

Б.18

22

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ  
ПРИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОМ  
ДВИЖЕНИИ

ПРЕПРИНТ 80-181



Новосибирск

ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ ПРИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОМ  
ДВИЖЕНИИ

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

А Н Н О Т А Ц И Я

В квазиклассическом приближении получены спектрально-угловые распределения и поляризационные характеристики излучения при таком движении релятивистской частицы, которое является периодическим в системе, движущейся со средней скоростью частицы. Результаты приведены в форме, удобной для приложений, например, для описания излучения в ондуляторах и излучения при каналировании релятивистских частиц в кристаллах.

## I. Введение

В последние годы большое внимание привлекает излучение релятивистских частиц при каналировании [1-3]. Продолжается исследование излучения в периодических структурах (ондуляторах), в частности в связи с разработкой лазеров на свободных электронах [4-6]. Развитие лазерной техники, позволяющей получать волны с высокой напряженностью электромагнитного поля (до  $10^9$  в/см) стимулировало широкие исследования квантовых процессов в поле интенсивной электромагнитной волны [7-8]. Особый интерес представляет излучение ультрарелятивистских электронов и позитронов ( $\gamma = \varepsilon / mc^2 \gg 1$ ).

Указанной проблематике посвящено большое число работ, причем теоретическое описание проводится, как правило, для каждого из этих явлений в отдельности и весьма различными методами. В то же время следует иметь в виду, что при  $\gamma \gg 1$  элементарный акт излучения происходит одинаково для всех указанных выше процессов и, следовательно, описывается одними и теми же формулами, поскольку мы имеем дело с излучением релятивистской частицы, когда её движение в системе, движущейся со средней скоростью частицы, является периодическим (такое движение мы будем называть квазипериодическим). Отличия же перечисленных выше задач обусловлены специфической зависимостью от физических параметров, а также необходимостью усреднения полученных характеристик излучения по некоторым из них.

Обсудим основные качественные особенности излучения при квазипериодическом движении. Это рассмотрение удобно проводить в сопутствующей системе, где в среднем скорость частицы равна нулю, а затем провести обратное преобразование Лоренца. В сопутствующей системе свойства излучения существенно зависят от соотношения кинетической энергии и массы покоя частицы. В нерелятивистском пределе излучение является дипольным и полностью определяется Фурье-компонентами скорости частицы [4]. При этом, как правило, излучается одна или несколько первых гармоник, кратных частоте движения частицы. Проводя обратное преобразование в лабораторную систему, имеем в результате для частоты излученного фотона  $\omega$  (Доплер-эффект)

\*) Если учесть отдачу при излучении, то в формуле (I.1) следует заменить  $\omega \rightarrow \omega' = \omega \varepsilon / (\varepsilon - \omega)$

$$\omega \approx \frac{n\omega_0}{1 - \vec{n}_0 \vec{v}} \approx \frac{2\gamma^2 \omega_0 n}{1 + \gamma^2 \vartheta^2} \quad (1.1)$$

где  $\omega_0$  - частота движения частицы в Л-системе,  $\vartheta$  - угол вылета фотона относительно средней скорости движения частицы  $\vec{V}$ ,  $n$  - номер гармоники,  $\vec{n}_0 = \vec{k}/\omega$ ,  $\vec{k}$  - волновой вектор фотона.

По мере того как движение в сопутствующей системе становится релятивистским, характер излучения меняется. Во-первых, в излучении оказываются существенными высшие гармоники, во-вторых, становится необходимым учитывать зависимость продольной скорости частицы (в направлении средней скорости) от ее поперечного движения. Действительно, с точностью до членов  $\sim U/\varepsilon$  ( $U$  - потенциал, в котором движется частица),  $\gamma = \text{const}$  и по определению  $\gamma^2(1 - v_{||}^2 - v_{\perp}^2) = 1$ , так что для продольной  $v_{||}$  и средней скорости  $V$  частицы имеем соответственно \*):

$$v_{||} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} (1 + v_{\perp}^2 \gamma^2), \quad V = 1 - \frac{1}{2\gamma^2} (1 + \overline{v_{\perp}^2} \gamma^2) \quad (1.2)$$

При этом выражение для частоты излучения принимает вид

$$\omega \approx \frac{2\gamma^2 \omega_0 n}{1 + \gamma^2 \vartheta^2 + \overline{v_{\perp}^2} \gamma^2} \quad (1.3)$$

где  $\overline{v_{\perp}^2}$  - среднее значение квадрата поперечной скорости частицы.

В ультрарелятивистском пределе движения в сопутствующей системе ( $v_{\perp} \gamma \gg 1$ ) основной вклад в излучение дают высокие гармоники  $n \gg 1$ . Спектр излучения имеет квазинепрерывный характер и применимы известные формулы, описывающие магнитотормозное излучение (см., напр. \*\*, [9]). В этом пределе излучение формируется на небольшом участке траектории за время  $\tau \sim c/|\dot{\vec{v}}| \gamma$  а характерная частота излучения с учетом эффекта Доплера есть  $\omega \sim |\dot{\vec{v}}| \gamma^3$ . Учитывая, что основной вклад в излучение дают углы  $\vartheta \sim v_{\perp}$  имеем оценку для

$$n \sim v_{\perp}^2 |\dot{\vec{v}}| \gamma^3 / \omega_0 \approx (v_{\perp} \gamma)^3 \quad (1.4)$$

\*\*) Мы будем везде предполагать, что  $|\vec{v}_{\perp}| \ll V$   
 \*\*) Следует при этом иметь в виду, что эти формулы перестают быть справедливыми при достаточно малых частотах, когда  $n \sim 1$

Настоящая работа посвящена последовательному рассмотрению излучения при квазипериодическом движении. Поскольку нерелятивистский предел поперечного движения (см., напр., [4]) и его ультрарелятивистский предел (см., напр., [9]) к настоящему времени хорошо изучены, то основное внимание уделено общему (промежуточному) случаю. Для каждой из характеристик излучения авторы старались получить представления, удобные как для качественного анализа, так и для проведения численных расчетов.

