18

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

П,Н,Исаев

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПИСАНИЕ ГИГАНТ-СКИХ РЕЗОНАНСОВ И ОБОСНОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЯДРА

ПРЕПРИНТ 80-176

Новосибирск

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПИСАНИЕ ГИГАНТСКИХ РЕЗОНАНСОВ И ОБОСНОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЯДРА

П.Н.Исаев

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрено приближение одного перехода в уравнениях RPA для описания высоколежащих изоскалярных и изовекторных коллективных мод в двойной ядерной системы произвольной конфигурации. Рассмотрены эффекты смешивания по изоспину в несимметричных ($N \neq Z$) системах. Применительно к обычным ядрам рассмотрена структура и спектр изоскалярных и изовекторных мод, генерируемых факторизованным и локальным остаточным взаимодействием. В последнем случае получено обоснование гидродинамической модели жидкой капли.

I. Введение

В настоящее время считается общепринятой трактовка экспериментальных данных по глубоко-неупругим столкновениям тяжелых ионов при энергиях до 10 МэВ/нуклон с точки зрения образования и эволюции двойной ядерной системы /1/ , время жизни которой ($\sim 10^{-21}$ сек) велико по сравнению с характерными временами высоколежащих коллективных мод типа изоскалярных и изовекторных гигантских резонансов. Взаимодействие этих мод с глобальными степенями свободы, описывающими сравнительно медленную эволюцию двойной ядерной системы, не мало и приводит к заметному искажению их структуры и изменению собственных частот. В частности, частоты продольных мод в двойной системе, будучи обратно пропорциональными ее продольному размеру, должны быть заметно меньше по сравнению с соответствующими частотами в исходных сталкивающихся ядрах. Это означает, что рассмотрение высоколежащих коллективных мод необходимо вести в рамках адиабатической теории возмущений, точно учитывающей эффекты искажения введением подвижного базиса, зависящего от мгновенных значений глобальных переменных (при "замороженном" глобальном движении).

Последовательное микроскопическое построение коллективного гамильтониана глобального движения в рамках адиабатической теории возмущений на основе метода обобщенной матрицы /2/ проделано в работе /3/ , а эффекты искажения и возбуждения коллективных мод за счет неадиабатических поправок к гамильтониану фононов, рассматриваемых в подвижном базисе, изучались в работе /4/ . Основная трудность дальнейшего продвижения по этому пути состоит в конкретном построении подвижного базиса, для чего необходимо решать уравнения RPA с учетом того, что среднее поле и бесфононная часть матрицы плотности зависят от глобальных переменных как от параметров. Другими словами нужно знать решения RPA при всех значениях глобальных степеней свободы. В этой связи возникает необходимость в тех или иных приближениях в уравнениях RPA , которые позволили бы с одной стороны существенно упростить поиск решений, а с другой - позволяли явно учесть эффекты искажения собственных мод и их частот, обусловленные зависимостью среднего поля и матрицы плотности от глобальных координат.

Одним из таких приближений является высокочастотный предел в уравнениях RPA для изовекторных мод, генерируемых изовекторной компонентой остаточного взаимодействия /5/. В этом пределе уравнения RPA оказываются аналогичными уравнениям линейной гидродинамики для поляризационных мод в модели жидкой капли /6/. В эти уравнения явно входит плотность частиц в ядре, что применительно к двойной системе позволяет учесть зависимость решений от ее конфигурации (размеров, параметров деформаций и шейки и т.п.). Недостатком этого приближения является отсутствие нормируемых решений в случае ядра с размытой границей, что не позволяет изучать зависимость решений и собственных частот от размеров C области диффузности. Эту трудность удается обойти в пределе $C \to 0$, когда непосредственно из уравнений можно найти граничные условия на поверхности ядра, которое и определяет спектр изовекторных мод. Это условие оказывается эквивалентным равенству нулю нормальной компоненты скорости в модели жидкой капли /6/. Ясно, что аналогичная процедура для изоскалярных мод типа колебаний плотности уже не применима: модель жидкой капли накладывает условие равенства нулю флуктуации давления на свободной поверхности, чему в данном случае должно отвечать обращение в нуль эффективного поля на границе ядра. Кроме того, это приближение оказывается неудовлетворительным при описании высокочастотных колебаний формы ядра, генерируемых факторизованным остаточным взаимодействием QQ-типа. Действительно, поскольку константа взаимодействия в этом случае отрицательна, коллективный уровень энергии ω_ν опускается ниже характерных частот $\bar{\omega}_\nu$ одночастичных переходов (т.е. $\omega_\nu < \bar{\omega}_\nu$) и основное предположение высокочастотного предела для уравнений RPA ($\omega_\nu \gg \bar{\omega}_\nu$) оказывается нарушенным.

В настоящей работе рассматривается приближение одного перехода для уравнений RPA, которое предполагает, что сильно коллективизированный уровень ω_ν оказывается "хорошо отщепленным" от группы характерных частот одночастичных переходов, локализованных вблизи $\bar{\omega}_\nu$ на ширине $\Delta\omega \ll |\omega_\nu - \bar{\omega}_\nu|$. В разделе 2 из уравнений RPA в рамках этого приближения получены основные уравнения и условия нормировки для эффективного поля и переходной плотности в координатном представлении. Как и в высокочастотном пределе, в эти уравнения входит плотность частиц. В применении к двойной ядерной системе она существенным образом зависит от глобальных координат, что позволяет изучать эффекты искажения мод и построить подвижный базис фононов. В этом же разделе рассмотрены эффекты смешивания по изоспину в случае несимметричных систем ($N \neq Z$), которые обусловлены главным образом наличием изовекторной компоненты в плотности ядра. Учет этих эффектов необходим при расчете формфакторов связи изовекторных мод с относительным движением в реакциях глубоко-неупругих передач. В разделе 3 получены и исследованы решения уравнений и спектр возбуждений, генерируемых факторизованным остаточным взаимодействием. Особенно подробно рассмотрен случай QQ-сил. В разделе 4 рассмотрены переходные плотности и спектры возбуждений, генерируемые локальным остаточным взаимодействием. Для изоскалярных мод типа колебаний плотности получено обоснование граничного условия модели жидкой капли, вытекающего непосредственно из уравнений и нормировки. Рассмотрен случай возможной интерференции локальной и нелокальной (типа QQ-сил) компонент изоскалярного остаточного взаимодействия. Для изовекторных мод получены нормируемые решения с учетом конечной диффузности при условии, что плотность частиц обращается в нуль на конечном расстоянии от центра ядра. В пределе малой диффузности спектр таких мод оказывается таким же как и в модели жидкой капли.

§ 2. Приближение одного перехода для уравнений и эффекты смешивания по изоспину

Высоколежащие коллективные изоскалярные и изовекторные моды мы будем рассматривать в рамках гармонического приближения, действуя в духе метода обобщенной матрицы плотности /2/. Идея метода состоит в сужении гильбертова пространства всех состояний системы до подпространства коллективных состояний, матричные элементы по которым от коллективных операторов велики по сравнению с переходами в состояния другой природы. Обобщенная матрица плотности R_a (a – одночастичные индексы), будучи оператором в коллективном пространстве, удовлетворяет операторному уравнению

$$[R_a, H + S_a] = 0 \qquad (2.1)$$

где S_a – самосогласованное поле и H – коллективный гамильтониан (не зависящий от одночастичных индексов) также являются операторами в коллективном пространстве. Связь между S_a и R_a дается условием самосогласования

$$S_a = \varepsilon_a + Tr_b (V_{ab} R_b) \qquad (2.2)$$

а выражение H через R имеет вид

$$H = Tr_a (\varepsilon_a R_a) + \frac{1}{2} Tr_{ab} (R_a V_{ab} R_b) \qquad (2.3)$$

Зная обобщенную матрицу плотности можно построить матричные элементы любого коллективного оператора

$$F = \sum_{12} f_{12} a_1^+ a_2 = Tr_a (f_a R_a) \qquad (2.4)$$

по состояниям из коллективного пространства.

Коллективное пространство порождается небольшим числом коллективных операторов. В первую очередь это глобальные степени свободы, описывающие относительное движение и динамическую деформацию сталкивающихся ядер, а после образования двойной ядерной системы, эволюцию ее формы и ориентации. Это сравнительно медленные степени свободы, существенно меняющиеся за время порядка времени реакции ($\sim 10^{-21}$ сек). Микроскопическое построение коллективного гамильтониана такого глобального движения в рамках адиабатической теории возмущений на основе метода обобщенной матрицы плотности проводилось в работах /3,4/ . Во-вторых, имеются быстрые изоскалярные и изовекторные коллективные моды с частотой $\omega \gtrsim 10^{22}$ сек$^{-1}$. Если их связь с глобальным движением оказывается сильной (в первую очередь это относится к изоскалярным гигантским резонансам), то их нужно рассматривать в подвижном базисе при "замороженном" глобальном движении, учитывая тем самым эффекты искажения и смешивания мод /4/ . Только в этом случае применимо гармоническое приближение и эффекты ангармонизма можно считать малыми. Это означает, что даже в нулевом по фононам приближении матрица плотности существенно зависит от глобальных переменных, определяя форму и ориентацию двойной ядерной системы. В случае слабой связи эффектами искажения и смешивания мод можно пренебречь. Это как правило имеет место для изовекторных мод на начальной стадии реакции, когда динамическая деформация сталкивающихся ядер еще не успела развиться. На этой стадии фононы можно рассматривать в исходном базисе, когда мы имеем невозмущенные собственные моды в каждом из ядер и взаимодействие с партнером приводит к появлению зависящей от времени внешней силы.

Имея в виду эти замечания, мы будем считать, что матрица плотности R^0 и среднее поле S^0 в нулевом по фононам приближении известны. Предположим, что высоколежащие моды генерируются изоскалярной и изовекторной компонентами остаточного взаимодействия, зависящего только от координат (τ_i – матрицы Паули)

$$V_{ab} = V_0(\vec{r}_a, \vec{r}_b) + \tau_3^a \tau_3^b V_3(\vec{r}_a, \vec{r}_b) \qquad (2.5)$$

Пусть A_ν и A_ν^+ – бозе-операторы фононов с квантовыми числами ν в подвижном базисе. Гармоническому приближению отвечает разложение обобщенной матрицы плотности R и самосогласованного поля S по фононным операторам вплоть до членов, линейных по A_ν и A_ν^+ /7/

$$R = R^0 + \sum_\nu (\rho_\nu A_\nu^+ + \rho_\nu^+ A_\nu) + \ldots \qquad (2.6)$$

$$S = S^0 + \sum_\nu (V_\nu A_\nu^+ + V_\nu^+ A_\nu) + \ldots \qquad (2.7)$$

Здесь

$$R^0 = \langle 0 | R | 0 \rangle \quad \text{и} \quad S^0 = \langle 0 | S | 0 \rangle = \frac{p^2}{2m} + \Sigma(\vec{r}) \qquad (2.8)$$

– одночастичная матрица плотности и среднее поле в нулевом по фононам приближении. В общем случае R^0 и S^0 зависят от глобальных переменных, описывающих форму двойной ядерной системы. Коэффициенты разложения (2.6) и (2.7)

$$\rho_\nu = \langle \omega_\nu | R | 0 \rangle , \quad V_\nu = \langle \omega_\nu | S | 0 \rangle \qquad (2.9)$$

– матрица плотности и эффективное поле фонона $|\omega_\nu\rangle$.

