7) описаны в /23/. Моделирование производилось следующим образом. Пусть нас интересует динамика системы

$$\bar{p} = p + K \cdot f(x) \quad (2.1.14)$$

$$\bar{x} = x + \bar{p}$$

где $f(x)$ - некоторая периодическая функция периода 2π . Рассмотрим вспомогательное отображение

$$\bar{y} = y + \frac{f(x)}{\lambda} \quad (2.1.15)$$

$$\bar{x} = x + \lambda \cdot F(\bar{y})$$

где λ - некоторая постоянная; $f(x)$ - та же функция, что и в (2.1.14), а $F(\bar{y})$ - некоторая новая функция, которую мы выберем позже.

Линеаризуем второе из уравнений последнего отображения вокруг одного из резонансных значений $y = y_r$, где

$$\lambda \cdot F(y_r) = 2\pi r; \quad r - \text{целое} \quad (2.1.16)$$

Полагая $p = \lambda \cdot F'(y_r)(y - y_r)$, мы возвращаемся к исходному отображению (2.1.14) с параметром

$$K = F'(y_r) \quad (2.1.17)$$

Пусть теперь функция $|F'(y)|$ монотонно убывает с $|y|$, тогда

условие $|K| > K_{cr}$ определяет стохастический слой $|y| < y_0$ на фазовой плоскости вспомогательного отображения (2.1.15). И наоборот, если с помощью численного счета найти максимальное значение $y_m \approx y_0$ ($|y| < y_m$), до которого доходит диффузия в системе (2.1.15), то из (2.1.17) можно приближенно оценить критическое возмущение для отображения (2.1.14):

$$K_{cr} \approx |F'(y_m)|. \text{ Более точно, можно утверждать, что} \\ K_{cr} \leq |F'(y_0)| \quad (2.1.18)$$

где y_0 соответствует последнему целому резонансу, пройденному траекторией ($\lambda F(y_0) = 2\pi r$). Если исходное отображение (2.1.14) симметрично относительно $\rho = \pi$, т.е. относительно полупериода резонанса, как это имеет место, например, для стандартного отображения ($f(x) = \sin x$), а также для интересующего нас сейчас отображения (2.1.7), то y_0 в (2.1.18) будет соответствовать последнему полупериоду резонанса ($\lambda \cdot F(y_0) = \pi r$).

В качестве вспомогательной функции была выбрана $F(y) = \ln|y|$. Заметим, что при $f(x) = \sin x$ отображение (2.1.15) описывает движение в стохастическом слое нелинейного резонанса в приближении маятника /18/. Численные эксперименты с отображением (2.1.15) и $f(x)$ из (2.1.7) при числе итераций $t \sim 10^6$ показали хорошее согласие K_{cr} , определенное описанным методом, с оценкой (2.1.13) в диапазоне $0.03 < \epsilon < 0.5$ /23/. Однако при дальнейшем увеличении времени движения критическое значение K_{cr} медленно "сползает" вниз. Так, для $\epsilon = 0.142$ и $t = 2 \times 10^8$ верхняя граница K_{cr} (2.1.18) уменьшилась до 4.3×10^{-5} , тогда как оценка (2.1.13) дает 1.3×10^{-4} . То, что последнее значение, полученное по перекрытию резонансов первого приближения, оказывается завышенным, вполне естественно (ср. критическое значение (2.1.4) для стандартного отображения). Интересно другое, а именно, найденное отношение (R) теоретического и численного значений K_{cr} ($R \approx 3$) лишь незначительно отличается от соответствующего отношения для стандартного отображения ($R \approx 2.5$, см. (2.1.4)). К этому можно добавить, что в случае всего двух перекрывающихся резонансов $R \approx 2.3$

(по данным /18/) и $R \approx 2$ (по данным /24/).

В рассматриваемом случае это отношение можно интерпретировать и по-другому — как уменьшение эффективного значения $\epsilon \rightarrow \epsilon^*$ вследствие эффектов высших приближений. Из найденного значения $R \approx 3$ и оценки (2.1.13) имеем: $\epsilon^*/\epsilon \approx 0.76$.

Косвенным подтверждением решающей роли щелей около целых резонансов, на которых основана (2.1.13), является гистограмма на рис.2. Здесь дробная часть $r = \{\lambda F(y_m)/2\pi\}$ характеризует положение системы на периоде резонансной структуры, соответствующее максимальному значению $|y| = y_m$, достигнутому к данному моменту времени. По оси ординат отложено число итераций T , в течение которого y_m оставалось в каждом из 20 интервалов периода резонансной структуры. Горизонтальная стрелка в верхней части рисунка показывает направление диффузии. Видно, что наиболее "труднопроходимым" является участок непосредственно перед целым резонансом $r = 1$. Две вертикальные стрелки показывают "наиболее иррациональные" по Грину значения $r = q$ (2.1.6) и $r = 1 - q$, в окрестности которых не наблюдается значительной задержки диффузии.

Хотя полученное согласие последних численных результатов с оценкой (2.1.13), основанной на относительно простом критерии перекрытия нелинейных резонансов, кажется удовлетворительным, этот вопрос требует дальнейшего изучения и, в частности, проведения численных экспериментов на значительно большем времени движения. Последнее связано с очень медленной диффузией в районе щели. Это может привести к дальнейшему снижению численного значения K_{cr} . Помимо этого не исключено, что довольно высокая точность численного счета (56 двоичных разрядов мантиссы) может все же оказаться недостаточной опять — таки из-за малой скорости диффузии. При этом возможно "зацикливание", т.е. переход на периодическую траекторию из-за дискретного представления чисел в компьютере (см. /33/).

2.2. Модуляционная диффузия

Как отмечалось выше, структура стохастической компоненты в фазовом пространстве является обычно очень сложной. В этом

разделе мы рассмотрим относительно простой и малоизвестный случай, когда стохастическая компонента имеет вид отдельных сравнительно узких слоев, вдоль которых система может диффундировать на значительные расстояния. Такая структура возникает, например, вследствие неглубокой низкочастотной модуляции в системе.