## 2. Основные формулы

Наиболее адекватным подходом к задаче об излучении релятивистских частиц при квазипериодическом движении является формализм, использующий операторный квазиклассический метод, развитый двумя из авторов (см., напр., [9]). Этот метод позволяет после проведения необходимых коммутаций и распутывания экспоненциальных выражений перейти к величинам на классической траектории частицы, отдача фотоном при этом учитывается точно. Общая формула для интенсивности излучения имеет вид:

$$dI = e^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \left| \int dt R(t) e^{ik'x(t)} \right|^2 \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} R(t) &= \psi_f^+ [A(t) + i\vec{\sigma} \vec{B}(t)] \psi_i, \\ A(t) &= \frac{\vec{e}^* \vec{p}(t)}{2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon'+m}{\varepsilon+m}} + \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{\varepsilon'+m}} \right), \\ \vec{B}(t) &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon'+m}{\varepsilon+m}} [\vec{e}^* \vec{p}(t)] - \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{\varepsilon'+m}} [\vec{e}^* (\vec{p}(t) - \vec{k})] \right), \\ k'^M &= k^M \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}, \quad \varepsilon' = \varepsilon - \omega, \quad k^M = (\omega, \vec{k}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Приведенные формулы определяют все характеристики излучения, в том числе поляризационные. Интенсивность излучения, просуммированная по спину конечного электрона и усредненная по спину начального, имеет вид (ср. формулы (10.75-76) в [9])

$$dI = e^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \int dt_1 \int dt_2 L(t_1, t_2) \exp\{ik'(x_1 - x_2)\} \quad (2.3)$$

где

$$L(t_1, t_2) = \frac{(\varepsilon + \varepsilon')^2}{4\varepsilon'^2} (\vec{e}^* \vec{v}_1) (\vec{e} \vec{v}_2) - \quad (2.4)$$

$$- \frac{\omega^2}{4\varepsilon'^2} (\vec{e}^* \vec{v}_2) (\vec{e} \vec{v}_1) + \frac{\omega^2}{4\varepsilon'^2} (\vec{v}_2 \vec{v}_1 - 1 + \frac{1}{\gamma^2}) (\vec{e}^* \vec{e})$$

здесь введены обозначения  $x_{1,2} = x(t_{1,2})$ ,  $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}(t_{1,2})$

Суммируя по поляризациям фотона имеем

$$\bar{L} = \sum_{\lambda=1}^2 L(t_1, t_2) = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2}{2\varepsilon'^2} (\vec{v}_2 \vec{v}_1 - 1) + \frac{\omega^2}{2\gamma^2 \varepsilon'^2} \quad (2.5)$$

Возможны два способа проведения вычислений с полученными выше выражениями. Первый из них связан с непосредственным вычислением интеграла

$$\int v^M(t) e^{ik'x(t)} dt$$

где  $v^M = (1, \vec{v})$

На таком пути достаточно наглядно просматривается физическая картина явления и основные особенности излучения. Однако, проведение дальнейших вычислений может оказаться затруднительным, особенно это относится к случаю плоского движения частицы.

Другим подходом является непосредственное использование выражений (2.4) и (2.5). При этом интегрирование по угловым переменным <sup>\*</sup> излученного фотона может быть проведено без труда, что позволяет получить, например, формулы для спектрального распределения, удобные для численных расчетов. Другим достоинством этого способа является достаточная простота и наглядность получения асимптотических выражений как в случае нерелятивистского поперечного движения, так и в другом предельном случае, когда поперечное движение является ультрарелятивистским.

\* В случае, когда  $\omega \ll \varepsilon$ , т.е. излучение является классическим, интегрирование по  $\omega$  в этих формулах приводит к известным результатам классической теории, выраженным через потенциалы Лиенара-Вихерта.

### 3. Спектрально-угловое распределение излучения

Входящий в (2.3) интеграл представим в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^M(t) e^{ik'x(t)} dt = v_n^M \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi_0} = \quad (3.1)$$

$$= \sum_n 2\pi v_n^M \delta(\varphi_0 - 2\pi n)$$

здесь

$$\varphi_0 = \omega' T (1 - \vec{n}_0 \vec{V}), \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (3.2)$$

$$v_n^M = \int_0^T v^M(t) e^{ik'x(t)} dt,$$

T - период движения.

Подставляя (3.1) в (2.5) имеем для интенсивности излучения в единицу времени

$$dI = e^2 \frac{d^3k}{4\pi T} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(\varphi_0 - 2\pi n) [(1 + (1+u)^2) \cdot \quad (3.3)$$

$$\cdot (|\vec{v}_n|^2 - |v_n^0|^2) + \frac{u^2}{\gamma^2} |v_n^0|^2]$$

где  $u = \omega / \varepsilon' = \omega / (\varepsilon - \omega)$

Воспользовавшись формулой (1.2), вводя обозначение

$$\Delta(t) = \omega_0 \int_0^t (\vec{v}_\perp^2(t') - \overline{\vec{v}_\perp^2}) dt' \quad (3.4)$$