Правильным выбором базиса можно добиться того, чтобы коллективный гамильтониан имел осцилляторный вид

$$H = \sum_\nu \omega_\nu A_\nu^+ A_\nu + \ldots \qquad (2.10)$$

причем следующие ангармонические поправки для коллективных фононов будут малы. Подставляя (2.6), (2.7) и (2.10) в (2.1) получим уравнения

$$[S^0, R^0] = 0\ ,\quad S^0(12) = \varepsilon_1 \delta_{12}\ ,\quad R^0(12) = n_1 \delta_{12} \qquad (2.11)$$

$$\rho_\nu(12) = \frac{(n_1-n_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-\omega_\nu^2} V_\nu(12) - \omega_\nu \frac{n_1-n_2}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-\omega_\nu^2} V_\nu(12) \qquad (2.12)$$

Операторное условие согласования (2.2) дает

$$V_\nu(a) = Tr_b \left(V_{ab}\, \rho_\nu(b) \right) \qquad (2.13)$$

Для несимметричных систем ($N \neq Z$) среднее поле и матрица плотности R^0 различны для протонов и нейтронов. Выделяя зависимость от изоспиновых переменных можно записать

$$S^0 = s^0 + \tau_3 s^3\ ,\qquad R^0 = \rho^0 + \tau_3 \rho^3 \qquad (2.14)$$

По этой причине собственные моды $|\omega_\nu\rangle$ оказываются смешанными по изоспину и решение уравнений RPA (2.12) и (2.13) можно представить в виде

$$\rho_\nu = \rho_\nu^0 + \rho_\nu^3 \tau_3\ ,\qquad V_\nu = V_\nu^0 + V_\nu^3 \tau_3 \qquad (2.15)$$

Как мы увидим, эффекты смешивания по изоспину можно рассматривать по теории возмущений. В нулевом порядке изоскалярные и изовекторные моды разделяются, а соответствующие эффективные поля V_ν^i и матрицы плотности ρ_ν^i (i = 0,3) удовлетворяют уравнениям, аналогичным (2.12) и (2.13).

Предположим, что матричные элементы $V_\nu(12)$ в (2.12) отличны от нуля в узкой области частот переходов $|\varepsilon_1-\varepsilon_2|$ вблизи некоторой частоты $\bar\omega_\nu$ на ширина $\Delta\omega \ll |\omega_\nu - \bar\omega_\nu|$. (приближение одного перехода для сильно коллективизированного уровня, "хорошо отщепленного" от группы неколлективных возбуждений типа частица-дырка). Во многих случаях это приближение справедливо благодаря оболочечной структуре одночастичных уровней и медленно меняющихся эффективных полей. В частности, для остаточного взаимодействия QQ - типа для квадрупольных высоколежащих резонансов существенными оказываются переходы через оболочку (ΔN =2). Остальные переходы либо запрещены, благодаря правилу отбора по

четности (ΔN = 1,3,...), либо ослаблены за счет различия в числе узлов в радиальных волновых функциях (переходы с четным $\Delta N \geqslant 4$).

Разлагая знаменатели в (2.12) по степеням $\Delta\omega/|\omega_\nu-\bar\omega_\nu|$ и ограничиваясь первым членом разложения, получим

$$\rho_\nu^i = \frac{1}{\bar\omega_\nu^2-\omega_\nu^2} \left([\rho^0 [s^0, V_\nu^i]] - \omega_\nu [\rho^0, V_\nu^i] \right) \qquad (2.16)$$

Перейдем в этом выражении к координатному представлению, для чего введем переходную плотность

$$\rho_\nu^i(\vec r) = Sp_\tau\ \tau_i \langle \vec r | \rho_\nu^i | \vec r \rangle \qquad (2.17)$$

где Sp_τ означает след по изоспиновым переменным. При этом

$$\rho_0(\vec r) = Sp_\tau \langle \vec r | \rho^0 | \vec r \rangle = \rho_n(\vec r) + \rho_p(\vec r) \qquad (2.18)$$

- плотность вещества. Учитывая, что остаточное взаимодействие (2.5) диагонально в $\vec r$ - представлении, запишем

$$\langle \vec r | V_\nu^i | \vec r\,' \rangle = V_\nu^i(\vec r)\, \delta(\vec r - \vec r\,') \qquad (2.19)$$

после чего видно, что второе слагаемое в (2.16) исчезает, а в первом слагаемом отличный от нуля вклад дает член с $p^2/2m$ в s^0. В результате получим

$$\rho_\nu^i(\vec r) = \frac{1}{\bar\omega_\nu^2-\omega_\nu^2}\ \frac{1}{m}\ div \left(\rho_0(\vec r) \nabla V_\nu^i(\vec r) \right) \qquad (2.20)$$

Условие согласования (2.13) имеет вид

$$V_\nu^i(\vec r) = \int d^3 r'\ V_i(\vec r, \vec r\,')\, \rho_\nu^i(\vec r\,') \qquad (2.21)$$

В этом же приближении получим условие нормировки. Решения уравнения RPA (2.12), (2.13) нормированы следующим образом /7/

$$Tr \left(\Lambda_\mu^+ \rho_\nu \right) = \delta_{\mu\nu} \qquad \omega_\nu > 0 \qquad (2.22)$$

где

$$\Lambda_\mu(12) = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-\omega_\mu^2} V_\mu(12) - \frac{\omega_\mu}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2-\omega_\mu^2} V_\mu(12) \qquad (2.23)$$

В этом случае коллективный гамильтониан имеет вид (2.10). В нашем приближении

$$\Lambda_\mu = \frac{1}{\bar{\omega}_\mu^2 - \omega_\mu^2} \left([S^0, V_\mu] - \omega_\mu V_\mu \right) \tag{2.24}$$

Подставляя (2.24) в (2.22) и учитывая (2.I2) получим

$$Sp\left(\overset{+}{V}{}^i_\mu \rho^k_\nu \right) = \int d^3r \, \overset{*}{V}{}^i_\mu(\vec{r}) \, \rho^k_\nu(\vec{r}) = \frac{\omega_\nu^2 - \bar{\omega}_\nu^2}{2\omega_\nu} \delta_{\mu\nu} \delta_{ik} \tag{2.25}$$

Из (2.20) и (2.2I) видно, что $\bar{\omega}_\nu$ имеет смысл частоты коллективной моды в случае, когда остаточное взаимодействие между квазичастицами отсутствует ($V^i_\nu = 0$). Это позволяет оценить величину $\bar{\omega}_\nu$. Мы будем считать, что для высоколежащих мод $\bar{\omega}_\nu$ пропорциональна осцилляторной частоте $\mathring{\omega} = 4I \, A^{-1/3}$ МэВ. В частности для коллективных возбуждений с мультипольностью λ мы будем полагать

$$\bar{\omega}_\lambda = \lambda \mathring{\omega} \tag{2.26}$$

(переходы с $\Delta N = \lambda$). В случае факторизованного остаточного взаимодействия QQ – типа (см. § 3) с константами из /6/ это приводит к неплохому согласию с экспериментом.

Для рассмотрения эффектов смешивания по изоспину удобно исходить из уравнений RPA для нейтронных и протонных компонент матрицы плотности и эффективного поля

$$\rho_\nu = \rho^0_\nu + \tau_3 \rho^3_\nu = \begin{pmatrix} \rho^n_\nu & 0 \\ 0 & \rho^p_\nu \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

$$V_\nu = V^0_\nu + \tau_3 V^3_\nu = \begin{pmatrix} V^n_\nu & 0 \\ 0 & V^p_\nu \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

В этом случае мы будем иметь два уравнения, аналогичных (2.I2). В приближении одного перехода, предполагая, что характерные частоты одночастичных переходов локализованы вблизи $\bar{\omega}_\nu$, перейдем к координатному представлению, в результате чего получим два уравнения аналогичных (2.20):

$$\rho^n_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{\bar{\omega}_\nu^2 - \omega_\nu^2} \frac{1}{m} \, div \left(\rho_n(\vec{r}) \nabla V^n_\nu(\vec{r}) \right) \tag{2.29}$$

$$\rho^p_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{\bar{\omega}_\nu^2 - \omega_\nu^2} \frac{1}{m} \, div \left(\rho_p(\vec{r}) \nabla V^p_\nu(\vec{r}) \right) \tag{2.30}$$

где

$$\rho^n_\nu(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \rho^n_\nu | \vec{r} \rangle, \quad \rho^p_\nu(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \rho^p_\nu | \vec{r} \rangle \tag{2.3I}$$

Как и раньше, отличный от нуля вклад дает член $p^2/2m$ в S_n и S_p. Возвращаясь к изоскалярной и изовекторной компонентам переходной плотности

$$\rho_\nu(\vec{r}) = \rho^0_\nu(\vec{r}) + \tau_3 \rho^3_\nu(\vec{r}) \tag{2.32}$$

получим систему связанных уравнений

$$\rho^0_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{\bar{\omega}_\nu^2 - \omega_\nu^2} \frac{1}{m} \left\{ div\left(\rho_0 \nabla V^0_\nu \right) + div\left(\rho_3 \nabla V^3_\nu \right) \right\} \tag{2.33}$$

$$\rho^3_\nu(\vec{r}) = \frac{1}{\bar{\omega}_\nu^2 - \omega_\nu^2} \frac{1}{m} \left\{ div\left(\rho_0 \nabla V^3_\nu \right) + div\left(\rho_3 \nabla V^0_\nu \right) \right\} \tag{2.34}$$

Условие согласования (2.2I) замыкает эту систему.

Система уравнений (2.33), (2.34) и (2.2I) имеет два типа решений: "почти изовекторные" моды с наибольшей примесью изоскалярной компонентой и "почти изоскалярные" моды с небольшой примесью изовекторной компоненты. Видно, что смешивание по изоспину целиком обусловлено изовекторной компонентой $\rho_3(\vec{r})$ в плотности ядерной материи. Отсутствие вклада от изовекторной компоненты среднего поля объясняется тем, что оно диагонально в координатном представлении и выпадает из диагонального матричного элемента коммутатора $[S^0, V_\nu]$. По этой причине в (2.I6) был опущен кулоновский вклад в среднее поле. Пренебрегая влиянием кулоновских сил на распределение нейтронов и протонов по объему ядра, будем считать, что

$$\rho_3(\vec{r}) = \frac{N-Z}{A} \rho_0(\vec{r}) \equiv \eta \, \rho_0(\vec{r}) \tag{2.35}$$

Для симметричных ядер ($\eta = 0$) уравнения (2.33) и (2.34) расщепляются и переходят в (2.20).