Рассмотрим вначале случай внешней модуляции. В качестве примера возьмем систему с гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{x_1^4 + x_2^4}{4} - \mu x_1 x_2 - \varepsilon x_1 f(t) \quad (2.2.1)$$

Такой гамильтониан описывает поведение двух связанных нелинейных осцилляторов под действием внешней силы $f(t)$. Система (2.2.1) ранее исследовалась с точки зрения так называемой диффузии Арнольда, слабой универсальной неустойчивости, имеющей место в многомерных колебательных системах (см., например, /26, 18, 27/ и конец раздела 2.3). Выберем $f(t)$, аналогично /27/ в виде

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cos \psi_m(t); \quad f_m = \frac{2 e^{-\varepsilon m}}{\varepsilon} \quad (2.2.2)$$

Пусть фаза внешнего возмущения $f(t)$ слабо модулирована с частотой Ω , много меньшей невозмущенных частот системы: $\psi_m(t) = m\lambda t + \lambda \sin \Omega t$. Такой тип модуляции часто имеет место в практических задачах (см., например, /1/). Для малых значений параметров $\mu, \varepsilon \ll 1$, которые характеризуют величину связи и внешнего возмущения, удобно перейти к невозмущенным (для $\mu, \varepsilon = 0$) переменным действие-фаза I_i, θ_i . Тогда невозмущенный гамильтониан H_0 примет вид:

$$H_0 = c_0 (I_1^{4/3} + I_2^{4/3}); \quad c_0 \approx 0.87 \quad (2.2.3)$$

В этом приближении действия I_1 и I_2 остаются постоянными, а для фаз θ_1, θ_2 имеем:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1(I_1); \quad \dot{\theta}_2 = \omega_2(I_2) \quad (2.2.4)$$

где ω_1, ω_2 - невозмущенные частоты системы, зависящие в силу нелинейности колебаний от I_1, I_2 . Несмотря на сильную нелинейность, колебания осцилляторов близки к гармоническим:

$x_i(t) \approx a_i \cos \theta_i(t)$, а частоты колебаний пропорциональны амплитудам: $\omega_i \approx 0.85 a_i$.

Параметр λ в (2.2.4) определяет глубину модуляции. При отсутствии модуляции в системе имеются внешние резонансы $\omega_1(I_1) = m\lambda$ и резонанс связи $\omega_1(I_1) = \omega_2(I_2)$ (см. рис. 3). Если возмущение достаточно велико, соседние нелинейные резонансы перекрываются и возникает сильная стохастичность, приводящая к быстрому росту полной энергии.

Здесь мы хотим обратить внимание на возможность возникновения так называемой модуляционной диффузии /28/, сходной в некотором смысле с диффузией Арнольда. Причиной возникновения такой диффузии в случае $\lambda \neq 0$ служит перекрытие модуляционных резонансов вблизи каждого внешнего резонанса.

Найдем условие перекрытия модуляционных резонансов вблизи отдельного внешнего резонанса с гармоникой m . Для этого запишем гамильтониан движения по x_1 в отсутствие связи ($\mu = 0$) и вблизи выделенного модуляционного резонанса ($\omega_1(I_1) = m\lambda + n\Omega$):

$$H_M = c_0 I_1^{4/3} - \frac{\varepsilon}{2} f_m a_1(I_1) J_n(\lambda) \cos(\theta_1 - m\lambda t - n\Omega t) \quad (2.2.5)$$

где $J_n(\lambda)$ - функция Бесселя. Оценивая ширину резонанса $\Delta\omega_1$ и сравнивая ее с расстоянием между соседними резонансами Ω , получим параметр перекрытия резонансов:

$$S = \frac{\Delta\omega_1}{\Omega} \sim \frac{4\omega_1 e^{-\varepsilon m/2}}{a_1^{3/2} \Omega} \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{\pi \lambda \varepsilon^2} \right)^{1/4} \quad (2.2.6)$$

где мы использовали оценку $J_n(\lambda) \sim 1/\sqrt{\pi\lambda}$ для $\lambda \gg 1$. При $K_M \approx 2.5 S^2 > 1$ /18/ образуется модуляционный стохастический слой с шириной $\approx 2\lambda\Omega$. Мы ввели здесь параметр устойчивости K_M , аналогичный параметру K стандартного отображения (2.1.1).

Примем, что $\lambda\Omega \ll \nu$, так что соседние слои не соприкасаются и значительная диффузия возможна лишь вдоль слоя, с увеличением энергии по другой степени свободы (I_2).

Скорость изменения I_2 равна (см. (2.2.1)):

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &\approx -\mu a_1 \cos \theta_1 \cdot a_2 \cos \theta_2 \approx \\ &\approx \frac{\mu a_1 a_2}{2} [\sin(\theta_1 - \omega_2 t) - \sin(\theta_1 + \omega_2 t)] \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

где мы положили приближенно $\theta_2 \approx \omega_2 t$. При достаточно малой связи $\mu \ll \varepsilon$ зависимость $\theta_1(t)$ будет мало отличаться от случая $\mu = 0$ и будет определяться движением системы в стохастическом слое согласно гамильтониану:

$$H_{x_1} = \frac{\omega_1^2 \Delta^2}{2\alpha_1^4} - \frac{\varepsilon a_1 \Gamma m}{2} \cos(\theta_1 - m\omega_1 t - \lambda \sin \Omega t) \quad (2.2.8)$$

Здесь новый канонический импульс $\Delta = I_1 - I_r$ описывает отклонение действия I_1 от резонансного значения I_r , которое удовлетворяет условию: $\omega_1(I_r) = m\lambda$. Если система находится в модуляционном стохастическом слое, то изменение I_2 согласно (2.2.7) будет иметь диффузионный характер и определяться корреляционными свойствами фазы $\theta_1(t)$. Скорость такой диффузии будет найдена в следующем разделе.