где  $\omega_0 = 2\pi/T$  и отбрасывая члены более высокого порядка по  $1/\gamma^2$  и  $v_\perp^2$ , получаем следующее выражение для спектрально-углового распределения излучения

$$dI = e^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^2} \frac{(1+u)}{\omega_0 \gamma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(\varphi_0 - 2\pi n) \cdot \quad (3.5)$$

$$\cdot [-|I_0|^2 + \gamma^2 f(u) (|\vec{I}_\perp|^2 - \text{Re}(I_0^* I_\parallel))],$$

$$f(u) = 1 + \frac{u^2}{2(1+u)}$$

где

$$I_0 = \int_0^{2\pi} e^{i\Gamma(\psi)} d\psi, \quad \vec{I}_1 = \int_0^{2\pi} \vec{v}_1(\psi) e^{i\Gamma(\psi)} d\psi,$$

$$I_n = \int_0^{2\pi} \vec{v}_1^2(\psi) e^{i\Gamma(\psi)} d\psi, \quad \psi = \omega_0 t, \quad (3.6)$$

$$\Gamma(\psi) = n\psi + \omega' \Delta(\psi) / 2\omega_0 - \omega' \vec{n}_0 \vec{x}_1(\psi)$$

здесь мы воспользовались тем, что  $\varphi_0 = \omega' T(1 - \vec{n}_0 \vec{V})$ , причем частота излученных фотонов определяется соотношением (ср. формулу (1.3))

$$\omega' = \omega \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \omega} = \frac{2\gamma^2 \omega_0 n}{1 + \gamma^2 \vartheta^2 + \rho/2} \quad (3.7)$$

где  $\vartheta$  - угол вылета фотона относительно  $\vec{V}$ ,  $\rho = 2\gamma^2 \vec{v}^2$ . Характер излучения существенно зависит от  $\rho$ : при  $\rho \ll 1$  излучение является дипольным, при  $\rho \gg 1$  - имеет магнитотормозной характер.

Входящие в (3.6) интегралы имеют относительно простой вид только для кругового поперечного движения, когда  $|\vec{v}_1| = \text{const}$ . В этом случае  $\Delta(\psi) = 0$ ,

$$\Gamma(\psi) = n\psi - \varkappa \sin(\psi - \varphi), \quad I_n = v_1^2 I_0, \quad (3.8)$$

$$|I_0|^2 = (2\pi)^2 J_n^2(\varkappa), \quad |\vec{I}_1|^2 = 2\pi^2 v_1^2 \cdot$$

$$\cdot [J_{n+1}^2(\varkappa) + J_{n-1}^2(\varkappa)], \quad \varkappa = \omega' \frac{v_1 \vartheta}{\omega_0},$$

где  $J_n(\varkappa)$  - функция Бесселя,  $\varphi$  - азимутальный угол вылета фотона. Интегрируя по углам вылета фотона (интегрирование по  $\varphi$  - тривиально, интегрирование по  $\vartheta$  сводится к интегрированию  $\delta$  - функции в (3.5)), получаем следующее выражение для спектральной плотности излучения в случае кругового движения частицы (индекс "с2")

$$dI_{c2}^{(i)} = \frac{e^2}{\gamma^2} \omega d\omega \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta (n\omega_c - \omega') G_{c2}^{(i)},$$

$$G_{c2}^{(0)} = -J_n^2(\varkappa) + \frac{\rho f(u)}{4} [J_{n+1}^2(\varkappa) + J_{n-1}^2(\varkappa) - 2J_n^2(\varkappa)], \quad G_2^{(1)} = 0, \quad (3.9)$$

$$G_{c2}^{(2)} = f(u) J_n(\varkappa) [J_{n-1}(\varkappa) - J_{n+1}(\varkappa)] \left( \frac{n\rho}{2\varkappa} - \frac{\varkappa}{2\varkappa} \right),$$

$$G_{c2}^{(3)} = J_n^2(\varkappa) \left( 1 + \frac{\rho}{2} \right) - \frac{\rho}{2} J_{n-1}(\varkappa) J_{n+1}(\varkappa)$$

Здесь и ниже индекс "0" используется для выражений, просуммированных по поляризациям фотона, а параметры Стокса

$\xi^{(i)} = dI^{(i)} / dI^{(0)}$ . Здесь  $\omega_c = 2\gamma^2 \omega_0 / (1 + \rho/2)$ ,  $\varkappa = \frac{\omega'}{2\gamma^2 \omega_0}$ . Вектора  $\vec{e}^{(\lambda)}$  - поляризации фотона выбраны так:

$$\vec{e}^{(1)} = [\vec{n}_0 \vec{V}] / |[\vec{n}_0 \vec{V}]|, \quad \vec{e}_2 = [\vec{n}_0 \vec{e}_1]$$

В случае плоского движения частицы, не нарушая общности, можно положить  $v_x(\psi)$  четной функцией  $\psi$  ( $v_y = 0$ ) тогда  $\Gamma(\psi)$ , входящая в выражение (3.6) становится (с точностью до постоянного слагаемого) нечетной функцией  $\psi$ . Таким образом с точностью до общего фазового множителя величины  $I_0$ ,  $I_x$ ,  $I_n$  являются действительными. Это означает, что при плоском квазипериодическом движении излучение может быть поляризовано только линейно. С физической точки зрения этот факт очевиден, поскольку при таком движении у нас отсутствует псевдовектор, которым могла бы быть связана круговая поляризация излучения.

С учетом вышесказанного имеем \*) для плоского движения (индекс "p"):

\*) После интегрирования по азимутальному углу вылета фотона

$$G_p^{(1)} = 0$$

$$dI_p^{(i)} = e^2 \frac{\omega d\omega d\varphi}{(2\pi)^3 \chi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(n\omega_c - \omega') G_p^{(i)},$$

$$G_p^{(0)} = -I_0^2 + \chi^2 f(u) (I_x^2 - I_0 I_{II}),$$

$$G_p^{(1)} = 2I_x \sin\varphi (I_x \cos\varphi + \delta I_0) \chi^2, \quad G_p^{(2)} = 0,$$

$$G_p^{(3)} = [I_x^2 \sin^2\varphi - (I_x \cos\varphi - \delta I_0)^2] \chi^2 \quad (3.10)$$

Считая, что плоское движение частицы определяется некоторым потенциалом  $U(x)$  и используя квазиклассическое условие квантования энергии в этой одномерной яме можно представить величину  $\overline{v_x^2}$  в виде:

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{T\varepsilon} \oint p_x dx \simeq \frac{\omega_0 n_x}{\varepsilon} = -2 \frac{\partial \varepsilon_{\perp}(\varepsilon, n_x)}{\partial \varepsilon} \quad (3.11)$$

где  $n_x$  - номер уровня.

