

B.68

12

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

В.И.Волосов, М.С.Пеккер

ПРОДОЛЬНОЕ УДЕРЖАНИЕ ПЛАЗМЫ
В ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ЛОВУШКЕ

Работа поступила - 18 июня 1980 года.

Ответственный за выпуск - С.Г. Попов.

Подписано к печати 14.08.80 МН 06858 Формат 30 x 42 1/8

Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. 1,5 печ. л.

Учётно - изд. 1,2 л. Тираж 150 экз. Заказ № 168 Бесплатно

Отпечатано на ротапринтере Института Ядерной Физики
Сибирского Отделения Академии Наук СССР
630090, Новосибирск - 90, Проспект Науки, 11

ПРЕПРИНТ 80-168



ПРОДОЛЬНОЕ УДЕРЖАНИЕ ПЛАЗМЫ В ЦЕНТРОБЕЖНОЙ
ЛОВУШКЕ

В.И.Волосов, М.С.Пеккер

Одним из альтернативных направлений в проблеме управляемого термоядерного синтеза является открытая магнитная ловушка с вращающейся плазмой (ЛВП) [1, 2]. В этой ловушке продольное удержание плазмы осуществляется как центробежным потенциалом так и магнитными пробками. Подобная система обладает целым рядом особенностей, весьма важных для термоядерного реактора: отсутствие внешних инжекторов, аксиальная симметрия, стационарный режим работы, высокие значения эффективности и т.д.

Интересной модификацией этой ловушки является так называемая, центробежная ловушка (ЦЛ) — система, в которой отсутствуют магнитные пробки, а продольное удержание связано только с наличием центробежного потенциала [2].

Ниже рассматривается задача о продольном удержании плазмы в центробежной ловушке, а также приводятся расчеты простейшего термоядерного реактора основанного на этом принципе. Подробно описаны численные методы с помощью которых были выполнены эти расчеты.

I. Принцип центробежной ловушки

В центробежной ловушке (см. рис. I) плазма занимает аксиально-симметричную область, средний радиус которой равен Z_0 , радиальная ширина — a . Структура силовых линий магнитного поля отличается от структуры поля обычной открытой ловушки; напряженность магнитного поля вдоль силовых линий от центра к краям ловушки может как убывать, так и возрастать, т.е. условие $H\tau^2 = const$ здесь не выполняется. Это реализуется с помощью дополнительных азимутальных токов протекающих в центральной области ловушки. Электрическое поле в плазме формируется с помощью двух металлических лайнеров имеющих форму магнитной поверхности и ограничивающих плазму в радиальном направлении, а также системы кольцевых электродов

контактирующих с плазмой и ограничивающих её вдоль поля. Потенциалы на лайнерах и кольцевых электродах задаются внешними источниками напряжения.

В центробежной ловушке, также как и в любой системе со скрещенными E и H полями заряженные частицы, помимо вращения по ларморовским окружностям и движения вдоль магнитных силовых линий, дрейфуют по азимуту со скоростью

$$\vec{V}_E = \frac{c \vec{F} \times \vec{H}}{e H^2} \quad \Omega_E = \frac{\vec{z} \times \vec{V}_E}{z^2} \quad (1)$$

где

$$\vec{F}_L \cong e \vec{E} + m \Omega_E^2 \vec{z} \quad (2)$$

Учитывая, что разность потенциалов в плазме между двумя достаточно близкими магнитными поверхностями практически постоянна вдоль магнитных силовых линий, а также, что второй член в (2) много меньше первого получим

$$\Omega_E \cong \frac{c E}{H z} = const \quad (2)$$

т.е. угловая скорость частицы движущейся вдоль магнитной поверхности постоянна (так называемый "закон изоротации" [1]). Это соотношение позволяет решать задачу о движении отдельных заряженных частиц в скрещенных E и H полях во вращающейся системе координат, что существенно упрощает решение. В этом случае задача сводится к известной задаче о движении частиц в зеркальной ловушке [3] с добавлением центробежной силы $F_r = m \Omega_E^2 z$ и, соответственно центробежного потенциала

$m \Omega_E^2 (z_0^2 - z^2)/2$. Очевидно, что условие удержания в этом случае имеет вид

$$V_{||}^2 \leq V_L^2 (R_H - 1) + V_{E0}^2 (1 - 1/R_G) - \frac{2e\phi_0}{m} \quad (3)$$