Заметим, что механизм диффузии по I_2 можно рассматривать как "перекачку стохастичности" из одной степени свободы в другую. Такая наглядная картина диффузии в стохастическом слое была предложена в /29/, где рассматривалась близкая задача. Фактически, подобный механизм "передачи" стохастичности кратко обсуждался еще раньше в работе /30/.

2.3. Статистические свойства стохастического движения

При решении конкретных задач, связанных со стохастическим движением динамических систем, помимо границы стохастичности или, в более общем случае, структуры (геометрии) стохастической компоненты необходимо знать статистические свойства движения в стохастической области. Важнейшим из них является скорость диффузии системы по стохастической компоненте. В некоторых случаях эта задача оказыва-

ется тривиальной. Так, например, для стандартного отображения (2.1.1) при $\mathcal{K} \gg 1$, т.е. достаточно глубоко в стохастической области, последовательные значения фазы x можно с хорошей степенью точности считать случайными и независимыми /18/. Отсюда сразу следует, что скорость диффузии по p равна:

$$D_p \equiv \frac{\langle (\Delta p)^2 \rangle}{t} \approx \frac{\mathcal{K}^2}{2} \quad (2.3.1)$$

что хорошо согласуется с результатами численного моделирования /18/.

Однако совсем не всегда дело обстоит так просто. Например, в задаче о модуляционной диффузии (раздел 2.2) скорость диффузии определяется квадратом модуля Фурье-компоненты некоторой непрерывной случайной функции (2.2.7). Это означает, что в общем случае нам необходимо знать Фурье-спектр случайного процесса, или связанную с ним корреляционную функцию движения. И то и другое зависит, разумеется, от устройства стохастической компоненты. Для задачи о модуляционной диффузии последняя возникает вследствие перекрытия нескольких "параллельных" резонансов (рис.3).

Для исследования статистических свойств такой компоненты рассмотрим следующую простую модель с гамильтонианом:

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + k \cos(x + \lambda \cos \Omega t) \quad (2.3.2)$$

Здесь Ω - частота модуляции, а λ определяет ее глубину (эффективное число линий мультиплета); полная ширина модуляционного спектра равна приблизительно $2\lambda\Omega$. Условие образования стохастического слоя имеет вид (ср. раздел 2.2):

$$\mathcal{K}_m \approx 2.5 S^2 \sim 23 \cdot \frac{k}{\sqrt{\lambda} \Omega^2} > 1 \quad (2.3.3)$$

где S - параметр перекрытия модуляционных резонансов. Будем считать, что это условие выполнено с большим запасом, так что образовался достаточно однородный стохастический слой. Тогда динамика системы (2.3.2) описывается некоторой случайной функцией $x(t)$, и нам нужно найти ее корреляцион-

ные свойства.

Введем дополнительную динамическую переменную \bar{z} , изменение которой определяется уравнением:

$$\dot{\bar{z}} = \varepsilon \cdot \sin(qx - \omega t) \quad (2.3.4)$$

где ε , q , ω — некоторые постоянные. Это уравнение имеет такой же вид, как и уравнение (2.2.7) в задаче о модуляционной диффузии. Последняя соответствует, таким образом, диффузии по \bar{z} в рассматриваемой модели.

Можно сразу высказать несколько соображений о зависимости скорости диффузии

$$D \equiv \frac{(\Delta z)_t^2}{t}; \quad (\Delta z)_t = \varepsilon \int_0^t \sin(qx(t') - \omega t') dt' \quad (2.3.5)$$

от частоты возмущения ω . В интервале $|\omega| \lesssim q\lambda\Omega$ скорость диффузии будет приблизительно постоянной и относительно высокой. Это соответствует ширине стохастического слоя системы (2.3.2) по частоте $\dot{x} = \rho$, которая равномерно заполняет интервал $|\rho| \lesssim \lambda\Omega$. С другой стороны, при $|\omega| \gg q\lambda\Omega$ скорость диффузии будет убывать экспоненциально, поскольку функция $x(t)$ является аналитической, а ее спектр ограничен:

$$D \rightarrow A \cdot \exp\left(-\frac{|\omega|}{\omega_1}\right); \quad \omega \gg \omega_1 \quad (2.3.6)$$

Наиболее важной задачей является определение масштаба экспоненциального убывания ω_1 . Поскольку нам неизвестны методы аналитического решения этой задачи, мы обратились к численному моделированию объединенной системы (2.3.2), (2.3.4).

При $k \ll 1$ дифференциальные уравнения движения можно приближенно заменить отображением

$$\bar{p} = p + k \cdot \sin(x + \lambda \cos \Omega t) \quad (2.3.7)$$

$$\bar{x} = x + \bar{p}$$

$$\bar{z} = z + \varepsilon \cdot \sin(qx - \omega t)$$

где t принимает теперь только целочисленные значения и

$|\omega| \ll 2\pi$. Для уменьшения "фона", связанного с дискретностью этой схемы счета, применялось усреднение $\bar{z}(t)$ по 10 интервалам, на которые разбивалось полное время счета. Эта удобная техника подробно описана в /26,18/.

Рассмотрим вначале случай $q = 1$. Предварительные численные эксперименты показали, что масштаб экспоненты примерно пропорционален ширине стохастического слоя. На рис.4 зависимость $D(\omega)$ отложена в нормированных координатах: $\log(D_R)$, $y = \omega/\Delta\omega$, где $D_R = \Delta\omega \cdot D/\varepsilon^2$ — перенормированная скорость диффузии, а $\Delta\omega$ — фактическая полуширина слоя, которая обычно несколько превышает $\lambda\Omega$. На рисунке собраны данные с различными значениями параметров модели в интервалах:

$$10^{-5} \leq k \leq 3 \times 10^{-3}; \quad 0.014 \leq \Delta\omega \leq 0.36$$

$$10^{-3} \leq \Omega \leq 2 \times 10^{-2}; \quad 3.8 \leq s \leq 30$$

$$10 \leq \lambda \leq 100$$

Если отвлечься от довольно больших флуктуаций, то можно отметить следующие особенности функции $D(\omega)$:

1. плато $|\omega| \leq \Delta\omega$ с максимальной скоростью диффузии;
 2. экспоненциальный "хвост" при $\omega > \Delta\omega$ с $\omega_1 = \Delta\omega/\lambda$
- где среднее значение λ по всем данным $\langle \lambda \rangle = 6.21 \pm 0.17 \approx 2\pi$
3. резкое падение ("обрыв") скорости диффузии при $|\omega| \approx \Delta\omega$
 4. нерегулярная зависимость $D(\omega)$ на "хвосте".