Условие нормировки смешанных по изоспину мод можно найти из (2.22) аналогично тому, как это делалось раньше. В результате получим

$$Tr\left(\Lambda^+_\mu \rho_\nu \right) = \int d^3r \left(\overset{*}{V}{}^0_\mu \rho^0_\nu + \overset{*}{V}{}^3_\mu \rho^3_\nu \right) = \frac{\omega_\nu^2 - \bar{\omega}_\nu^2}{2\omega_\nu} \delta_{\mu\nu} \tag{2.36}$$

Поскольку эффекты смешивания малы ($\sim \eta$), их можно учесть по теории возмущений. В первом порядке по η можно пренебречь изменениями частоты и нормировки, которые (как обычно) имеют более высокий порядок малости. В нулевом порядке по η, частоты вместе с переходной плотностью и эффективным полем находятся из уравнений (2.20), (2.2I), которые представляют собой интегро-дифференциальное уравнение второго порядка. Физические решения этого уравнения должны обладать конечной нормировкой и иметь убывающую асимптотику на бесконечности. Характер решений и спектр определяется конкретным видом остаточного взаимодействия. Ниже мы подробно рассмотрим факторизованное (§ 3) и локальное (§ 4) остаточное взаимодействие. Заметим, что условие ортонормировки (2.25) совпадает с условием ортогональности собственных функций задачи на собственные значения. Действительно, умножая (2.20) на $\overset{*}{V}{}^{i}_{\mu}(\vec r)$ и интегрируя левую и правую часть, после несложных преобразований с учетом (2.2I) получим

$$\left(\Omega_\mu^2-\Omega_\nu^2\right)\int d^3r\, \overset{*}{V}{}^{i}_{\mu}(\vec r)\,\rho^{i}_{\nu}(\vec r)=0, \qquad \Omega_\mu^2=\omega_\mu^2-\bar\omega_\mu^2 \tag{2.37}$$

В частности, вся совокупность решений уравнений (2.20) и (2.2I) образует полный набор. Это позволяет получить явное выражение для примеси в смешанных по изоспину модах в первом порядке по η. Действительно, пусть r^3_ν и v^3_ν – решения уравнений (2.20) и (2.2I) с частотой $\omega_{3\nu}$ для чисто изовекторной коллективной моды в симметричном ядре. Подставляя это в (2.33) получим уравнение для изоскалярной примеси δr^0_ν в почти изовекторной моде

$$\delta r^0_\nu=\frac{1}{\bar\omega_\nu^2-\omega_{3\nu}^2}\,\frac{1}{m}\,\mathrm{div}\left(\rho_0\nabla\delta v^0_\nu\right)+\eta\, r^3_\nu \tag{2.38}$$

Изоскалярная примесь δv^0_ν к изовекторному полю связана с δr^0_ν соотношением (2.2I). Разложим δr^0_ν и δv^0_ν по полному набору решений задачи (2.20), (2.2I)

$$\delta r^0_\nu=\sum_\alpha C_{\nu\alpha}\, r^0_\alpha\,, \qquad \delta v^0_\nu=\sum_\alpha C_{\nu\alpha}\, v^0_\alpha \tag{2.39}$$

Подставляя это в (2.38) и используя (2.25) находим коэффициенты разложения

$$C_{\nu\alpha}=\eta\,\frac{2\omega_{0\alpha}}{\omega_{0\alpha}^2-\bar\omega_\nu^2}\,\frac{\bar\omega_\nu^2-\omega_{3\nu}^2}{\omega_{0\alpha}^2-\omega_{3\nu}^2}\int d^3r\,\overset{*}{v}{}^{0}_{\alpha}(\vec r)\, r^3_\nu(\vec r) \tag{2.40}$$

Аналогичным образом может быть найдена изовекторная примесь в почти изоскалярной моде.

Наконец, рассмотрим высокочастотный предел в уравнении (2.20), предполагая, что частота коллективной моды много больше характерных частот одночастотных переходов ($\omega_\nu \gg \bar\omega_\nu$). В этом пределе уравнение (2.20) переходит в уравнение непрерывности линейной гидродинамики и совпадает с высокочастотным пределом в уравнениях RPA, который рассматривался в работе /5/ применительно к изовекторным гигантским резонансам, генерируемым локальным остаточным взаимодействием. Как мы увидим ниже, это приближение оказывается неудовлетворительным в случае, когда остаточное взаимодействие носит характер притяжения и коллективный уровень отщепляется вниз от группы характерных одночастичных переходов ($\omega_\nu < \bar\omega_\nu$). В высокочастотном пределе такие решения пропадают.

§ 3. Решения в случае факторизованного остаточного взаимодействия

Рассмотрим моды, генерируемые факторизованным остаточным взаимодействием, которое мы запишем в самом общем виде

$$V_{ab}=\sum_\tau \varkappa^0_\tau\, f_\tau(\vec r_a)\, f^+_\tau(\vec r_b)+\sum_\tau \varkappa^3_\tau\, g_\tau(\vec r_a)\, g^+_\tau(\vec r_b) \tag{3.I}$$

где $\varkappa^0_\tau$ и $\varkappa^3_\tau$ – константы изоскалярной и изовекторной компонент взаимодействия, $f_\tau(\vec r)$ и $g_\tau(\vec r)$ – некоторые операторы, зависящие только от координат частиц.

Поскольку эффекты смешивания по изоспину всегда можно учесть по теории возмущений, мы будем рассматривать решения уравнений (2.20) и (2.2I). Рассмотрим сначала изоскалярные моды. Подставляя изоскалярную компоненту (3.1) в (2.2I) сразу же находим выражение для эффективного поля, соответствующего изоскалярному однофононному состоянию

$$V^0_\nu(\vec r) = \sum_\sigma \varkappa^0_\sigma f_\sigma(\vec r)\, \overset{*}{F}{}^\nu_\sigma \tag{3.2}$$

где

$$\overset{*}{F}{}^\sigma_\nu = \int d^3\vec r\, f^*_\sigma(\vec r)\, \rho^0_\nu(\vec r) \tag{3.3}$$

Мы предположим, что $f_\sigma(\vec r)$ плавно меняются на размере порядка радиуса ядра и матричные элементы $(f_\sigma)_{12}$ локализованы в узкой области частот переходов вблизи некоторой частоты $\bar\omega_\nu$. Подставляя (3.2) в (2.20) получим выражение для переходной плотности

$$\rho^0_\nu(\vec r) = -\frac{1}{\Omega^2_\nu}\sum_\sigma \frac{\varkappa^0_\sigma}{m}\, div\left(\rho_0 \nabla f_\sigma(\vec r)\right) \overset{*}{F}{}^\nu_\sigma, \quad \Omega^2_\nu = \omega^2_\nu - \bar\omega^2_\nu \tag{3.4}$$

Спектр ω_ν и коэффициенты $\overset{*}{F}{}^\nu_\sigma$ находятся из условия согласования (3.3) и нормировки (2.25). Подставляя (3.4) в (3.2) получим систему линейных однородных уравнений

$$\overset{*}{F}{}^\nu_\sigma = \frac{1}{\Omega^2_\nu}\sum_{\sigma'} \frac{\varkappa^0_{\sigma'}}{m}\int d^3r\, \rho_0(\vec r)\, \nabla f^*_\sigma(\vec r)\cdot\nabla f_{\sigma'}(\vec r)\, \overset{*}{F}{}^\nu_{\sigma'} \tag{3.5}$$

Условие нормировки (2.25) дает

$$\sum_\sigma \varkappa^0_\sigma\, |F^\nu_\sigma|^2 = \frac{\Omega^2_\nu}{2\omega_\nu} \tag{3.6}$$

Формулы (3.2), (3.4)-(3.6) в принципе решают поставленную задачу.

Характерной особенностью факторизованных сил (3.I) является наличие в переходной плотности двух компонент, одна из которых имеет поверхностный, а другая - объемный характер, причем амплитуда поверхностной компоненты

$$(\rho^0_\nu)_{пов.} = -\frac{1}{\Omega^2_\nu}\sum_\sigma \frac{\varkappa^0_\sigma}{m}\, \nabla\rho_0(\vec r)\cdot\nabla f_\sigma(\vec r)\, \overset{*}{F}{}^\nu_\sigma \tag{3.7}$$

доминирует над объемной

$$(\rho^0_\nu)_{объем} = -\frac{1}{\Omega^2_\nu}\sum_\sigma \frac{\varkappa^0_\sigma}{m}\, \rho_0(\vec r)\, \Delta f_\sigma(\vec r)\, \overset{*}{F}{}^\nu_\sigma \tag{3.8}$$

приблизительно в $R_0/c = r_0 A^{1/3}/c$ раз, где c - параметр диффузности в плотности $\rho_0(\vec r)$ (предполагалось, что $|\nabla f_\sigma| \sim f_\sigma/R_0$).

В простейшем случае, когда различные компоненты f_σ не интерферируют между собой (имеют разные правила отбора), можно

получить замкнутые выражения для частот ω_ν и $F_\sigma{}^\nu$. При этом σ может служить квантовым числом нормальной моды ($\sigma \equiv \nu$, $F^\nu_\nu \equiv F_\nu$). Вместо (3.4)-(3.6) получим

$$\omega^2_\nu - \bar\omega^2_\nu = \frac{\varkappa^0_\nu}{m}\int d^3r\, \rho_0(\vec r)\, |\nabla f_\nu(\vec r)|^2 \tag{3.9}$$

$$|F_\nu|^2 = \frac{1}{2m\omega_\nu}\int d^3r\, \rho_0(\vec r)\, |\nabla f_\nu(\vec r)|^2 \tag{3.10}$$

а выражение для переходной плотности принимает вид

$$\rho^0_\nu(\vec r) = -\frac{1}{\Omega^2_\nu}\frac{\varkappa^0_\nu}{m}\left(\nabla\rho_0(\vec r)\cdot\nabla f_\nu(\vec r) + \rho_0(\vec r)\Delta f_\nu(\vec r)\right)\overset{*}{F}_\nu \tag{3.11}$$

Из (3.9) видно, что знак смещения энергии коллективного уровня $\omega_\nu - \bar\omega_\nu$ относительно характерных частот одночастичных переходов $\bar\omega_\nu$ совпадает со знаком константы $\varkappa^0_\nu$. В случае притяжения ($\varkappa^0_\nu < 0$) коллективный уровень смещается вниз относительно $\bar\omega_\nu$. Заметим, что в высокочастотном пределе (полагая в (3.9) $\bar\omega_\nu = 0$) мы получили бы в этом случае мнимое значение для ω_ν, что физически неудовлетворительно и указывает на неприменимость этого приближения для отрицательного остаточного взаимодействия.