где $R_H = H_K / H_0$ - магнитное пробочное отношение,
 $R_G = z_0^2 / z_K^2$ - центробежное пробочное отношение,
 $V_{E0} = \Omega z_0$ - скорость вращения плазмы в центре ловушки,
 ϕ_0 - амбиполярный потенциал между центром ловушки и электродом. Индекс "K" - означает область на краю плазмы, а "0" -

- центр плазмы. Параметры ловушки R_H и R_G независимы и их величины могут быть сделаны практически любыми. Вид границы области удержания частицы в фазовом пространстве ("конус потерь") зависит от соотношения R_H и R_G . При $R_H > 1$ - гиперболоид (см. рис.2) при $R_H < 1$ - эллипсоид с полуосями

$$V_{L0} = V_{E0} \left\{ \left[(1 - 1/R_G) - e\phi_0 / W_{E0} \right] / (1 - R_H) \right\}^{1/2} \quad (4)$$

$$V_{||0} = V_{E0} \left\{ \left[1 - 1/R_G \right] - e\phi_0 / W_{E0} \right\}^{1/2}$$

При $R_H = R_G$ условие удержания совпадает с условием удержания частиц в ловушке с вращающейся плазмой [1].

Инжекция ионов и электронов в центробежную ловушку производится за счет ионизации относительно холодных нейтральных атомов в скрещенных электрическом и магнитном полях - аналогично инъекции в обычную ловушку с вращающейся плазмой [2]. Положение источника ионов в фазовом пространстве показано точкой I на рис.2, источник электронов находится в точке $V = 0$.

Центробежная ловушка имеет ряд интересных технических особенностей, отличающих ее от обычной ловушки с вращающейся плазмой, которые проявляются при создании на ее принципе термоядерного реактора. В будущем реакторе выгодно использовать режим с $R_H < 1$. В этом случае напряженность магнитного поля достигает максимального значения в центре ловушки т.е. в области максимальной плотности плазмы. Величина магнитного поля относительно невелика, даже при достаточно высоких значениях nT, β и заметном вкладе в β "центробежного" тока. Это весьма существенно, при использовании сверхпроводящих магнитов, где величина максимальных полей ограничена.

Напряженность электрического поля также достигает максимального значения в центре ловушки:

$$E_0 = E_K \sqrt{R_G / R_H} \quad (5)$$

так как величина R_G порядка 5, а $R_H = 0.8 \pm 0.6$ (как будет видно ниже), то усиление электрического поля в центре плазмы по сравнению с полем на торцах плазмы достигает 3 ± 5 . Более подробно эти вопросы обсуждаются в [2].

II. Продольное удержание частиц

Как отмечалось выше, условие удержания частиц в центробежной ловушке определяется параметрами R_r и R_n ; поэтому задача о продольном удержании частиц в ЦЛ не сводится к однопараметрической задаче об удержании частиц в ЛВП рассмотренной ранее в [2] и требует специального исследования. Для решения этой задачи необходимо решить систему двумерных уравнений Фоккера-Планка в пространстве скоростей. Обычно для этого используются разностные схемы описанные в [4, 5]. Однако при решении задач о продольном удержании плазмы в ЛВП и ЦЛ использование этих схем приводит к неверным результатам из-за сильного влияния аппроксимационных ошибок, что обусловлено отсутствием в схемах разностных аналогов законов сохранения энергии и частиц (одновременно) [6, 7]. Нами была разработана полностью консервативная разностная схема, в которой одновременно выполняются разностные аналоги этих законов [8]. Эта схема использовалась во всех расчетах, результаты которых приведены ниже: описание этой схемы дано в "Приложении".

Приведем сравнение параметров T_i и $n\tau$ для центробежной ловушки и ловушки с вращающейся плазмой (данные работы [2]).

В центробежной ловушке граница области удержания частиц (эллипсоид $R_n < 1$ или плоскость $R_n = 1$) находится много ближе к области источника быстрых частиц, чем в ЛВП (рис.2). Следствием этого является относительное возрастание потерь быстрых ионов порядка энергии инжекции и поэтому в равновесном решении температура плазмы в такой ловушке меньше чем в ЛВП при тех же значениях R_r и той же энергии инжекции, что приводит к возрастанию отношения ^{потенциального} высоты барьера к температуре ионов и соответственно к возрастанию $n\tau$. Для достаточно малых R_r ($R_r \leq 3$, $R_n \geq 0,75$), когда T_i больше высоты барьера, возрастание потерь относится ко всем ионам плазмы, что приводит к обратному эффекту, снижению $n\tau$.