Максимальная скорость диффузии на плато может быть найдена из условия нормировки Фурье-преобразования функции $\sin x(t)$ (равенство Парсеваля):

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_R(y) dy = \pi \quad (2.3.8)$$

Откуда скорость диффузии на плато ($|\omega| < \Delta\omega$):

$$D^{(pl)} \approx \frac{\pi \varepsilon^2}{2 \lambda \Omega} \quad (2.3.9)$$

где мы пренебрегли вкладом "хвоста" в интеграл (2.3.8) ввиду резкого уменьшения $D(\omega)$ при $|\omega| > \Delta\omega$. По данным на

рис.4 среднее значение $\langle D_R^{(pe)} \rangle = 1.21 \pm 0.10$.
Скорость диффузии на "хвосте"

$$D_R \approx B \cdot \exp\left(-\frac{2\pi|\omega|}{\Delta\omega}\right); \quad |\omega| > \Delta\omega \quad (2.3.10)$$

где среднее значение величины B по всем данным на рис.4 равно $\langle B \rangle = 16$. Из-за больших флуктуаций отдельные значения B различаются более чем на порядок. Поэтому по имеющимся данным трудно решить, зависит ли B от параметров системы, хотя численные результаты указывают, по-видимому, на такую зависимость, главным образом, от параметра λ . Мы вернемся к этому вопросу ниже.

Частотная модуляция в модели (2.3.2) представляет собой регулярное внешнее возмущение, и возникает вопрос, в какой мере найденные эмпирические закономерности зависят от этой регулярности. Для выяснения этого вопроса частотная модуляция была заменена "случайным" возмущением в виде набора гармоник со случайными фазами. Результаты этих численных экспериментов показывают, что экспоненциальный масштаб изменился при этом незначительно ($\langle \lambda \rangle = 5.74 \pm 0.15$), тогда как величина B существенно уменьшилась ($\langle B \rangle = 3.4$). Такое изменение B служит, по-видимому, дополнительным косвенным указанием на зависимость этой величины от параметров модели.

Однако регулярность частотной модуляции проявляется, главным образом, в другом - в зависимости от параметров системы так называемой КС-энтропии h (энтропии Крылова-Колмогорова-Синая), которая определяет среднюю экспоненциальную скорость расхождения близких траекторий динамической системы. Именно, оказалось, что численные значения h весьма хорошо описываются простым соотношением

$$h = \frac{\Omega}{2\pi} \ln \frac{K_M}{2} \approx \frac{\Omega}{\pi} \ln s \quad (2.3.11)$$

где K_M определяется выражением (2.3.3). Это соотношение в точности совпадает с выражением для КС-энтропии стандартного отображения (при замене K_M на K , см., например, /18/).

Такое совпадение становится понятным, если несколько преобразовать отображение (2.3.7) для нашей модели. Введем новую фазу $u = x + \lambda \cdot \cos \Omega t$, тогда первые два уравнения (2.3.7) можно переписать в виде ($\Omega \ll 2\pi$)

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p + k \cdot \sin u \\ \bar{u} &= u + \bar{p} - \lambda \Omega \cdot \sin \Omega t \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Это отображение моделирует периодическое прохождение резонанса $p = \lambda \Omega \sin \Omega t$, которое действительно можно описать с помощью стандартного отображения, по крайней мере, в некоторой области параметров /31/.

При достаточно медленном прохождении резонанса ($\Omega^2 \ll k/\lambda$) внутри модуляционного стохастического слоя существует устойчивая область, но только не неподвижная как, например, области на рис.1, а колеблющаяся. В частности, ее центр движется по закону:

$$p_0 \approx \lambda \Omega \cdot \sin \Omega t; \quad x_0 \approx \pi - \lambda \cos \Omega t \quad (2.3.13)$$

Такая устойчивая область была нами действительно обнаружена. Следует отметить, что ее относительная фазовая площадь

$$S \approx \frac{4\sqrt{k}}{\pi\lambda\Omega} \approx \frac{s}{(\pi\lambda)^{3/4}} \quad (2.3.14)$$

обычно мала ($s \ll \lambda$), так что для большинства начальных условий внутри модуляционного слоя движение является стохастическим.

Отметим, что явление медленного прохождения резонанса дает интересный пример процесса, при котором перекрытие модуляционных резонансов может, для некоторых начальных условий, приводить и к регулярному движению.

Для "случайного" возмущения выражение (2.3.11) уже не работает. Вместо этого оказывается приблизительно справедливой "типичная" оценка для h , полученная в /31/ на основе концепции перенормированных резонансов

$$h_T \approx 0.066 \cdot \Omega s^{4/3} \quad (2.3.15)$$

Численный множитель в этом выражении взят из работы /32/.

где он получен путем решения соответствующего кинетического уравнения в квазилинейном приближении. Среднее значение отношения численных значений h к теоретическим (2.3.15) равно $\langle h/h_T \rangle = 0.89 \pm 0.05$.

Перенормировка резонансов производится следующим образом /31/. Перенормированная ширина резонанса $(\Delta\omega')$ определяется всеми гармониками возмущения, попавшими в перенормированную ширину, причем в силу случайности фаз разных гармоник складываются квадраты их амплитуд, т.е. четвертые степени перенормированной ширины отдельных резонансов $(\Delta\omega)$. Отсюда

$$(\Delta\omega')^4 \sim (\Delta\omega)^4 \frac{(\Delta\omega')}{\Omega}$$

и

$$h \sim \Delta\omega' \sim \frac{(\Delta\omega)^{4/3}}{\Omega^{1/3}} \sim \Omega \cdot s^{4/3}$$

так как $s \sim (\Delta\omega/\Omega)$

КС-энтропию также можно рассматривать как одно из важных статистических свойств стохастического движения. Хотя она и не связана непосредственно со скоростью диффузии, как это видно из только что рассмотренных примеров, локальная неустойчивость движения, которую она характеризует, является определяющим механизмом возникновения статистических свойств динамического движения. С другой стороны, интересно отметить, что существует и обратная зависимость: если задано случайное возмущение (с непрерывным спектром), зависящее от координат, это автоматически приводит к экспоненциальной локальной неустойчивости движения, что непосредственно следует из вывода соотношения (2.3.15) в работе /32/.