Особенно простые выражения для частот и переходной плотности получаются для факторизованных сил QQ - типа.

Подставляя в (3.II)

$$f_\nu(\vec r) = f_{\lambda\mu}(\vec r) = r^\lambda Y^*_{\lambda\mu}(\vec n) \tag{3.12}$$

и учитывая, что $\Delta f_{\lambda\mu}(\vec r) = 0$, убеждаемся, что объемная компонента переходной плотности исчезает, а изоскалярная мода представляет собой колебания формы несжимаемой капли. В частности, для сферических ядер получим

$$\rho^0_{\lambda\mu}(\vec r) = -\frac{1}{\Omega^2_\lambda}\frac{\lambda\varkappa^0_\lambda}{m}\frac{\partial\rho_0}{\partial r}\, r^{\lambda-1}\, Y^*_{\lambda\mu}(\vec n)\, \overset{*}{F}_{\lambda\mu} \tag{3.13}$$

$$\omega^2_\lambda - \bar\omega^2_\lambda = \frac{\lambda(2\lambda+1)}{4\pi}\frac{A\varkappa^0_\lambda}{m}\langle r^{2\lambda-2}\rangle \tag{3.14}$$

$$|F_{\lambda\mu}|^2 = \frac{\lambda(2\lambda+1)}{4\pi\omega_\lambda}\frac{1}{mA}\langle r^{2\lambda-2}\rangle \tag{3.15}$$

где $\langle r^\lambda\rangle = \frac{1}{A}\int d^3r\, \rho_0(\vec r)\, r^\lambda$. Из (3.I5) видно, что данная мода впитывает в себя всю силу перехода, даваемую правилом сумм для изоскалярных возбуждений /6/

$$\sum_{\mu} \omega_\lambda |F_{\lambda\mu}|^2 = \frac{\lambda(2\lambda+1)^2}{4\pi}\,\frac{1}{mA}\,\langle r^{2\lambda-2}\rangle \qquad (3.16)$$

Следуя О.Бору и Б.Моттельсону /6/, положим

$$\varkappa^0_\lambda = -\frac{4\pi}{2\lambda+1}\,\frac{m\mathring{\omega}^2}{A\langle r^{2\lambda-2}\rangle} \qquad (3.17)$$

где $\mathring{\omega} = 41\, A^{-1/3}$ МэВ – осцилляторная частота. Подставляя это (3.14) находим

$$\omega_\lambda = \sqrt{\bar{\omega}^2_\lambda - \lambda\mathring{\omega}} = \mathring{\omega}\sqrt{\lambda(\lambda-1)} \qquad (3.18)$$

где в последнем равенстве учтено (2.26). Численные значения обнаруживают неплохое согласие с экспериментальными значениями частот изоскалярных мод.

Все сказанное выше о характере изоскалярных мод в равной степени относится и к изовекторным модам, генерируемым изовекторной компонентой (3.1). Их рассмотрение ведется аналогично, как мы это делали для изоскалярных мод. Выпишем выражения для переходной плотности и частот изовекторных мод в случае факторизованного остаточного взаимодействия QQ – типа, с константой $\varkappa^3_\lambda$, взятой из /6/ и плотностью $\rho_0(\vec{r})$ с резким краем: $\rho_0(\vec{r}) = \rho_0\,\theta(R_0 - r)$. В этом случае

$$\varkappa^3_\lambda = \frac{2\lambda+3}{4}\,\frac{V_1}{\rho_0 R_0^{2\lambda+3}}\,, \qquad V_1 \approx 130 \text{ МэВ} \qquad (3.19)$$

$$\omega_{3\lambda} = \sqrt{\bar{\omega}^2_\lambda + \frac{\lambda(2\lambda+3)}{4}\,\frac{V_1}{mR_0^2}} = 41\sqrt{\lambda^2 + 0{,}56\,\lambda(2\lambda+3)}\,A^{-1/3}_{(\text{МэВ})} \qquad (3.20)$$

Переходная плотность $\rho^3_{\lambda\mu}(\vec{r})$ будет иметь δ – образный пик на поверхности ядра

$$\rho^3_{\lambda\mu}(\vec{r}) = \frac{N^3_\lambda}{R_0^2}\,\delta(r - R_0)\,Y^*_{\lambda\mu}(\vec{n}) \qquad (3.21)$$

где нормировочная константа

$$N^3_\lambda = A^{1/3}\left(\frac{3\lambda}{8\pi m r_0^2 C_{3\lambda}}\right)^{1/2} \qquad (3.22)$$

Здесь учтено, что $R = r_0 A^{1/3}$, $\omega_{3\lambda} = C_{3\lambda} A^{-1/3}$.
Конкретное выражение для изоскалярной переходной плотности имеет вид (3.21) с нормировочной константой (3.22), где $C_{3\lambda}$ нужно

заменить на $C_{0\lambda} = 41\sqrt{\lambda(\lambda-1)}$ МэВ.

В этом же случае найдем изоскалярную примесь $\delta\rho^0_{\lambda\mu}$ в "почти изовекторной" моде в несимметричном ядре ($\eta \neq 0$). Из уравнения (2.38) находим

$$\delta\rho^0_{\lambda\mu} = -\frac{1}{\Omega^2_{3\lambda}}\,\frac{\varkappa^0_\lambda}{m}\,\frac{\partial\rho_0}{\partial r}\,\frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial r}\,\delta\overset{*}{F}{}^0_{\lambda\mu} + \eta\,\rho^3_{\lambda\mu}(\vec{r}) \qquad (3.23)$$

где $\delta\overset{*}{F}{}^0_{\lambda\mu}$ находим из условия согласования (2.21)

$$\delta\overset{*}{F}{}^0_{\lambda\mu} = \eta\,\frac{\Omega^2_{3\lambda}}{\omega^2_{3\lambda} - \omega^2_{0\lambda}}\,\overset{*}{F}{}^3_{\lambda\mu} \qquad (3.24)$$

Здесь

$$\overset{*}{F}{}^3_{\lambda\mu} = \int d^3r\, f^*_{\lambda\mu}(\vec{r})\,\rho^3_{\lambda\mu}(\vec{r}) \qquad (3.25)$$

Подставляя (3.24) в (3.23) и учитывая (3.17) и (3.19) получим

$$\delta\rho^0_{\lambda\mu}(\vec{r}) = \eta\,\frac{\varkappa^3_\lambda}{\varkappa^3_\lambda - \varkappa^0_\lambda}\,\rho^3_{\lambda\mu}(\vec{r}) = k^3_\lambda\,\rho^3_{\lambda\mu}(\vec{r}) \qquad (3.26)$$

где коэффициент смешивания

$$k^3_\lambda = \eta\,\frac{1}{1 + \dfrac{4m\mathring{\omega}^2 R_0^2}{(2\lambda+1)V_1}} = \eta\,\frac{1}{1 + \dfrac{1.8}{2\lambda+1}} \qquad (3.27)$$

не зависит от A. Аналогичным образом может быть найдена изовекторная примесь в почти изоскалярной моде.

§ 4. Решения в случае локального остаточного взаимодействия

Как мы видели в предыдущем разделе, факторизованное остаточное взаимодействие генерирует моды, которые имеют главным образом поверхностный характер. В случае факторизованных сил QQ – типа изоскалярные моды представляют собой высокочастотные колебания формы несжимаемой капли, а изовекторные моды можно рассматривать как периодическое смещение как целое нейтронов относительно протонов. В обоих случаях изменение плотности (соответственно изоскалярной или изовекторной) локализовано вблизи поверхности ядра в его диффузном слое.

С другой стороны, наличие конечной сжимаемости должно приводить к колебаниям плотности ядерного вещества. Обычно, эти изоскалярные моды изучаются в гидродинамическом приближении /6/, причем для нахождения спектра привлекается макроскопическое граничное условие равенства нулю флуктуации давления на свободной поверхности. Это неудовлетворительно хотя бы по той простой причине, что наличие диффузности в плотности лишает смысла понятие поверхности применительно к ядру.

В высокочастотном пределе в уравнениях RPA удается получить уравнения, аналогичные уравнениям линейной гидродинамики /5/, предполагая, что остаточное взаимодействие имеет локальный характер. Эти уравнения имеют смысл и в случае конечной диффузности ядерного вещества. Однако, если считать, что изоскалярная константа взаимодействия постоянна и всюду равна своему объемному значению $G_{in} > 0$, то оказывается, что эти уравнения не имеют нормируемых решений со спадающей асимптотикой. Поэтому для получения спектра приходится привлекать дополнительные граничные условия, которые не содержатся в исходных микроскопических уравнениях. В этом разделе мы покажем как обойти эту трудность. Как мы увидим, решающим является тот факт, что изоскалярная константа $G_0(\vec{r})$ зависит от координаты и меняет знак, проходя через нуль вблизи поверхности ядра. Требование нормируемости физических решений позволяет определить недостающие граничные условия в точке R_c, где $G_0(R_c)$ обращается в нуль. При этом точка R_c имеет вполне определенный смысл в отличие от такого расплывчатого понятия как поверхность ядра.

Итак, мы будем изучать изоскалярные моды, генерируемые односкалярной компонентой остаточного взаимодействия

$$V_0(\vec{r}_a, \vec{r}_b) = G_0(\vec{r}_a)\,\delta(\vec{r}_a - \vec{r}_b) \qquad (4.1)$$

Константы взаимодействия $G_0(\vec{r})$, будучи положительной в объеме ядра (отталкивание), меняет знак, проходя через нуль в области диффузности плотности ядра. Если воспользоваться аппроксимацией через плотность /8/

$$G_0(r) = G_{in} + (G_{ex} - G_{in})\,\frac{\rho_0(r) - \rho_0(0)}{\rho_0(0)} \qquad (4.2)$$

где

$$\rho_0(r) = \rho_0\left(1 + \exp\frac{r - R_0}{c}\right)^{-1} \qquad (4.3)$$

а константы G_{in} и G_{ex} таковы, что $G_{in} > 0$, $G_{ex} < 0$ и $|G_{ex}/G_{in}| \gtrsim 3$ /8/, то для средних и тяжелых ядер ($A \geq$ 30), расстояние R_c, на котором $G_0(R_c) = 0$, равно

$$R_c \simeq R_0 + c\ln\frac{1}{3}\left(1 + 4e^{-\frac{R_0}{c}}\right) \approx R_0 - 1.1\,c \qquad (4.4)$$

Другими словами константа $G_0(r)$ меняет знак в области, где плотность только начинает изменяться от своего объемного значения до нуля ($\rho_0(R_c)/\rho_0(0) \lesssim 0{,}75$).