В частном случае движение в осцилляторном потенциале спектральную плотность излучения можно записать в форме:

$$dI_p = e^2 \frac{\omega d\omega d\varphi}{(2\pi)^3 \chi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(n\omega_c - \omega') \cdot (3.12)$$

$$\cdot [-A_0^2 + \rho f(u) (A_1^2 - A_0 A_2)],$$

где

$$A_m = \int_0^{2\pi} \cos^m \psi e^{i\Gamma(\psi)} d\psi,$$

$$\Gamma(\psi) = n\psi - \alpha_0 \sin\psi + \beta_0 \sin 2\psi, \quad (3.13)$$

$$\alpha_0 = \frac{\omega'}{\omega_0} \sqrt{\frac{2\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}} \delta \cos\varphi, \quad \beta_0 = \frac{\omega' \varepsilon_{\perp}}{4\omega_0 \varepsilon}$$

В этом случае:  $\rho = 2\chi \varepsilon_{\perp} / m$ .

Формулы (3.9), (3.12) совпадают с выражениями для спектральной плотности излучения в поле монохроматической плоской волны с соответственно циркулярной и линейной поляризациями. Это совпадение не является случайным и связано с тем, что в сопутствующей системе отсчета электрона, поле, в котором движется электрон, с релятивистской точностью совпадает с полем волны. Спектральное распределение излучения в поле плоской волны подробно исследовалось в работах [7,8] (см. также цитированную там литературу).

#### 4. Спектральное распределение излучения

Для получения спектрального распределения интенсивности излучения можно провести интегрирование по углам вылета фотона в формуле (2.3) при помощи соотношения

$$\int_0^{2\pi} \delta \delta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(a\delta^2 + b\delta \cos\varphi)} = \frac{i\pi}{a} e^{-i\frac{b^2}{4a}} \quad (4.1)$$

Переходя также к переменным  $t = \omega_0(t_2 - t_1)/2$ ,  $z = \omega_0(t_2 + t_1)/2$  находим для интенсивности излучения

$$dI = \frac{ie^2 m^2 u du}{(2\pi)^2 (1+u)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} \int_0^{2\pi} dz \left[ f(u) \chi^2 (1 - \vec{v}_1 \vec{v}_2) - \frac{u^2}{2(1+u)} \right] \cdot \exp \left\{ -\frac{i u \varepsilon}{2\omega_0 \chi^2} \left[ 2t(1+\beta/2) + \chi^2 (\Delta_2 - \Delta_1) - \frac{1}{2t} \omega_0^2 \chi^2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)_{\perp}^2 \right] \right\} \quad (4.2)$$

Индексы 1,2 означают соответственно зависимость от переменных  $t_1 = (z-t)/\omega_0$ ,  $t_2 = (z+t)/\omega_0$ . Обратим внимание на важное обстоятельство. Для того, чтобы интеграл по  $t$  в (4.2) был корректно определен достаточно считать, что контур интегрирования по  $t$  смещен ниже вещественной оси. Эта операция соответствует вычитательной процедуре при нахождении массового оператора во внешнем поле (см. [8]) и обеспечивает, в частности, обращение в нуль интенсивности излучения при выключении поля.

Рассмотрим случай эллиптического поперечного движения частицы:

$$v_x(t) = a \cos \omega_0 t, \quad v_y(t) = b \sin \omega_0 t$$

Приведем выражения в (4.2) к виду:

$$\gamma^2 (1 - \vec{v}_1 \vec{v}_2) = 1 + \rho \sin^2 t (1 - \alpha \cos 2z) \quad (4.3)$$

$$\gamma^2 (\Delta_2 - \Delta_1) = \frac{1}{2} \alpha \rho \sin 2t \cos 2z$$

$$\gamma^2 \omega_0^2 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)_\perp^2 = 2 \rho \sin^2 t (1 + \alpha \cos 2z)$$

где  $\rho = \gamma^2 (a^2 + b^2)$ ,  $\alpha = (a^2 - b^2) / (a^2 + b^2)$   
 После этого интегрирование по  $z$  проводится без труда \*)

$$dI = \frac{ie^2 m^2}{2\pi} \frac{u du}{(1+u)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-iz_1} \left[ J_0(\alpha z_0) + \right. \\ \left. + f(u) \rho \sin^2 t (J_0(\alpha z_0) - i \alpha J_1(\alpha z_0)) + \right. \\ \left. + \frac{i u (2+u)}{2(1+u)} \rho \beta (\vec{z} \vec{V}) \sin t \left( \frac{\sin t}{t} - \cos t \right) J_0(\alpha z_0) \right] \quad (4.4)$$

здесь  $z_0 = x_0 - x_1$ ,  $z_1 = 2\lambda t - x_0$ ,  $x_0 = \rho \xi \frac{\sin^2 t}{t}$ ,

$$x_1 = \frac{1}{2} \rho \xi \sin 2t, \quad \xi = \frac{u \varepsilon}{2 \omega_0 \gamma^2}, \quad \lambda = \xi \left( 1 + \frac{\rho}{2} \right), \quad \beta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

Формула (4.4) соответствует мнимой части выражения для массового оператора электрона в поле плоской волны, полученного в [8]. Отметим, что используя выражение (2.3)-(2.4) и приняв выше процедуру расчета, можно получить все поляризационные свойства излучения. Так, например, в случае винтового движения

\*) Для большей общности мы включили в выражение (4.4) спиновый член,  $\vec{z} \vec{V}$  - вектор спина в системе покоя электрона.