Общее описание корреляционного спектра $D_R(y)$ можно дать на основе следующих представлений. Будем считать, что спектр определяется двумя различными механизмами:

1. локальным законом стохастического движения со спектром $d_R(y)$

2. смещением этого спектра на величину $q \cdot \rho$ за счет диффузии поперек стохастического слоя.

Результирующий спектр будет определяться тогда сверткой

$$D_R(y) = \frac{1}{2q} \int_{-q}^q d_R(y-y_1) dy_1 \quad (2.3.16)$$

Локальный спектр удается подогнать с помощью соотношения

$$d_R(y) = \frac{\pi}{2} \lambda \frac{\sin \beta}{\beta} \cdot \frac{1}{\cos \beta + \cosh(\lambda y)} \quad (2.3.17)$$

где β - некоторый дополнительный параметр, связанный с величиной B в (2.3.10). Тогда полный спектр, включающий плато, "обрыв" и экспоненциальный "хвост", может быть описан посредством:

$$D_R(y) = \frac{\pi}{2q\beta} \left[\arctan(\tanh(\lambda \frac{q-y}{2}) \tan \frac{\beta}{2}) + \arctan(\tanh(\lambda \frac{q+y}{2}) \tan \frac{\beta}{2}) \right] \quad (2.3.18)$$

Проведя Фурье-преобразование, получим корреляционную функцию процесса $\sin x(t)$ в виде

$$R(\tau) = \frac{\pi}{\beta} \frac{\sin(q\Delta\omega \cdot \tau)}{q\Delta\omega \cdot \tau} \cdot \frac{\sinh(\frac{\beta\Delta\omega \tau}{\lambda})}{\sinh(\frac{\pi\Delta\omega \tau}{\lambda})} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} e^{-\frac{\xi\Delta\omega \tau}{\lambda}} \quad (2.3.19)$$

где $\xi = \pi - \beta$. Таким образом, асимптотически при $\tau \rightarrow \infty$ корреляции затухают экспоненциально, хотя, вначале, когда корреляции еще велики, они убывают лишь как $1/\tau$.

Из (2.3.19) следует, что показатель экспоненты определяется двумя безразмерными параметрами ξ, λ . Так как λ является константой ($\lambda \approx 2\pi$), то зависимость от параметров системы определяется только ξ , которое связано с "обрывом" спектра и параметром B :

$$B = \pi \frac{\sin \xi}{\pi - \xi} \cdot \frac{\sinh(\lambda q)}{q} \quad (2.3.20)$$

Можно предположить, что скорость экспоненциального затухания корреляций в (2.3.19) пропорциональна КС-энтропии h :

$$R(\tau) \sim \exp(-c h \tau); \quad \tau \rightarrow \infty \quad (2.3.21)$$

где c - некоторая константа, не зависящая от параметров системы. Отсюда получаем связь между ξ, h, c :

$$\xi = c \frac{dh}{d\omega} \quad (2.3.22)$$

Для модуляционной диффузии

$$\xi = 2c \frac{\ln s}{\lambda} \quad (2.3.23)$$

Проведенные численные эксперименты дают следующее среднее значение константы: $c = 0.47 \pm 0.21$. Большая величина ошибки при определении c связана со значительными флуктуациями (см. рис. 4).

Для "случайного" возмущения выражение для ξ принимает вид:

$$\xi \approx 0.13 \cdot c \frac{s^{4/3}}{\lambda} \quad (2.3.24)$$

Среднее измеренное значение $c = 0.13 \pm 0.028$.

При $q \neq 1$ корреляционный спектр $D(\omega)$ претерпевает следующие изменения:

1. как и ожидалось, размер плато становится равным $q \Delta \omega$ (для $q > 3/2$), а скорость диффузии на плато $D(\omega) \approx \frac{(\sqrt{\epsilon^2})}{(2q\lambda\Omega)}$.

2. в экспоненциальной зависимости на "хвосте" изменяется только предэкспонента B (см. 2.3.20).

Эти изменения хорошо описываются соотношениями (2.3.16-2.3.18). Так, при $q < 3/2$ размер плато оказывается не зависящим от q , что согласуется с (2.3.18).

Для скорости диффузии на "хвосте" окончательно получаем ($\xi \ll 1; q > 1/2\pi$):

$$D(\omega) \approx \frac{\epsilon^2 \ln s}{2\lambda^2 \Omega q} \cdot \exp(-2\pi(\frac{\omega}{\Delta\omega} - q)) \quad (2.3.25)$$

в случае частотной модуляции (2.3.2) и

$$D(\omega) \approx 8.5 \cdot 10^{-3} \frac{\epsilon^2 s^{4/3}}{\lambda^2 \Omega q} \exp(-2\pi(\frac{\omega}{\Delta\omega} - q)) \quad (2.3.26)$$

для "случайного" возмущения.