Забудем на время о возможном присутствии нелокальной компоненты в изоскалярной части остаточного взаимодействия и ее интерференции с (4.1). Для простоты будем рассматривать сферические ядра. Как и раньше эффекты смешивания по изоспину учтем по терии возмущений, поэтому будем рассматривать решения уравнений (2.20), (2.21). Подставляя (4.1) в (2.21) находим выражение для эффективного поля, соответствующего изоскалярному фонону

$$V_\nu^0(\vec{r}) = G_0(r)\,\rho_\nu^0(\vec{r}) \qquad (4.5)$$

Исключая $\rho_\nu^0(\vec{r})$ из (2.20), получим уравнение на эффективное поле

$$\Delta V_\nu^0(\vec{r}) + \frac{1}{\rho_0(r)}\left(\nabla\rho_0(\vec{r})\cdot\nabla V_\nu^0(\vec{r})\right) + \frac{m\Omega_\nu^2}{G_0(r)\rho_0(r)}\,V_\nu^0(\vec{r}) = 0 \qquad (4.6)$$

где $\Omega_\nu^2 = \omega_\nu^2 - \bar{\omega}_\nu^2$. Для сферических ядер

$$V_\nu^0(\vec{r}) \equiv V_{\lambda\mu}^0(\vec{r}) = V_\lambda(r)\,Y_{\lambda\mu}^*(\vec{n}) \qquad (4.7)$$

и уравнение для радиальной части $V_\lambda(r)$ эффективного поля имеет вид

$$V_\lambda'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{\rho_0'}{\rho_0}\right)V_\lambda' + \left(\frac{m\Omega_\lambda^2}{G_0\rho_0} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}\right)V_\lambda = 0 \qquad (4.8)$$

Введем новую переменную

$$\xi = \int_{R_c}^{r}\frac{dr}{r^2\rho_0(r)} \qquad (4.9)$$

так что полуоси $\xi < 0$ отвечает область $0 < r < R_c$, а $\xi > 0$ – область $r > R_c$. В результате уравнение (4.8) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 V_\lambda}{d\xi^2} + \rho_0 r^2 \left(\frac{m\Omega_\lambda^2 r^2}{G_0} - \lambda(\lambda+1)\rho_0 \right) V_\lambda = 0 \qquad (4.10)$$

Точка $\xi = 0$ ($r = R_c$) – особая точка этого уравнения. Предположим, что $G_0(r)$ в окрестности этой точки допускает разложение

$$G_0(r) = G^{(n)} (r - R_c)^n = G^{(n)} (R_c^2 \rho_c)^n \xi^n \qquad (4.11)$$

где $G^{(n)} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n G_0}{dr^n}\right)_{R_c}$. Поскольку $G_0(r)$ меняет знак, то для целого допустимы нечетные значения $n = 1,3,\ldots$. В этом случае $G^{(n)} < 0$. Получим решения уравнения (4.10) в окрестности особой точки. Подставляя (4.11) в (4.10) и удерживая сингулярные члены, получим

$$\frac{d^2 V_\lambda}{d\xi^2} + \frac{C_{n\lambda}}{\xi^n} V_\lambda = 0 \quad , \quad C_{n\lambda} = \frac{m\Omega_\lambda^2}{G^{(n)}} \frac{R_c^{4-2n}}{[\rho_0(R_c)]^{n-1}} \qquad (4.12)$$

Общее решение при $n \neq 2$ можно представить в виде суперпозиции цилиндрических функций /9/

$$V_\lambda(\xi) = (C_{n\lambda}\xi)^{1/2} \left\{ C_1 J_\nu\left(\frac{2}{2-n}(C_{n\lambda}\xi^{2-n})^{1/2}\right) + C_2 N_\nu\left(\frac{2}{2-n}(C_{n\lambda}\xi^{2-n})^{1/2}\right) \right\} \qquad (4.13)$$
$$\nu = 1/|2-n|$$

При $n = 2$ общее решение уравнения (4.12) имеет вид

$$V_\lambda(\xi) = \xi^{1/2} \left\{ C_1 \xi^{\mu} + C_2 \xi^{-\mu} \right\}, \quad \mu = \sqrt{\tfrac{1}{4} - C_{2\lambda}} > \tfrac{1}{2} \qquad (4.14)$$

Пусть $n = 1$ ($\nu = 1$). Подставляя в (4.13) асимптотику цилиндрических функций при малых аргументах находим, что первое линейнонезависимое решение (4.13) обращается в нуль при $|\xi| \to 0$, а второе остается конечным

$$V_\lambda^{(1)}(\xi) \sim C_1 \xi \ , \quad V_\lambda^{(2)}(\xi) \sim C_2 \qquad |\xi| \to 0 \qquad (4.15)$$

Отсюда видно, что при $C_2 \neq 0$ эффективное поле $V_{\lambda\mu}(R_c) \neq 0$ и нормировочный интеграл (2.25

$$\int d^3 r \, \overset{*}{V^0_{\lambda\mu}}(\vec r) \rho^0_{\lambda\mu}(\vec r) = \int d^3 r \frac{|V^0_{\lambda\mu}(\vec r)|^2}{G_0(r)} \qquad (4.16)$$

расходится в точке $r = R_c$. Поэтому физические решения с конечной нормировкой должны удовлетворять граничному условию

$$V^0_{\lambda\mu}(R_c) = 0 \qquad (4.17)$$

которое вместе с требованием регулярности решений в точке $r = 0$ дает спектр собственных частот. С аналогичной ситуацией мы сталкиваемся и в случае $n = 2$ (см.(4.14)), когда при $C_2 \neq 0$ интеграл (4.16) будет расходится и граничное условие (4.17) отбирает решения с конечной нормировкой.

При $n \geq 3$ асимптотика решений (4.13) определяется асимптотикой цилиндрических функций при больших значениях их аргументов ($2-n < 0$):

$$V_\lambda(\xi) \sim (C_{n\lambda}\xi)^{1/2} \left\{ C_1 \left(\frac{\xi^{n-2}}{C_{n\lambda}}\right)^{1/4} \cos\left(\sqrt{\frac{C_{n\lambda}}{\xi^{n-2}}} - \frac{\pi}{4(n-2)} - \frac{\pi}{4}\right) + \right.$$
$$\left. + C_2 \left(\frac{\xi^{n-2}}{C_{n\lambda}}\right)^{1/4} \sin\left(\sqrt{\frac{C_{n\lambda}}{\xi^{n-2}}} - \frac{\pi}{4(n-2)} - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \qquad (4.18)$$

Отсюда видно, что подинтегральная функция в (4.16) расходится как $\xi^{-n/2}$ при $\xi \to 0$. Это означает, что при $n \geq 3$ уравнение (4.6) вообще не имеет нормируемых решений. Расходимость решений в этом случае указывает на неприменимость приближения одного перехода и отбрасываемые члены в разложении уравнений RPA (2.12) должны играть решающую роль.

В случае (4.2) $n = 1$ и нормируемые решения уравнения (4.6) существуют. Эффективное поле $V^0_{\lambda\mu}(\vec r)$ в области $0 < r < R_c$ удовлетворяет уравнению (4.6), а на границе области в точке $r = R_c$ – граничному условию (4.17). В этом случае предельный переход к резкой границе ($c \to 0$) не вносит дополнительных особенностей в уравнение (4.8), поскольку точка R_c (4.4) стремится к R_0 , оставаясь все время слева от нее ($R_c < R_0$), так что в области $0 < r < R_c$ в уравнении (4.8) дополнительных особенностей не возникает.

Другими словами, в пределе малой диффузности можно пренебречь зависимостью $\rho_0(r)$ от координаты, считая, что всюду $\rho_0(r) = \rho_0 = const$ при $0 < r < R_0$, а уравнение (4.8) решать с граничным условием

$$V^0_{\lambda\mu}(R_0) = 0 \qquad (4.19)$$

В этом случае, решение $V_\lambda(r)$ в области, где $G_0(r) = G_{cn} = const$, будет пропорционально сферической функции Бесселя и искажение такого поведения будет наблюдаться лишь в окрестности точки R_0, где $G_0(r)$ начинает зависеть от r, стремясь к нулю при $r \to R_0$.

Покажем теперь, что если размер δ области в окрестности точки R_0, где $G_0(r)$ зависит от координаты, пренебрежимо мал, то в пределе $\delta \to 0$ можно считать, что $V^0_{\lambda\mu}$ всюду ($0 < r < R_0$) удовлетворяет уравнению (4.6) с постоянной по объему константой G_{cn} и с граничным условием (4.I9). Тем самым мы завершим обоснование гидродинамического граничного условия равенства нулю флуктуации давления по свободной поверхности для изоскалярных мод /6/.

Считая, что переход к резкой границе ($c \to 0$) уже совершен, аппроксимируем поведение $G_0(r)$ в области $R_0 - \delta = R_1 < r < R_0$ простым законом

$$G_0(r) = - G_{cn} \frac{(r - R_0) r}{R_1 \delta} \qquad (4.20)$$

Подставляя это в (4.8), получим

$$V_\lambda'' + \frac{2}{r} V_\lambda' + \left(\frac{p^2 \delta R_1}{r(R_0 - r)} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} \right) V_\lambda = 0 , \quad p^2 = \frac{m \Omega_\lambda^2}{G_{cn} \rho_0} \qquad (4.2I)$$

Решение ищем в виде $V_\lambda(r) = r^\lambda u_\lambda(r)$, где $u_\lambda(r)$ удовлетворяет уравнению

$$u_\lambda'' + \frac{2(\lambda+1)}{r} u_\lambda' + \frac{p^2 R_1 \delta}{r(R_0 - r)} u_\lambda = 0 \qquad (4.22)$$

которое после замены $r = R_0 z$ сводится к уравнению типа уравнения Гаусса

$$z(z-1) u_\lambda''(z) + [2(\lambda+1) z - 2(\lambda+1)] u_\lambda'(z) - p^2 R_1 \delta\, u_\lambda(z) = 0 \qquad (4.23)$$

одно из линейно независимых решений которого имеет вид

$$u^{(2)}_\lambda(z) = C_2 F\left(\lambda + \tfrac{1}{2} + \mu, \lambda + \tfrac{1}{2} - \mu, 2\lambda + 2, z\right), \quad \mu = \sqrt{(\lambda + \tfrac{1}{2})^2 + p^2 R_1 \delta} \qquad (4.24)$$

Как и следовало ожидать (см. (4.I5)), это решение не обращается в нуль при $z = I$ ($r = R_0$).