На рис.3 приведены значения $n\tau$ и T_i в безразмерных единицах (T_i/W_{e0} , $n\tau = n\tau_0 \frac{4\pi e^4 \epsilon_n \Lambda_{ii}}{m_i^2 V_{e0}^3}$) для разных значений R_r и R_n . По горизонтальной оси X отложена величина

на R_r . Здесь же, для сравнения, приведены значения $n\tau$ для ЛВП кривая У и для обычной открытой ловушки - кривая УІ. Прежде всего следует отметить, что величина $n\tau$ для ЦЛ существенно превышает $n\tau$ для ЛВП. Это свидетельствует о существенном увеличении доли потерь быстрых ионов, уходящих из ловушки с уменьшением R_n ($R_r \geq 4$). При этом соответственно снижается температура ионов и возрастает отношение высоты барьера к этой температуре. На этих же графиках видно уменьшение $n\tau$ по сравнению с ЛВП при $R_r < 3$ и $R_n \approx 1+0,8$.

Как следует из этих расчетов уменьшение R_n приводит к уменьшению T_i и T_e и соответственно к росту $n\tau$ (при $R_r > 3$). Однако можно показать, используя простые оценки, что величина R_n ограничена снизу. При $R_n < 1$ область удержания ионов в фазовом пространстве является эллипсоидом и, так как большая ось эллипсоида уменьшается с уменьшением R_n , то очевидно, что при некотором значении R_n точка инжекции может оказаться вне области удержания. Условие того, что точка инжекции ($V_1 = V_{e0}$, $V_{i1} = 0$) лежит внутри эллипсоида имеет вид (см.(4))

$$(1 - 1/R_r - e\phi/W_{e0}) / (1 - R_n) > 1 \quad (5)$$

отсюда

$$R_n > 1/R_r + e\phi/W_{e0} \quad (6)$$

Время жизни частиц в ловушке растет экспоненциально с ростом отношения величин соответствующего потенциального барьера для этих частиц и их температуре. Из условия равенства времен жизни ионов и электронов в ЦЛ имеем

$$\frac{\exp(-W_{e0}(1-1/R_r) - e\phi)/T_i}{\sqrt{m_i} T_i^{3/2}} = \frac{\exp(-e\phi/T_e)}{\sqrt{m_e} T_e^{3/2}}$$

Отсюда находим $e\phi$ и подставляя в (6) получаем:

$$R_n > 1/R_r + \frac{(1-1/R_r)T_e}{T_i + T_e} + \frac{T_i \cdot T_e}{2(T_i + T_e)W_{e0}} \ln\left(\frac{m_i}{m_e} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^3\right) \quad (6')$$

Как было показано выше с ростом R_r температура ионов уменьшается и приближается к температуре электронов.

При $T_i \approx T_e$ используя приближенное равенство $T_i + T_e \approx \frac{W_{e0}}{R}$ получим

$$R_H > 1/2 + 1/2 R_r + 1/4 R_r \ln(m_i/m_e)$$

т.е. при $R_r \gg 1$ минимальное значение $R_H \approx 0,5$.

Для $R_r = 2 + 5$ минимальные значения R_H лежат в интервале $0,6 + 0,8$ (идеальная ловушка). Учет перезарядки и ионизации (см. ниже) несколько снижает минимальные значения R_H за счет относительного уменьшения высоты потенциального барьера для ионов.

III. Расчет простейшего реактора

Рассмотрим параметры термоядерного реактора, работающего на принципе центробежной ловушки. Для упрощения расчетов предположим, что радиальные потери тепла и частиц малы по сравнению с продольными и не будем их учитывать. Предположим, также, что нейтральные атомы с помощью которых осуществляется инжекция в реактор, свободно пронизывают объем плазмы и равномерно распределяются по ее объему (параметры плазмы $W_{e0} \approx 125 \div 500 \text{ кэВ}$; $T_e = 6 \div 25 \text{ кэВ}$; $T_i = 25 \div 100 \text{ кэВ}$; $n = 1 \div 3 \cdot 10^{13}$; $a \sim 50 \text{ см}$ скорость инжектируемых атомов 10^7 см/сек). Поэтому наряду с процессом ионизации необходимо учесть процесс перезарядки имеющий по порядку величины те же сечения, что и ионизация, и приводящий к заметным потерям энергии из плазмы. Другие процессы (как было показано в [2]) слабо влияют на параметры реактора.