Возвращаясь к задаче о модуляционной диффузии (раздел 2.2), можем написать теперь явное выражение для ее скорости. Сравнивая (2.3.2) с (2.2.8), находим, что $x = \theta_1 - m \nu t$. Тогда из (2.2.7) и (2.3.4) следует, что $q = 1$ и $\omega = \omega_2 - m \nu$ для первого члена в (2.2.7) и $\omega = \omega_2 + m \nu$ для второго члена. Если $\lambda \Omega \ll \nu$, то поскольку скорость диффузии зависит от ω экспоненциально (2.3.25), вторым членом в (2.2.7) можно пренебречь. Вне плато ($|\omega| > \lambda \Omega$) скорость диффузии по I_2 равна:

$$D_{I_2} \approx \frac{m^2 a_1^2 a_2^2 \ln s}{8 \lambda^2 \Omega} \cdot \exp\left\{-2\pi\left(\frac{|\omega_2 - m \nu|}{\lambda \Omega} - 1\right)\right\} \quad (2.3.27)$$

Помимо внешней модуляции частот возможна, и фактически всегда имеет место некоторая "самомодуляция" за счет так называемых фазовых колебаний невозмущенных переменных (в том числе и невозмущенных частот) под действием резонансного возмущения. Так как вблизи сепаратрисы нелинейного резонанса частота фазовых колебаний $\Omega_{\varphi} \rightarrow 0$, то соответствующие модуляционные резонансы всегда перекрываются, образуя стохастический слой вдоль сепаратрисы. Движение системы вдоль этого слоя получило название диффузии Арнольда, которая подробно рассмотрена, например, в [18]. Отметим, что зависимость скорости диффузии Арнольда от частоты возмущения:

$$D_A(\omega) \propto e^{-\frac{\pi \omega}{\Omega_{\varphi}}}$$

похожа на выражение (2.3.10) для модуляционной диффузии. Это сходство становится еще более полным, если заметить,

что полуширина Фурье-спектра движения в стохастическом слое вблизи сепаратрисы (величина, аналогичная $\Delta\omega$ для модуляционной диффузии) равна $2\Omega_{\varphi}$. Отсюда следует, в частности, что скорость диффузии в обоих случаях сравнима по величине (при $\Delta\omega \sim \Omega_{\varphi}$).

Имеется, однако, два существенных различия между этими процессами:

1. диффузия Арнольда является универсальной в том смысле, что она сохраняется при сколь угодно слабом возмущении, тогда как модуляционная диффузия имеет порог, определяемый перекрытием резонансов мультиплета;

2. ширина модуляционного стохастического слоя, вообще говоря, значительно превышает ширину слоя, по которому идет диффузия Арнольда.

Таким образом, если модуляционные стохастические слои образуются, диффузия по ним идет, в среднем, значительно быстрее, чем диффузия Арнольда.

Л и т е р а т у р а :

- I. F.M.Izrailev, Nearly linear mappings and their applications, Physica D, 1980 (in print).
2. Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков, Письма в ЖЭТФ 26, (1977) 186.
3. Б.В.Чириков, Физика плазмы 4:3 (1978) 527; 5:4 (1979) 880.
4. В.Д.Ильин, А.Н.Ильина, ЖЭТФ 72:3 (1977) 983.
5. А.К.Nekrasov, Nucl. Fusion 10 (1970) 387; E.F.Jaeger, A.J.Lichtenberg, M.A.Lieberman, Plasma Physics 14 (1972) 1073.
6. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков, УФН 105:1 (1971) 3.
7. В.М.Алексеев, М.В.Якобсон, Символическая динамика и гиперболические динамические системы, добавление в кн. Р.Боуэн, Методы символической динамики, Мир, Москва, 1979.
8. А.К.Звонкин, Л.А.Левин, УМН, 25:6 (1970) 85.
9. Я.Г.Синай, УМН 25:2 (1970) 141
10. E.N.Lorenz, J.Atmosph. Sci. 20 (1963) 130.
- II. Д.В.Аносов, Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Тр.матем.инст. им.Стеклова, 90, 1967.
- I2. S.Smale, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 747.
- I3. B.V.Chirikov, F.M.Izrailev, Some Numerical Experiments with a nonlinear mapping: stochastic component, Colloques Internationaux du C.N.R.S. No 229 Transformations Ponctuelles et leurs Applications (Toulouse, 10-14 Sept. 1973), CNRS, Paris (1976) p. 409; Degeneration of Turbulence in Simple Systems, Physics Reports, 1980 (in print).
- I4. М.И.Рабинович, УФН 125:1 (1978) 123
- I5. Л.А.Бунимович, ДАН СССР 211:5 (1973) 1024.
Я.Б.Песин, УМН 32:4 (1977) 55;
L.A.Bunimovich, Commun. Math. Phys. 65 (1979) 295.
- I6. Н.Н.Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, АН УССР, 1945.

17. J.Ford, A Picture Book of Stochasticity, AIP Conf. Proc., No 46, 1978, p. 121.
18. B.V.Chirikov, Physics Reports 52:5 (1979) 265.
19. V.I.Arnold, A.Avez, Ergodic Problems of Classical Mechanics (Benjamin, New York, 1968).
20. J.M.Greene, J. Math. Phys. 20:6 (1979) 1183.
21. G.Schmidt, Stochasticity and Fixed Point Transitions, Centre de Physique Theoretique, Ecole Polytechnique, 1980 (unpublished).
22. Б.В.Чириков, Нелинейный резонанс, Новосибирск, НГУ, 1977.
23. Б.В.Чириков, Взаимодействие нелинейных резонансов, Новосибирск, НГУ, 1978.
24. D.F.Escande, F.Doveil, Renormalization Method for Computing a Stochasticity Threshold, Intern. Conf. on Plasma Physics, Nagoya, 1980.
25. M.Aizenman, S.Goldstein, J.L.Lebowitz, Commun. Math. Phys., 39, (1975), 289.
26. Г.В.Гадияк, Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, Численные эксперименты по универсальной неустойчивости в нелинейных колебательных системах (диффузия Арнольда), Труды 7-й Межд.конф. по нелинейным колебаниям (Берлин, 1975). Akademie-Verlag, Berlin, 1977, Band II, 1, S. 315.
27. B.V.Chirikov, J.Ford, F.Vivaldi, Some Numerical Studies of Arnold Diffusion in a Simple Model, in Nonlinear Dynamics and Beam-Beam Interaction, A.I.P.Conf. Proc. No 57, 1979, p. 323.
28. B.V.Chirikov, Adiabatic Invariants and Stochasticity in Magnetic Confinement Systems, Int. Conf. on Plasma Physics, Nagoya, 1980.
29. Tennyson, M.A.Lieberman, A.J.Lichtenberg, Diffusion in Near-Integrable Hamiltonian Systems with Three Degrees of Freedom, in Nonlinear Dynamics and Beam-Beam Interaction, A.I.P. Conf. Proc. No 57, 1979, p. 272.
30. C.Froeschle, Thesis, Universite de Nice, 1971.
31. Б.В.Чириков, Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности, препринт 267, ИЯФ СО АН СССР, (CERN Transl. 71-40, Geneva, 1971).