Второе линейно независимое решение легко построить если известен вронскиан уравнения (4.23)

$$W_\lambda(z) = \frac{d u^{(1)}_\lambda}{dz} u^{(2)}_\lambda(z) - u^{(1)}_\lambda(z) \frac{d u^{(2)}_\lambda}{dz} = \frac{C_1}{z^{2\lambda+2}} \qquad (4.25)$$

Подставив сюда $u^{(1)}_\lambda = C_1(z) u^{(2)}_\lambda$, находим

$$u^{(1)}_\lambda(z) = C_1 \int_z^1 \frac{dx}{x^{2\lambda+2} F^2(x)} F\left(\lambda + \tfrac{1}{2} + \mu, \lambda + \tfrac{1}{2} - \mu, 2\lambda + 2, z\right) \qquad (4.26)$$

где $F(x) = F(\lambda + \frac{1}{2} + \mu, \lambda + \frac{1}{2} - \mu, 2\lambda + 2, x)$. Это решение обращается в нуль при $r \to R_0$ пропорционально $R_0 - r$ и удовлетворяет граничному условию (4.I9). Таким образом, нормируемое решение уравнения (4.2I) в области $R_1 < r < R_0$ имеет вид

$$V_\lambda(r) = C r^\lambda \int_r^{R_0} \frac{dx}{x^{2\lambda+2} F^2(x)} F\left(\frac{r}{R_0}\right) \qquad (4.27)$$

Поскольку в этой области $1 - \frac{r}{R_0} \ll 1$ и производная невыраженной гипергеометрической функции ограничена, разложим (4.27) по степеням ($R_0 - r$):

$$V_\lambda(r) \approx C (R_0 - r) \frac{\Gamma(\lambda + \frac{3}{2} - \mu) \Gamma(\lambda + \frac{3}{2} + \mu)}{\Gamma(2\lambda + 2)} \qquad (4.28)$$

где опущены сомножители, не зависящие от δ. Это решение вместе с производной следует сшить с решением уравнения (4.8) в области $r < R_1$, которое пропорционально сферической функции Бесселя

$$V_\lambda(r) = B j_\lambda(pr) \qquad (4.30)$$

Сшивка логарифмических производных определяет спектр собственных мод

$$\frac{j_\lambda'(pR_1)}{j_\lambda(pR_1)} = -p^{\delta} \qquad (4.3I)$$

Отсюда видно, что в пределе $\delta \to 0$ ($R_1 \to R_0$) уравнение (4.3I) представляет собой граничное условие для изоскалярных мод в модели жидкой капли.

Покажем также, что в пределе $\delta \to 0$ всюду в области $r < R_0$ имеет место связь между переходной плотностью $\rho^0_{\lambda\mu}(\vec r)$ и эффектным полем $V^0_{\lambda\mu}(\vec r)$:

$$V^0_{\lambda\mu}(\vec r) = G_{cn} \rho^0_{\lambda\mu}(\vec r) \qquad (4.32)$$

Выделим радиальную зависимость переходной плотности $\rho^{c}_{\lambda\mu} = \rho^{c}_{\lambda\mu}(r)\, Y^{*}_{\lambda\mu}$ Из (4.28) находим, что в области $R_1 < r < R_0$ переходная плотность приблизительно постоянна (с точностью до разложения (4.28)) и в силу условий сшивки равна

$$\rho^{c}_{\lambda}(r) = \frac{B\, j_\lambda(pR_1)}{G_{in}} \qquad (4.33)$$

откуда видно, что в пределе $\delta \to 0$ ($R_1 \to R_0$) переходная плотность в точке R_1 непрерывно продолжается в точку R_0 по закону (4.32), обращаясь в нуль вместе с эффективным полем.

Наконец, убедимся, что в пределе малой диффузности и $\delta \to 0$ переходная плотность $\rho^{c}_{\lambda\mu}(\vec r)$ кроме рассмотренной выше объемной компоненты содержит δ – образную особенность на поверхности ядра. В модели жидкой капли этому отвечает небольшое смещение границы ядра, обусловленное тем, что скорость частиц на поверхности ядра не равна нулю /6/ . Благодаря этому обстоятельству при $\lambda = 0$ ("дышащая" высокочастотная мода) полное число частиц сохраняется. В нашем случае существенную роль играет тот факт, что константа $G_0(r)$ обращается в нуль на поверхности ядра, так что имеет место соотношение

$$G_0(r)\, \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = C \qquad (4.34)$$

Представим $\rho^{c}_{\lambda\mu}(\vec r)$ в виде суммы двух слагаемых $\rho^{c}_{1\lambda\mu}(\vec r) + \rho^{c}_{2\lambda\mu}(\vec r)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\rho^{c}_{1\lambda\mu}(\vec r) = -\frac{1}{m\Omega^2_\lambda}\, \frac{\partial \rho_0}{\partial r}\, \frac{\partial V^{c}_{\lambda\mu}}{\partial r} \qquad (4.35)$$

$$m\Omega^2_\lambda\, \rho^{c}_{2\lambda\mu}(\vec r) + \rho_0\, \Delta V^{c}_{\lambda\mu}(\vec r) = C \qquad (4.36)$$

В силу (4.34) поверхностная компонента $\rho^{c}_{1\lambda\mu}(\vec r)$ не дает вклада в эффективное поле (4.5), так что система уравнений (4.36), (4.5) замкнута. Требование нормируемости физических решений приводит к граничному условию (4.19). Поскольку поверхностная компонента $\rho^{c}_{1\lambda\mu}(\vec r)$ в силу (4.34) не дает вклада и в условие нормировки (2.25), спектр мод и объемная компонента $\rho^{c}_{2\lambda\mu}(\vec r)$ переходной плотности остаются без изменений.

Амплитуду смещения поверхности можно характеризовать тензорным оператором деформации $\alpha_{\lambda\mu} = (-1)^{\mu}\alpha^{+}_{\lambda-\mu}$. Его связь с бозе-операторами фононов $A_{\lambda\mu}$, $A^{+}_{\lambda\mu}$ легко установить, сравнивая

(в координатном представлении $|1\rangle \equiv |\vec r\rangle$) выражение для обобщенной матрицы плотности $\delta R^{(1)}$ (2.6), соответствующее поверхностной компоненте $\rho^{c}_{1\lambda\mu}(\vec r)$, со стандартным выражением для изменения плотности $\delta\rho_0(\vec r) = -\frac{\partial \rho_0}{\partial r}\sum_{\lambda\mu} R_0\, \alpha_{\lambda\mu}\, Y^{*}_{\lambda\mu}(\vec n)$. В результате получим $\left(V^{c}_{\lambda\mu}(\vec r) = V^{c}_{\lambda}(r)\, Y^{*}_{\lambda\mu}(\vec n)\right)$:

$$\alpha_{\lambda\mu} = \frac{1}{m\Omega^2_\lambda R_0}\left(\frac{\partial V^{c}_{\lambda}}{\partial r}\right)_{R_0}\left(A^{+}_{\lambda\mu} + (-1)^{\mu} A_{\lambda-\mu}\right) \qquad (4.37)$$

Нетрудно убедиться, что как и модели жидкой капли, объемная составляющая мльтипольного момента компенсируется соответствующим смещением поверхности ядра, чему в случае $\lambda = 0$ отвечает сохранение полного числа частиц в ядре.

Таким образом, в пределе малой диффузности и постоянной по объему ядра константы изоскалярного локального взаимодействия приближение одного перехода эквивалентно гидродинамической модели жидкой капли, причем "микроскопическое" граничное условие (4.14) переходит в гидродинамическое условие равенства нулю флуктуации давления на свободной поверхности (4.34), которое определяет собственные волновые вектора $p_{n\lambda}$. Отличие от гидродинамики состоит в связи между волновым вектором и частотой. В нашем случае

$$\omega_{n\lambda} = \sqrt{\bar\omega^2_\lambda + c_s\, p^2_{n\lambda}} \qquad (4.38)$$

где $c_s = \left(\frac{G_{in}\rho_0}{m}\right)^{1/2}$ – скорость звука. Поскольку остаточное взаимодействие имеет характер отталкивания, коллективный уровень "отщепляется вверх" относительно группы характерных одночастичных переходов $(\omega_\nu > \bar\omega_\nu)$. Полная аналогия с гидродинамикой устанавливается в высокочастотном пределе $\omega_\nu \gg \bar\omega_\nu$ /5/ .

Отметим, что уравнение (4.6) допускает еще один тип решений, отличных от нуля в области $r > R_c$. Поскольку $G_{ex} < 0$, эти решения имеют спадающую асимптотику при $r \to \infty$. Действительно, в этом пределе уравнение (4.6) можно представить в виде

$$V''_\lambda + \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{c}\right)V'_\lambda - \kappa^2 e^{r/c}\, V_\lambda = 0 \qquad (4.39)$$

где

$$\kappa^2 = \frac{m\Omega^2_\lambda}{|G_{ex}|\,\rho_0}\, e^{-R_0/c} \qquad (4.40)$$

После подстановки $V_\lambda = \frac{e^{r/4c}}{r} u_\lambda$ находим

$$u_\lambda'' + \left(\frac{1}{cr} - k^2 e^{r/c} - \frac{1}{4c^2} \right) u_\lambda = 0 \tag{4.41}$$

Пренебрегая членом $\frac{1}{cr}$ при $r \to \infty$ получим

$$u_\lambda'' - \left(k^2 e^{r/c} + \frac{1}{4c^2} \right) u_\lambda = 0 \tag{4.42}$$

Общее решение этого уравнения можно представить в виде суперпозиции /9/

$$u_\lambda(r) = C_1 H_1^{(1)}\left(2ikc\, e^{\frac{r}{2c}}\right) + C_2 H_1^{(2)}\left(2ikc\, e^{\frac{r}{2c}}\right) \tag{4.43}$$

откуда для асимптотического поведения эффективного поля находим

$$V_\lambda(r) \sim \frac{e^{r/4c}}{r} \left\{ C_1 \exp\left(-2kc\, e^{\frac{r}{2c}}\right) + C_2 \exp\left(2kc\, e^{\frac{r}{2c}}\right) \right\} \tag{4.44}$$

Физическим решением со спадающей асимптотикой отвечает условие $C_2 = 0$, которое вместе с граничным условием (4.14) определяет спектр этих мод.