частицы ( $\alpha = 0$ ) имеем

$$dI_{cz}^{(i)} = \frac{e^2 m^2}{2\pi} \frac{u du}{(1+u)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} A_{cz}^{(i)}(t) e^{-2i\lambda t + ix_0(t)}$$

где

$$A_{cz}^{(0)}(t) = i (1 + f(u) \rho \sin^2 t) \\ A_{cz}^{(2)}(t) = f(u) \rho \sin t \left( \cos t - \frac{\sin t}{t} \right) \quad (4.5) \\ A_{cz}^{(3)}(t) = \frac{\rho}{2x_0(t)} \left( e^{-ix_0(t)} - 1 \right) - i$$

В случае плоского движения частицы ( $\alpha = 1$ ) получаем следующее выражение для интенсивности и поляризации излучения

$$dI_p = \frac{ie^2 m^2}{2\pi} \frac{u du}{(1+u)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} \left[ J_0(z_0) + \right. \\ \left. + f(u) \rho \sin^2 t (J_0(z_0) - i J_1(z_0)) \right] e^{-iz_1} \quad (4.6)$$

Степень линейной поляризации  $\xi^{(3)}$  дается выражением

$$\xi^{(3)} = dI^{(3)} / dI_p$$

где

$$dI^{(3)} = - \frac{e^2 m^2}{4\pi} \frac{u du}{(1+u)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-iz_1} \left\{ 2i J_0(z_0) + \right. \\ \left. + \rho \left[ \left( \frac{1}{x_0} + it \sin 2t \right) (J_0(z_0) - J_0(x_1) e^{-ix_0}) + \right. \right. \\ \left. \left. + t \sin 2t (J_1(z_0) + J_1(x_1) e^{-ix_0}) \right] \right\} \quad (4.7)$$



Проведем анализ полученного выражения для случая плоского движения. Для простоты будем считать, что излучаются мягкие фотоны <sup>\*</sup>, т.е.  $u \ll 1$  (Это справедливо, если  $\frac{2\omega_0 \gamma^2}{\varepsilon} \sqrt{1+\rho} \ll 1$ ).

В этом случае формула (4.4) принимает вид

$$dI_p = \frac{2ie^2}{\pi} \omega_0 \gamma^2 \xi d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} \left\{ J_0(z_0) + \rho \sin^2 t (J_0(z_0) - iJ_1(z_0)) \right\} e^{-iz_1} \quad (4.8)$$

где

$$\xi = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{2\omega_0 \gamma^2}, \quad z_0 = \rho \xi \left( \frac{\sin^2 t}{t} - \frac{\sin 2t}{2} \right), \quad (4.9)$$

$$z_1 = 2\xi t \left( 1 + \frac{\rho}{2} \left( 1 - \frac{\sin^2 t}{t^2} \right) \right), \quad \rho = \gamma^2 a^2$$

Интеграл в (4.8) является, вообще говоря, разрывной функцией параметра  $\lambda = \xi(1+\rho/2)$  в точках, где  $\lambda = n$ ,  $n$  — целое число. Для выделения скачка воспользуемся следующим соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} (F(t) - F_a(t)) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} F_a(t) \quad (4.10)$$

Из (4.8) имеем

$$F_a(t) = F(t) = [J_0(y_0) + \rho \sin^2 t (J_0(y_0) + iJ_1(y_0))] e^{-2i\lambda t}, \quad y_0 = \frac{1}{2} \xi \rho \sin 2t \quad (4.11)$$

Используя Фурье-разложение функций Бесселя

$$J_0(a \sin 2t) = J_0^2\left(\frac{a}{2}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2\left(\frac{a}{2}\right) \cos(4nt) \\ J_1(a \sin 2t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_n\left(\frac{a}{2}\right) J_{n+1}\left(\frac{a}{2}\right) \sin(2(2n+1)t) \quad (4.12)$$

<sup>\*</sup> При  $u \gtrsim 1$  рассмотрение проводится аналогично.

можно в явном виде выделить скачки в точках  $\lambda = n$ . Оставшийся интеграл является уже непрерывной функцией  $\lambda$ , а подынтегральное выражение при  $t \rightarrow \infty$  ведет себя как  $1/t^2$ , что делает удобным проведение численных расчетов. Выделенная часть спектрального распределения интенсивности излучения имеет вид

$$\frac{dI_p(a)}{d\xi} = 4e^2 \gamma^2 \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \nu(2(n+1)-\lambda)(2(n+1)-\lambda) J_{n+1}^2(y) + \nu(2n+1-\lambda)y (J_n(y) - J_{n+1}(y))^2 \right\}, \quad y = \frac{1}{4} \rho \xi \quad (4.13)$$

Из выражения (4.13) видно, что разрывы интеграла существуют только для нечетных  $n$ , т.е. для  $\lambda = 2m+1$ . На языке излучения в поле плоской волны это обстоятельство связано с тем, что при угле излученного фотона  $\nu = 0$  из линейно поляризованной волны может поглощаться только нечетное число фотонов, что в свою очередь связано с сохранением проекции момента количества движения на импульс.