32. A.V.Rechester, M.N.Rosenbluth, R.V.White, Phys. Rev. Lett. 42:19 (1979) 1247.
33. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, Д.Л.Шепелянский. Переходная стохастичность в квантовой механике. Препринт ИЯФ 80-210 Новосибирск, 1980.
34. Н.С.Крылов, Работы по обоснованию статистической физики АН СССР, М. 1950 (Engl. trans. N.S.Krylov, Foundation of Statistical Mechanics, Princeton, 1979).

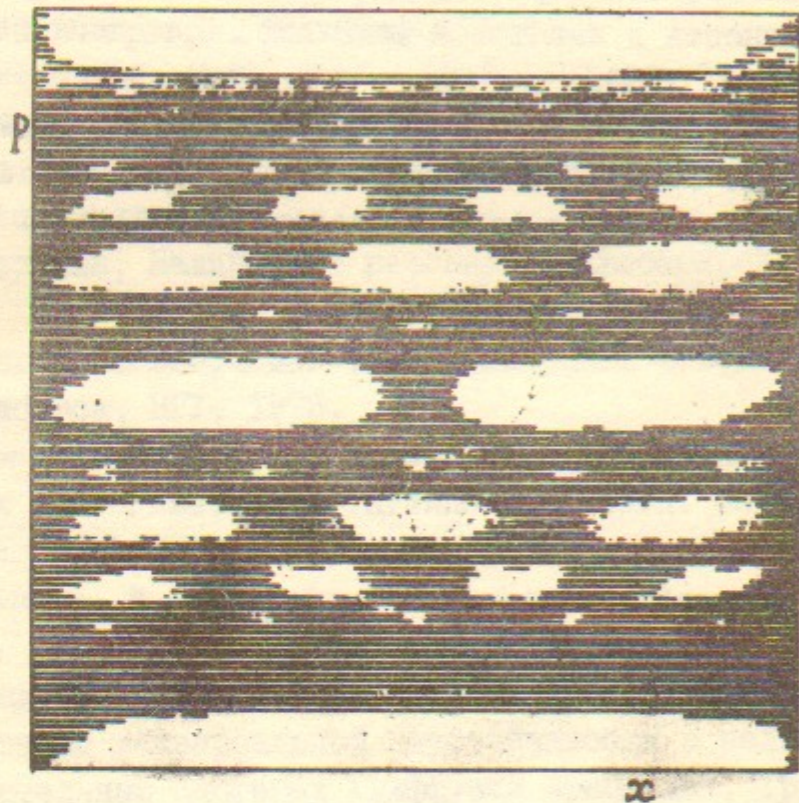


Рис.1. Фазовая плоскость отображения (2.1.7): $\alpha = 0.95$;
 $\epsilon = 0.323$; $\mathcal{K} = 6.5 \times 10^{-3} > \mathcal{K}_{cc} = 4.6 \times 10^{-3}$ (см.
 2.1.13). Стохастическая компонента заштрихована.

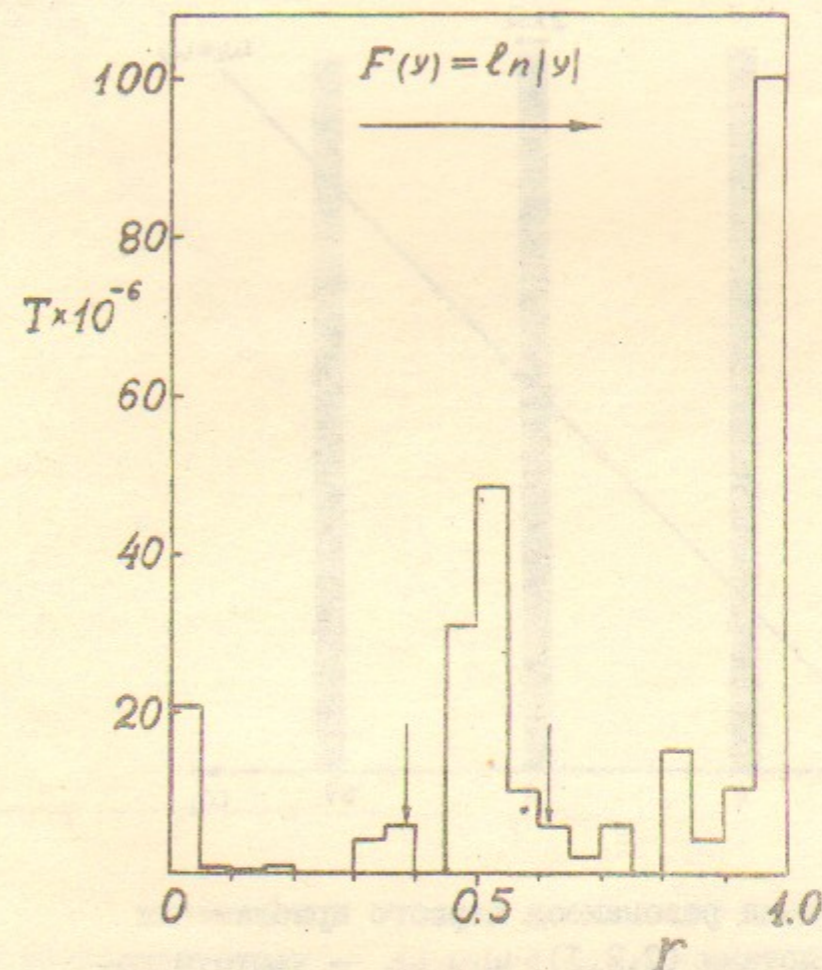


Рис.2. Гистограмма "проходимости" различных участков системы резонансов: $r = \{\lambda \cdot F(y_m) / 2\pi\}$
 T - время пребывания (число итераций) величины y_m в заданном интервале периода резонансной структуры.