Благодаря быстро спадающей асимптотике (4.44) эффективное поле (а вместе с ним и переходная плотность) оказывается сосредоточенным главным образом вблизи поверхности ядра в области диффузности, что существенно отличает эти моды от поверхностных мод, генерируемых факторизованным остаточным взаимодействием QQ – типа, где эффективное поле плавно меняется по всему объему ядра. Поведение эффективного поля $V_\lambda(r)$ в области диффузности существенно зависит от профиля плотности $\rho_0(r)$ и поведения $G_0(r)$, детальная информация о которых неизвестна. Заметим, что при условии тождественного совпадения спектров этих решений и объемных мод, рассмотренных выше, оказывается возможным построить нормируемые решения уравнения (4.6), определенные во всем пространстве $r > 0$. В этом случае переходная плотность будет содержать наряду с объемной компонентой поверхностное слагаемое быстро затухающее по мере удаления от поверхности ядра. Требование совпадения спектров накладывает весьма жесткие условия на поведение $\rho_0(r)$ и $G_0(r)$. Не исключено, что такая сшивка возможна, и в пределе малой диффузности, это решение описывает смещение поверхности ядра, соответствующее данной моде (см. выше). В противном случае, наличие таких решений указывает

на возможность существования нового типа изоскалярных мод с эффективным полем, локализованным на поверхности ядра.

Следует, однако, подчеркнуть, что применимость приближения одного перехода для описания решений поверхностного типа оказывается под сомнением. Действительно, благодаря поверхностному характеру эффективного поля, матричные элементы $(V_{\lambda\mu})_{12}$, отвечающие далеким от поверхности Ферми переходам, могут оказаться не малыми, так что ширина области $\Delta\omega$ характерных частот $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ одночастичных переходов будет сравнима с $|\omega_\nu - \bar{\omega}_\nu|$ и разложение уравнений RPA по степеням $\Delta\omega / |\omega_\nu - \bar{\omega}_\nu|$ окажется несправедливым.

Последовательный учет всех переходов, в том числе и переходов в непрерывный спектр, приводит к тому, что в пропагаторе

$$\Pi_{12}(\omega) = \frac{n_1 - n_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \omega} \tag{4.45}$$

кроме универсальной и фактически локальной в координатном представлении компоненты появляется дальнодействующая нелокальная компонента, учитывающая интерференцию квазичастиц на поверхности ядра /10/. В приближении одного перехода такая компонента естественно отсутствует. Однако учет такой компоненты желателен, ибо благодаря взаимодействию через поверхность аппроксимируемом факторизованными QQ – силами (раздел 3), оказывается возможным удовлетворительное описание высоколежащих изоскалярных мод типа высокочастотных вибраций формы.

По этой причине, мы рассмотрим феноменологическое остаточное взаимодействие, которое наряду с локальной компонентой, содержит факторизованные QQ – силы, аппроксимирующие нелокальную часть пропагатора (4.45):

$$V^0_{ab} = G_0(r_a)\,\delta(\vec{r}_a - \vec{r}_b) + \sum_\mu \varkappa_\lambda f_{\lambda\mu}(\vec{r}_a) f^*_{\lambda\mu}(\vec{r}_b) \tag{4.46}$$

где

$$f_{\lambda\mu}(\vec{r}) = r^\lambda Y^*_{\lambda\mu}(\vec{n}), \quad \Delta f_{\lambda\mu}(\vec{r}) = 0 \tag{4.47}$$

Покажем, что в гидродинамическом приближении (т.е. в пределе малой диффузности и пренебрежении областно, где $G_0(r)$ меняет знак) оказывается возможным одновременное описание поверхностных и объемных изоскалярных мод, генерируемых остаточным взаимодействием (4.46).

В пределе малой диффузности имеет место соотношение (4.34). Условие согласования (2.21) с остаточным взаимодействием (4.46) дает

$$V^{0}_{\lambda\mu}(\vec r) = v^{0}_{\lambda\mu}(\vec r) + \varkappa_\lambda f_{\lambda\mu}(\vec r)\, \overset{*}{F}_{\lambda\mu} \qquad (4.48)$$

где

$$\overset{*}{F}_{\lambda\mu} = \int d^3r\, f^{*}_{\lambda\mu}(\vec r)\, \rho^{0}_{\lambda\mu}(\vec r) \qquad (4.49)$$

$$v^{0}_{\lambda\mu}(\vec r) = G_0(r)\, \rho^{0}_{\lambda\mu}(\vec r) \qquad (4.50)$$

Представим $\rho^{0}_{\lambda\mu}(\vec r)$ в виде суммы двух слагаемых $\rho^{0}_{1\lambda\mu}(\vec r)+\rho^{0}_{2\lambda\mu}(\vec r)$, каждое из которых удовлетворяет уравнению

$$\rho^{0}_{1\lambda\mu}(\vec r) = -\frac{1}{m\Omega_\lambda^2}\, \nabla\rho_0(\vec r)\cdot\nabla v^{0}_{\lambda\mu}(\vec r) - \frac{\varkappa_\lambda}{m\Omega_\lambda^2}\, \nabla\rho_0(\vec r)\cdot\nabla f_{\lambda\mu}(\vec r)\, \overset{*}{F}_{\lambda\mu} \qquad (4.51)$$

$$m\Omega_\lambda^2\, \rho^{0}_{2\lambda\mu}(\vec r) + \rho_0\, \Delta v^{0}_{\lambda\mu}(\vec r) = 0 \qquad (4.52)$$

В силу (4.34) $\rho^{0}_{1\lambda\mu}(\vec r)$ не дает вклада в (4.50), поэтому система уравнений (4.50), (4.52) замкнута. Граничное условие на $v^{0}_{\lambda\mu}(\vec r)$ находится из условия сходимости нормировочного интеграла (2.25)

$$\int d^3r\, \frac{|v^{0}_{\lambda\mu}(\vec r)|^2}{G_0(r)} + \varkappa_\lambda |F_{\lambda\mu}|^2 = \frac{\Omega_\lambda^2}{2\omega_\lambda} \qquad (4.53)$$

которое дает

$$v^{0}_{\lambda\mu}(R_0) = 0 \qquad (4.54)$$

Уравнение (4.51) определяет поверхностную компоненту с точностью до нормировочного множителя. Подставляя (4.51), (4.52) в условие согласования (4.49) и учитывая (4.53) и (4.54) получим

$$\overset{*}{F}_{\lambda\mu} = \overset{*}{F}_{\lambda\mu}\, \frac{\varkappa_\lambda}{m\Omega_\lambda^2} \int d^3r\, \rho_0 |\nabla f_{\lambda\mu}|^2 \qquad (4.55)$$

Поскольку решение уравнения (4.53) с граничным условием (4.54) дает $\Omega_\lambda^2 > 0$, то при $\varkappa_\lambda < 0$ из (4.55) находим $F_{\lambda\mu} = 0$, так что, как и в модели жидкой капли /6/ мультипольный момент, создаваемый объемной компонентой $\rho^{0}_{2\lambda\mu}(\vec r)$ переходной плотности компенсируется соответствующим смещением поверхности ядра. Таким образом, спектр и переходная плотность изоскалярных объемных мод, генерируемых остаточным взаимодействием (4.46) остают-

ся такими же как и в случае $\varkappa_\lambda = 0$.

Изоскалярным модам типа высокочастотных колебаний формы ядра отвечает случай

$$v^{0}_{\lambda\mu}(\vec r) \equiv 0 \qquad (4.56)$$

Эффективному полю (4.48) $V^{0}_{\lambda\mu}(\vec r) = \varkappa_\lambda f_{\lambda\mu}(\vec r)\, \overset{*}{F}_{\lambda\mu}$ соответствует локализованная на поверхности ядра переходная плотность. При этом в силу (4.34) условие согласования (4.50) не нарушает равенства (4.56). Поэтому спектр, условие нормировки (4.53) и вид переходной плотности остаются такими же, как и в случае $G_0(r) = 0$. Таким образом, остаточное взаимодействие вида (4.46) с условием, что константа $G_0(r)$ обращается в нуль на поверхности ядра, позволяет одновременно описать объемные и поверхностные изоскалярные моды.

Изовекторные моды, генерируемые изовекторной компонентой локального взаимодействия

$$V^{3}_{ab} = G_3(r_a)\, \delta(\vec r_a - \vec r_b)\, \tau_3^a \tau_3^b \qquad (4.57)$$

изучались в работах Б.А.Румянцева /5/ в рамках высокочастотного приближения для уравнений RPA. В нашем случае этому приближению отвечает $\omega_\nu \gg \bar\omega_\nu$ и в уравнении (2.20) Ω_ν^2 следует заменить на ω_ν^2. Поскольку объемное значение константы взаимодействия приблизительно совпадает с вакуумным /8/, можно считать, что всюду $G_3(r)$ постоянна и равна $G_3 > 0$. Уравнение на эффективное поле $V^{3}_{\lambda\mu}(\vec r) = V^{3}_{\lambda}(r)\, Y^{\lambda}_{\lambda\mu}(\vec n)$ имеет вид

$$V^{3\,\prime\prime}_{\lambda}(r) + \left(\frac{2}{r} + \frac{\rho_0'}{\rho_0}\right) V^{3\,\prime}_{\lambda}(r) + \left(\frac{m\Omega_\lambda^2}{G_3\,\rho_0(r)} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}\right) V^{3}_{\lambda}(r) = 0 \qquad (4.58)$$

Если асимптотика $\rho_0(r)$ совпадает с асимптотикой (4.3) при $r \to \infty$, то в силу $G_3 > 0$ уравнение (4.58) не имеет решений, спадающих на бесконечности. Асимптотическое поведение общего решения уравнения (4.58) имеет вид (4.44), где параметр κ следует положить равным $i\left(\frac{m\Omega_\lambda^2}{G_3\rho_0}e^{-R_0/c}\right)^{1/2}$.

Эту трудность удается обойти в пределе малой диффузности ($c \to 0$), когда $\rho_0(r) = \rho_0\,\theta(R_0 - r)$ и в уравнении (4.58) появляется δ - образная особенность в точке R_0. Интегрируя это уравнение " по слою" в окрестности точки R_0 и полагая, что при $r > R_0$ $V^{3}_{\lambda}(r) = 0$, находим граничное условие

$$\left(\frac{\partial V^3_{\lambda\mu}}{\partial r}\right)_{R_0} = 0 \qquad (4.59)$$

что соответствует равенству нулю нормальной компоненты скорости в гидродинамической модели жидкой капли /6/ . Соответствующие частоты хорошо согласуются с экспериментом. Неудовлетворительность такого подхода состоит в том, что остается не ясным, какому предельному переходу отвечает случай ядра с резкой границей. Очевидно, что при сколь угодно малом значении диффузности такие решения получить невозможно, ибо зависимость асимптотики (4.44) от параметра C явно неаналитична.

Покажем, что уравнение (4.58) имеет нормируемые решения, если $\rho_0(r)$ обращается в нуль на конечном расстоянии R_1 от центра ядра, и граничному условию (4.59) отвечает предел, когда размер δ области, в которой $\rho_0(r)$ отлично от объемного значения, пренебрежимо мал. Как мы увидим, для существования таких решений решающую роль играет поведение $\rho_0(r)$ в окрестности точки R_1 .