В случае винтового движения интеграл в (4.5) является разрывной функцией при  $\lambda = l$ . Поступая также, как и в случае плоского движения выделим в явном виде члены, содержащие этот скачок <sup>\*</sup>

$$dI^{(i)} = 2e^2 \omega_0^2 \gamma^2 \xi d\xi \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-2i\lambda t} \right. \quad (4.14)$$

$$\left. \cdot \tilde{A}^{(i)}(t) (e^{ix_0} - 1 - ix_0) + F_a^{(i)} \right],$$

где

$$\tilde{A}^{(0)}(t) = i(1 + \rho \sin^2 t), \quad \tilde{A}^{(2)}(t) = \rho \sin t \left( \cos t - \frac{\sin t}{t} \right),$$

$$\tilde{A}^{(3)}(t) = -\left( i + \frac{t}{2\xi \sin^2 t} \right);$$

<sup>\*</sup> Для простоты рассмотрим случай  $\omega/\varepsilon \ll 1$ .

$$F_a^{(0)} = \frac{\rho}{2} \left\{ [1 - 2\xi(1+\rho)(1-\lambda)] \mathcal{V}(1-\lambda) + \frac{\rho\xi}{2}(2-\lambda) \mathcal{V}(2-\lambda) \right\}$$

$$F_a^{(2)} = \frac{\rho}{2} \left\{ [1 - 2(1 - \frac{\rho\xi}{2}(1-2\lambda))(1-\lambda)] \mathcal{V}(1-\lambda) + \frac{\rho\xi}{2}(\lambda-1)(2-\lambda) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \mathcal{V}(2-\lambda) \right\}, \quad F_a^{(3)} = \rho\xi(1-\lambda) \mathcal{V}(1-\lambda)$$

В дипольном приближении ( $\rho \ll 1$ ) можно пренебречь интегралом в (4.14), а в выражении для  $F_a$  оставить только старшие по  $\rho$  члены, тогда

$$F_a^{(0)} \approx \frac{\rho}{2} (1 - 2\xi(1-\xi)) \mathcal{V}(1-\xi), \quad (4.15)$$

$$F_a^{(2)} \approx \frac{\rho}{2} (2\xi - 1) \mathcal{V}(1-\xi), \quad F_a^{(3)} \approx \rho\xi(1-\xi) \mathcal{V}(1-\xi)$$

Как видно из (4.15)  $\xi^{(2)} = 1$  при  $\xi = 1$  и  $\xi^{(2)} \rightarrow -1$  при  $\xi \rightarrow 0$ . Это обстоятельство связано с законом сохранения спиральности (с точки зрения Комpton-эффекта), если учесть, что в системе покоя электрона циркулярно поляризованный фотон при этом рассеивается или назад, или почти вперед.

В заключении этой главы приведем асимптотические выражения спектрального распределения интенсивности излучения (4.6) в противоположном дипольном случае, когда  $\rho \gg 1$ . Используя интегральные представления Бесселевых функций, а также воспользовавшись методом стационарной фазы при  $\xi\rho \gg 1$ , имеем:

$$dI = \frac{e^2 m^2 u du}{\pi \sqrt{3} (1+u)^3} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \left\{ \int_x^\infty dy K_{5/3}(y) + 2(f(u)-1) \cdot K_{2/3}(x) - \frac{4}{3\rho(1-\alpha\cos\psi)x} \left[ \left(1 - \frac{8g(\alpha)}{15}\right) f(u) \frac{d}{d\alpha} (x K_{1/3}(x)) + \frac{2f(u)-1}{10} g(\alpha) \frac{d}{d\alpha} (x^2 K_{2/3}(x)) \right] \right\}, \quad (4.16)$$

$$g(\alpha) = \frac{1-2\alpha\cos\psi}{1-\alpha\cos\psi}, \quad x^2 = \frac{3\rho\xi^2}{3\rho(1-\alpha\cos\psi)}$$

$\alpha$  - определено в формуле (4.3),  $\xi$  - в формуле (4.4). Первые два члена в фигурных скобках описывают магнитотормозное излучение, остальные есть поправки  $\sim 1/\rho$  к формулам магнитотормозного излучения. При  $\alpha = 0$ ,  $u \ll 1$ , можно записать (4.16) в виде:  $(\chi^2/e^2\omega_c^2) \frac{dI}{d\alpha} = F_1(x) + \frac{1}{\rho} F_2(x)$ . Функции  $F_1, F_2$  изображены на рис.1.

### 5. Угловое распределение интенсивности излучения

Рассмотрим, наконец, угловое распределение излучения, проинтегрированное по всем частотам. В случае, когда  $\omega \leq \omega_c \ll \varepsilon$  такое интегрирование в формулах (2.4)-(2.5) дает  $\delta$ -функцию от разности времен, а дальнейшее вычисление интенсивности и линейной поляризации излучения приводит к результатам, которые могут быть получены, если непосредственно исходить из потенциалов Лиенара-Вихерта (см. напр., [9]).

В случае винтового движения, имеем

$$dI^{(i)} = 4e^2 \rho \omega_0^2 \chi^2 z dz \frac{B^{(i)}(z)}{[\Omega^2 - 2\rho z^2]^{5/2}} \quad (5.1)$$

где

$$B^{(0)} = \frac{\Omega^2}{2} + \left(\frac{\rho}{2} - 1\right) z^2 - \frac{5\rho z^4}{2(\Omega^2 - 2\rho z^2)},$$

$$B^{(3)} = \frac{1}{2} z^2 \left(\frac{\rho}{2} + 2\right) + \frac{5\rho z^4}{2(\Omega^2 - 2\rho z^2)},$$

$$\Omega = 1 + \frac{\rho}{2} + z^2, \quad \rho = 2\chi^2 v_1^2, \quad z = \chi \mathcal{V}$$

Здесь, как и в предыдущих разделах индекс "0" использован для полной интенсивности излучения, остальные индексы применены для величин, нужных для нахождения параметров Стокса:

$\xi^{(i)} = dI^{(i)}/dI^{(0)}$ . Для  $dI^{(2)}$  имеем:

$$dI^{(2)} = \frac{4}{\pi} e^2 \rho \omega_0^2 \chi^2 z dz \int_0^\infty dt. \quad (5.2)$$

$$\cdot \left\{ \frac{3\Omega z^2 t \sin^2 t - \frac{\sin 2t}{2} (\rho z^2 \sin^2 t + t^2 \Omega^2)}{[t^2 \Omega^2 - 2\rho z^2 \sin^2 t]^{5/2}} + \right. \\ \left. + \left[ \left(1 + \frac{\rho}{2}\right)^2 + z^2 \left(\frac{\rho}{2} - 1 - 2z^2\right) \right] / [t^2 (\Omega^2 - 2\rho z^2)]^{5/2} \right\}$$