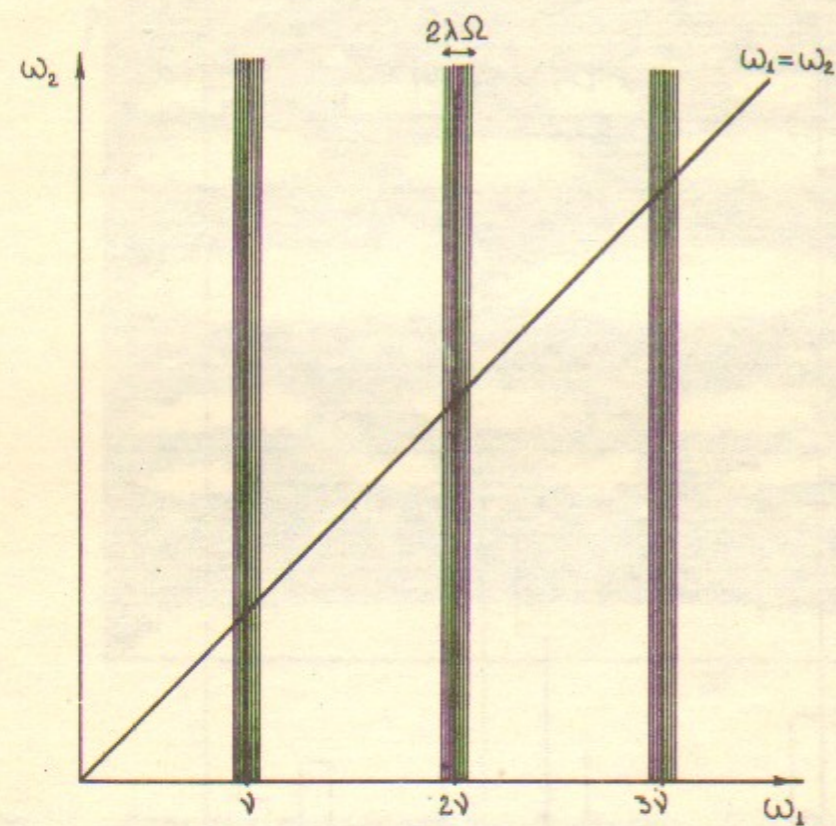


Рис.3. Схема резонансов первого приближения системы (2.2.1): ω_1, ω_2 - частоты колебаний осцилляторов; ν - средняя частота внешней силы; Ω - частота модуляции, приводящей к образованию мультиплетов.

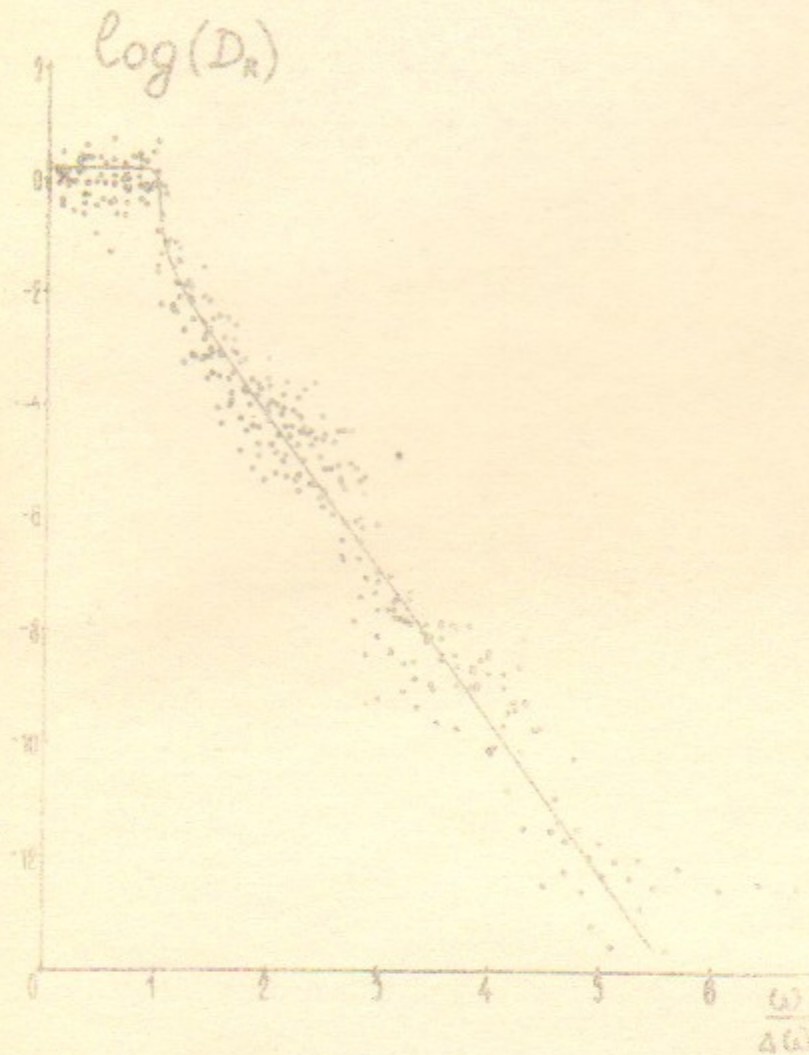


Рис.4. Частотная зависимость скорости модуляционной диффузии (обозначения - см. в тексте, логарифм - десятичный). Точки - численные значения скорости диффузии по \bar{z} для системы (2.3.2), (2.3.4) при $q = 1$. Сплошная кривая построена по формуле (2.3.18) со средними эмпирическими значениями $\langle \lambda \rangle = 6,21$; $\langle \beta \rangle = 91 - 0,065$.