Пусть $\rho_0(r)$ обращается в нуль по закону

$$\rho_0(r) = \alpha x^{\beta}, \qquad x = R_1 - r \qquad (4.60)$$

Оставляя в (4.58) сингулярные в точке $x = 0$ члены, получим

$$\frac{d^2 V^3_\lambda}{dx^2} + \frac{\beta}{x}\frac{dV^3_\lambda}{dx} + \frac{k^2}{x^\beta} V_\lambda = 0, \qquad k^2 = \frac{m\Omega^2_\lambda}{G_3\alpha} \qquad (4.61)$$

При $\beta \geq 1$ решение можно представить в виде

$$V^3_\lambda(x) = \theta(x)\, v_\lambda(x) \qquad (4.62)$$

где $\theta(x)$ - θ - функция. При этом $v_\lambda(x)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $V^3_\lambda(x)$. Непрерывным в точке $x = 0$ решениям $V^3_\lambda(x)$ уравнения (4.61) отвечают регулярные в этой точке решения $v_\lambda(x)$, в противном случае $V_\lambda(x)$ будет претерпевать разрыв в особой точке. Фактически, требование регулярности $v_\lambda(x)$ означает сшивку решений $V^3_\lambda(x) = v_\lambda(x)$ при $x \geq 0$ с решением $V_\lambda(x) = 0$ при $x < 0$.

Общее решение $v_\lambda(x)$ уравнения (4.61) при $\beta \neq 2$ можно представить в виде суперпозиции цилиндрических функций

$$v_\lambda(x) = x^{\frac{1-\beta}{2}}\left\{C_1 J_\nu\left(\frac{2k}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right) + C_2 N_\nu\left(\frac{2k}{2-\beta}x^{\frac{2-\beta}{2}}\right)\right\} \qquad (4.63)$$

$$\nu = |1-\beta|/|2-\beta|$$

При $\beta = 2$ общее решение имеет вид:

$$v_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(C_1 x^{\frac{\mu}{2}} + C_2 x^{-\frac{\mu}{2}}\right) \qquad \text{если} \quad \mu = \sqrt{1-4k^2} \neq 0 \qquad (4.64)$$

и

$$v_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(C_1 + C_2 \ln x\right) \qquad \text{если} \quad k^2 = \frac{1}{4} \qquad (4.65)$$

Поскольку $\mu \leq$ I, то при $\beta = 2$ требование регулярности решений (4.64) и (4.65) удовлетворить невозможно. При $\beta =$ I ($\nu = 0$) регулярная асимптотика (4.62) при $x \to 0$ имеет вид ($C_2 = 0$):

$$v_\lambda(x) = C\left(1 - k^2 x + \dots\right) \qquad x \to 0 \qquad (4.66)$$

При $1 < \beta < 2$ ($\nu = \frac{\beta-1}{2-\beta}$) находим

$$v_\lambda(x) = C\left(1 - \frac{k^2}{(2-\beta)^2}\frac{x^{2-\beta}}{\Gamma(\nu+2)} + \dots\right) \qquad (4.67)$$

Эта асимптотика совпадает с асимптотикой (4.66) при $\beta =$ I. Наконец, при $\beta > 2$ регулярная при $x \to 0$ асимптотика (4.63) отсутствует. Таким образом, непрерывная сшивка решений $V^3_\lambda(x) = v_\lambda(x)$ при $x > 0$ и $V^3_\lambda(x) = 0$ при $x < 0$ возможна в ограниченном числе случаев поведения $\rho_0(r)$ в окрестности точки R_1 , а именно, если $1 \leq \beta < 2$.

Чтобы рассмотреть предельный переход $\delta \to 0$, аппроксимируем $\rho_0(r)$ кусочно-непрерывной функцией

$$\rho_0(r) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq R_0 \\ \rho_0\left(\frac{R_1 - r}{\delta}\right)^\beta & R_0 < r \leq R_1 \\ 0 & r > R_1 \end{cases} \qquad (4.68)$$

Для простоты будем считать, что размер диффузности δ много меньше радиуса ядра и будем рассматривать коротковолновой предел $pR_0 \gg 1$, где $p = \left(\frac{m\Omega^2_\lambda}{G_3\rho_0}\right)^{1/2}$ - волновой вектор. В этом случае в уравнении (4.58) в области $R_0 < r < R_1$ можно пренебречь членом $2/r$ по сравнению с ρ_0'/ρ_0 и членом $\lambda(\lambda+1)/r^2$ по сравнению с $p^2\delta/(R_1-r)^\beta$. В результате $V^3_\lambda(r)$ будет удовлетворять уравнению (4.62) и решение (4.62) будет точным:

$$V_\lambda^3(r) = C\,(R_1 - r)^{\frac{1-\beta}{2}} J_\nu \left(\frac{2p\,\delta^{\frac{\beta}{2}}}{2-\beta} (R_1 - r)^{\frac{2-\beta}{2}} \right) \tag{4.69}$$

Поскольку $p\delta \ll 1$, справедливо асимптотическое разложение (4.67), так что в области $R_0 < r < R_1$ решение (4.69) можно представить в виде

$$V_\lambda^3(r) \sim C \left(1 - \frac{p^2 \delta^\beta}{(2-\beta)^2} \frac{(R_1 - r)^{2-\beta}}{\Gamma(\nu+2)} + \dots \right) \tag{4.70}$$

В области $r < R_0$ решение $V_\lambda^3(r)$ пропорционально сферической функции Бесселя

$$V_\lambda^3(r) = B\, j_\lambda(pr) \tag{4.71}$$

Уравнение на собственные частоты получается из сшивки логарифмических производных (4.70) и (4.71) в точке R_0

$$\frac{j_\lambda'(pR_0)}{j_\lambda(pR_0)} = \frac{p\,\delta}{(2-\beta)\,\Gamma(\nu+2)} \tag{4.72}$$

Отсюда видно, что в пределе $\delta \to 0$ мы получили граничное условие (4.59).

Таким образом, гидродинамическое граничное условие равенства нулю нормальной компоненты скорости (4.59) можно получить из уравнений приближения одного перехода (или высокочастотного предела для уравнений RPA), если плотность $\rho_0(r)$ обращается в нуль на конечном расстоянии R_1 от центра ядра по закону (4.60) при $1 \le \beta < 2$, в результате предельного перехода $\delta \to 0$, когда размер области, в которой $\rho_0(r)$ отличается от своего объемного значения, пренебрежимо мал. В частности, уравнение (4.72) позволяет учесть эффекты конечной диффузности: видно, что при $\delta \neq 0$ собственные частоты оказываются чуть меньше, чем в случае $\delta = 0$. Действительно, для линейной по δ поправки δp из (4.72) находим

$$\delta p = \frac{1}{R_0} \frac{j_\lambda(p^{(0)} R_0)}{j_\lambda''(p^{(0)} R_0)} \frac{p^{(0)}\delta}{(2-\beta)\Gamma(\nu+2)} \approx \frac{p^{(0)}\delta \left(\frac{\lambda(\lambda+1)}{(p^{(0)} R_0)^2} - 1 \right)^{-1}}{R_0 (2-\beta)\Gamma(\nu+2)} \tag{4.73}$$

откуда видно, что $\delta p < 0$, поскольку в максимумах и минимумах функции $j_\lambda(x)$ вторая производная $j_\lambda''(x)$ имеет знак, противоположный знаку функции $j_\lambda(x)$.

Заключение

Рассмотрено приближение одного перехода в уравнениях RPA , которое позволяет существенным образом упростить описание высоколежащих изоскалярных и изовекторных коллективных мод в случае произвольной формы ядра и в частности, для построения подвижного базиса коллективных фононов двойной системы произвольной конфигурации. В этом приближении рассмотрены эффекты смешивания по изоспину, учет которых необходим при расчетах формфакторов связи изовекторных мод с относительным движением в глубоко-неупругих столкновениях тяжелых ионов.

С целью апробации метода мы подробно рассмотрели его применение для описания высоколежащих изоскалярных и изовекторных мод в обычных ядрах. В случае остаточного взаимодействия факторизованного типа получено удовлетворительное описание изоскалярных мод типа высокочастотных колебаний формы ядра, а также изовекторных коллективных мод. В случае локального остаточного взаимодействия получено обоснование гидродинамической модели жидкой капли для изоскалярных мод сжатия. При этом существенным является то обстоятельство, что изоскалярная константа взаимодействия меняет знак, проходя через нуль вблизи поверхности ядра. Получено указание на возможное существование нового типа изоскалярных мод, эффективное поле которых локализовано вблизи поверхности ядра в области диффузности. В случае феноменологического изоскалярного остаточного взаимодействия , которое наряду с локальной компонентой содержит факторизованные QQ – силы, оказалось возможным одновременное описание объемных мод сжатия и высокочастотных колебаний формы ядра.

Изовекторная компонента локального взаимодействия генерирует изовекторные коллективные моды, которые в пределе малой диффузности аналогичны поляризационным возбуждениям модели жидкой капли. Рассмотрен случай конечной диффузности, когда плотность вещества обращается в нуль на конечном расстоянии от центра ядра. Получены условия, при которых существуют нормируемые решения уравнений приближения одного перехода. В этих случаях в пределе малой диффузности обоснованы граничные условия модели жидкой капли. Рассмотрено влияние конечной диффузности на спектр изовекторных мод.

В общем случае, когда плотность вещества непрерывным образом обращается в нуль на бесконечности (например, по экспоненциальному закону) в рамках приближения одного перехода не удается решить проблему ненормируемости изовекторных решений. По-видимому, решающую роль в этом случае играют следующие члены разложения уравнений RPA .

Автор глубоко благодарен В.Г.Зелевинскому за ряд критических замечаний и стимулирующий интерес к работе, а также В.Ф. Дмитриеву, В.В.Мазепусу и В.Б.Телицыну за полезное обсуждение результатов.

Литература

1. V.V. Volkov. Phys. Rep. 44 (1978) 93
2. С.Т.Беляев, В.Г.Зелевинский. ЯФ 16 (1972) 1195.
3. V.G. Zelevinsky. Nucl. Phys. A337 (1980) 40
4. В.Г.Зелевинский, Материалы XII зимней школы ЛИЯФ, Ленинград, 1977, с.53.
5. Б.А.Румянцев. Материалы XII зимней школы ЛИЯФ, Ленинград, 1977, с.97.
6. О.Бор, Б.Моттельсон. Структура атомного ядра, т.2, "Мир", 1977.
7. В.Г.Зелевинский. Микроскопическая теория коллективных состояний ядер. Конспект лекций. МИФИ, М., 1973.
8. А.Б.Мигдал. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. "Наука", М., 1965.
9. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. "Наука", М., 1977.
10. В.А.Ходель. ЯФ, 19 (1974) 792.