Проинтегрировав (5.1)-(5.2) по  $z$  имеем для полной интенсивности излучения и параметров Стокса  $\xi$ ):

$$I = \frac{1}{3} e^2 \rho \omega_0^2 \gamma^2, \quad \xi^{(3)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho}{2(2+\rho)} \right), \quad (5.3)$$

$$\xi^{(2)} = \frac{12}{\pi} \int_0^\infty dt \frac{\sin t (\sin t - t \cos t)}{[t^2(2+\rho) - \rho \sin^2 t]^2}$$

При  $\rho \ll 1$  (5.1)-(5.3) переходят в формулы дипольного приближения [4]. В случае  $\rho \gg 1$  получаем соответствующие результаты магнитотормозного излучения [9].

В плоском случае при синусоидальном поперечном движении частицы угловое распределение интенсивности излучения имеет вид:

$$\frac{dI}{d\varphi dz} = \frac{2}{\pi} e^2 \rho \omega_0^2 \gamma^2 z \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi} \sin^2 \psi \left[ \frac{1}{F^3} - \frac{4}{F^4} + \frac{4(1+z^2 \sin^2 \psi)}{F^5} \right]$$

где

$$F = 1 + z^2 + \rho \cos^2 \psi - 2\sqrt{\rho} z \cos \psi \cos \psi \quad (5.4)$$

Входящие в (5.4) интегралы по  $\psi$  вычисляются с помощью следующих соотношений:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \psi}{F^\ell} d\psi = \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}} f(x) \Big|_{x=1} \quad (5.5)$$

где

$$f(x) = \frac{1}{\rho} \left( \sqrt{\frac{h_+ + \sqrt{h_+^2 - 4\rho z^2 \cos^2 \psi}}{h_- + \sqrt{h_-^2 - 4\rho z^2 \cos^2 \psi}}} - 1 \right), \\ h_{\pm} = x + z^2 \pm \rho$$

\*) Зависимость степени круговой поляризации  $\xi^{(2)}$ , определенной в (5.3), от параметра  $\rho$  представлена на рис.2.

## Заключение

Полученные выше результаты дают в квазиклассическом приближении спектрально-угловые и поляризационные характеристики излучения при квазипериодическом движении для произвольных значений параметра  $\rho = \gamma^2 v_L^2$ , характеризующего релятивизм поперечного движения. Представляет интерес сравнить их с результатами других авторов.

В цикле работ Алферова, Башмакова, Бессонова (см. [5] и цитированную там литературу) рассматривалось излучение в ондуляторах. В рамках классической теории, исходя из потенциалов Лиенара-Вихерта, эти авторы получили спектрально-угловые характеристики излучения в форме, аналогичной известным формулам для излучения при движении по окружности. В случае, когда вклад в излучение дают много гармоник, использование такого рода формул весьма затруднительно.

В работах [3, 10] область  $\rho \approx 1$  обсуждалась в связи с задачей об излучении при каналировании частиц в кристаллах. В работах [3] поперечное движение описывалось квантовомеханически в конкретных потенциальных ямах. Общие выражения  $x$  для интенсивности излучения являются чрезвычайно громоздкими, а их классический предел (относящийся также к движению в определенных потенциалах) сводится к формулам, полученным в [5]. В работе [10] основное выражение для спектральных свойств излучения является ошибочным (в обозначениях формулы (3.6) настоящей работы, в [10] отсутствует член с  $\Delta(\psi)$ ). Поэтому все дальнейшие формулы, за исключением простейшего случая кругового поперечного движения, являются неправильными.

\*) Первая из работ [3] содержит ряд неточностей (см. [11]).

Л и т е р а т у р а

1. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. ДАН СССР 246, 1347, 1979. Phys. Lett. 73A, 414, 1979.
2. М.А.Кумахов. Phys. Lett. 57A, 17, 1976.  
М.А.Кумахов. ЖЭТФ, 72, 1489, 1977.
3. Н.К.Жеваго, ЖЭТФ, 75, 1389, 1978.  
В.А.Базылев, В.И.Глебов, Н.К.Жеваго, ЖЭТФ 78, 62, 1980.
4. В.Н.Байер, В.Н.Катков, В.М.Страховенко. ЖЭТФ, 63, 2121, 1972.
5. Д.Ф.Алферов, Ю.А.Башмаков, Е.Г.Бессонов. Труды ФИАН СССР, т.80, 100, 1975.
6. V.N.Baier, A.I.Milstein. Phys. Lett. 65A, 319, 1978.
7. А.И.Никишов, В.И.Ритус. Труды ФИАН СССР т.111, 1979.
8. В.Н.Байер, В.М.Катков, А.И.Мильштейн, В.М.Страховенко ЖЭТФ, 69, 783, 1975.
9. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат, Москва, 1973.
10. М.А.Кумахов, Х.Г.Трикалинос, ЖЭТФ, 78, 1623, 1980.
11. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. Препринт ИЯФ 80-03.

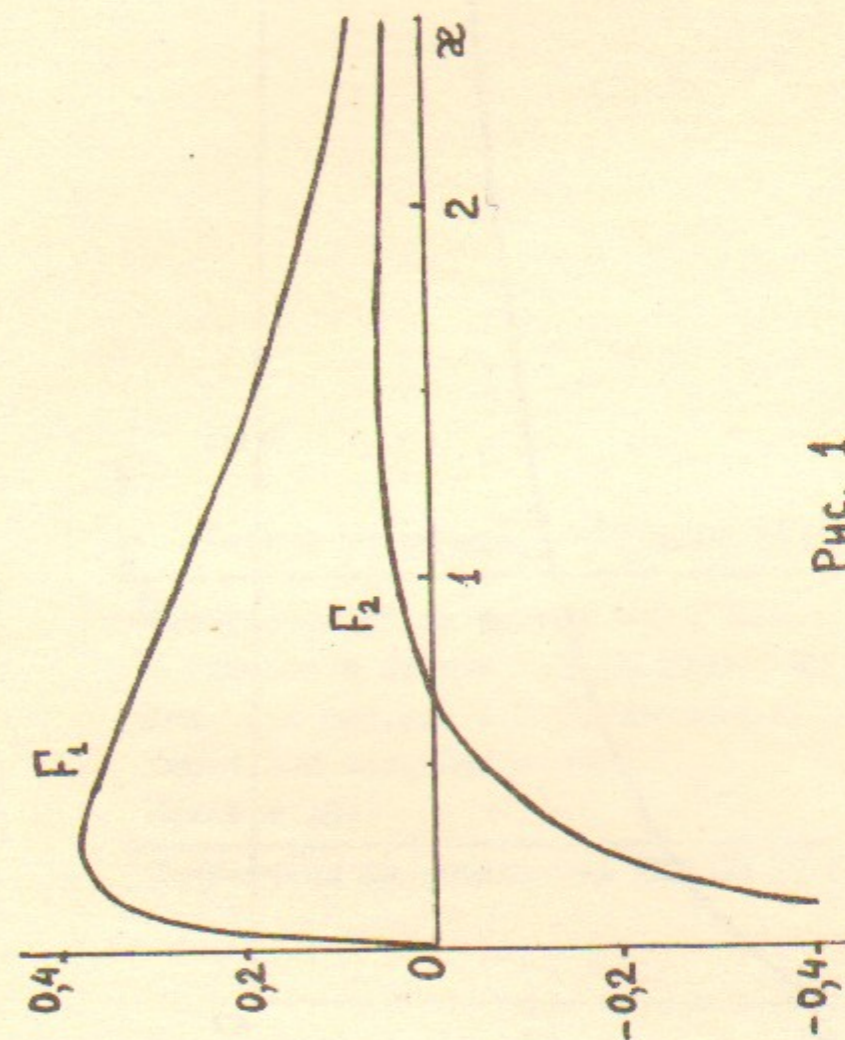


Рис. 1

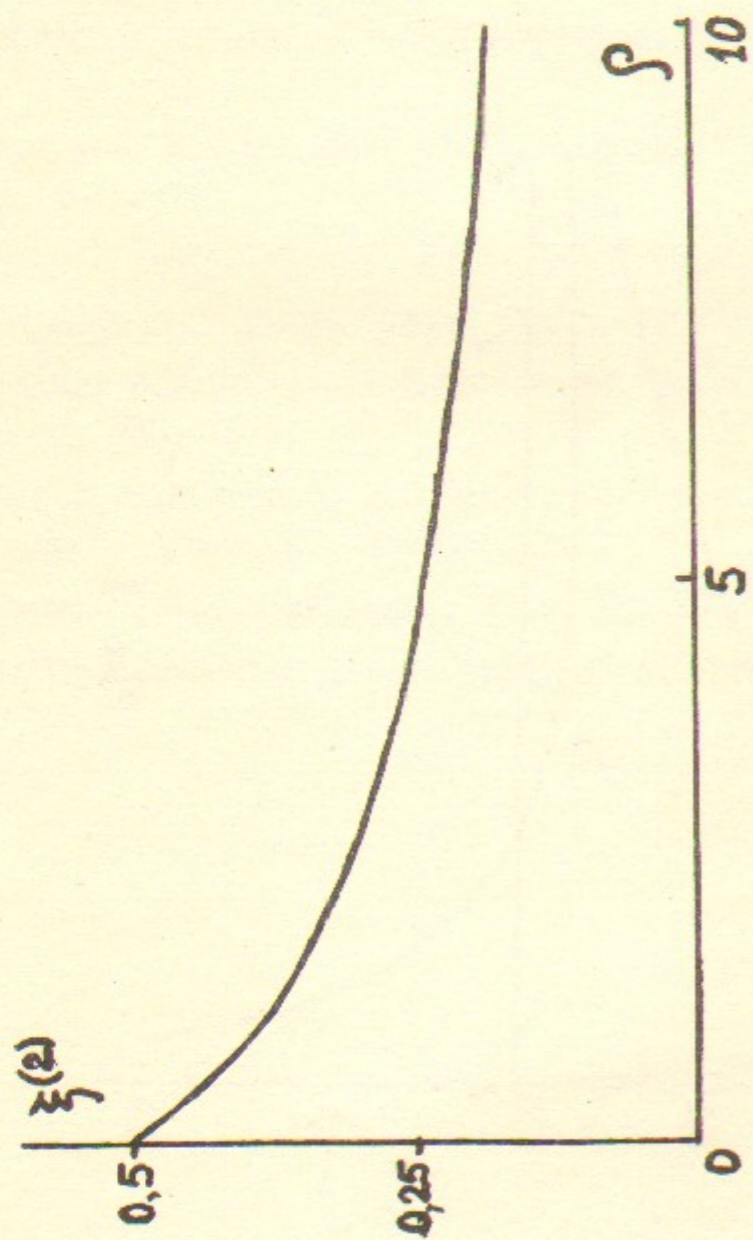


Рис. 2

Работа поступила - 31 июля 1980 г.

Ответственный за выпуск - С.Г. Попов

Подписано к печати 18.IX-1980г. МН 06921

Усл. 1,2 печ.л., 1,0 учетно-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно

Заказ № 181.

Отпечатано на роталпринте ИЯФ СО АН СССР