В предположении, что в единицу времени рождается фиксированное число ионов т.е. мощность источника постоянна во всем объеме уравнения для функций распределения ионов и электронов в центробежной ловушке с учетом ионизации и перезарядки имеют вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = St(f_i) + 2 \delta(x-1) \frac{1}{2\pi} \delta(\theta - \pi/2) \times \quad (7)$$

$$\left(1 + \frac{\langle \sigma_{oi} V \rangle}{\langle \sigma_i V \rangle + \langle \sigma_e V \rangle} \right) - \frac{f_i \sigma_{oi} V}{(\langle \sigma_i V \rangle + \langle \sigma_e V \rangle) \int f_i d^3x}$$

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = St(f_e) + \frac{\delta(x)}{x^2} \quad (8)$$

Здесь функции распределения f_i и f_e нормированы на единственный источник; скорость вращения, кулоновский логарифм для ион-ионных столкновений, а также масса ионов принята равной единице. Первые члены в (7) и (8) описывают процессы кулоновских столкновений между всеми сортами заряженных частиц, вторые - рождения частиц т.е. источники. В этих уравнениях X - безразмерная скорость, σ_i, σ_e - сечение ионизации соответственно ионами и электронами, V - скорость заряженной частицы в лабораторной системе отсчета (скорость нейтральных атомов много меньше чем V), σ_0 - сечение перезарядки.

Подробный вывод (7), (8) для ЛВП с учетом перезарядки, а также область применимости этих уравнений описаны в [2].

На рис. 4 приведены зависимости nT и T_i от энергии инжекции для различных R_r и R_H . Как и в идеальном случае величина nT для центробежной ловушки больше, чем для ЛВП, однако здесь это превышение наблюдается лишь при $W_{e0} \geq 150 \text{ кэВ}$ ($W_{e0} = 2 W_{eH}$, $W_{eH} = 3 W_{eH}$) $R_r > 4$. Этот эффект объясняется сильным влиянием перезарядки, которая приводит к подогреву ионной компоненты плазмы (вместо теплового иона, уходящего из ловушки, за счет перезарядки рождается ион с энергией W_{e0}). При энергии инжекции $W_{e0} \leq 100 \text{ кэВ}$ за счет этого подогрева существенно повышается температура ионов (рис. 3и4), уменьшается относительная высота барьера для ионной компоненты плазмы и, соответственно, снижается nT .

В приведенных ниже расчетах эффективности реактора учитывалась возможность рекуперации энергии ионов, уходящих из ловушки с вращающейся плазмой [2]. Механизм рекуперации связан с тем, что ионы двигаясь по циклоиде в скрещенных полях меняют свою кинетическую энергию. Если электроды на краю ловушки расположены в виде "ступенек" (рис. 5), т.е. угол между их торцевой плоскостью и силовыми линиями $\neq 90^\circ$, то ионы будут уходить на торцевой электрод с кинетической энергией много меньше их средней энергии, совершая работу против электрического поля. Очевидно, что эффективность рекуперации возрастает с уменьшением

параметра $(\Delta/2\beta_i^*)$ где Δ - расстояние между электродами, β_i^* - ларморовский радиус иона вблизи электрода.

На рисунках 6-9 приведены значения Q для ЦЛ, полученные при различных значениях R_r, R_n, W_{en} и $\Delta/2\beta_i^*$.

При вычислении Q учитывались дополнительные потери связанные с перезарядкой и дополнительным ускорением электронов в электродном узле. Эти процессы подробно описаны в [2], мощность этих потерь равна соответственно

$$P_1 = \frac{m_i}{2} n_i n_0 \langle \sigma_{oi} V \rangle = S_0 W_{e0} \frac{\langle \sigma_{oi} V \rangle}{\langle \sigma_{oi} V \rangle + \langle \sigma_{oe} V \rangle}$$

$$P_2 = \frac{S_0 W_{e0} \Delta}{R_r \beta_i^*}$$

где S_0 - число ионов, рождающихся в единице объема.

Заметим, что величина Q , для случая когда отсутствует рекуперация энергии ионов, а параметр $\Delta/2\beta_i^*$ стремится к нулю, практически совпадает с кривой С на рисунках 6-9.

ВЫВОДЫ

Центробежная ловушка ($R_n < 1, R_r \gg 1$) по сравнению с обычной ловушкой с вращающейся плазмой ($R_n = R_r$) имеет не только технические преимущества, но так же и более высокие значения Q при одинаковых значениях R_r и энергии инжекции. Центробежная ловушка имеет также более высокое значение Q при $R_r \geq 4$ и $W_{en} > 10 \text{ КэВ}$.

Приложение

Схема расчета (полностью консервативная разностная схема для уравнения Фоккера-Планка)

Уравнение Фоккера-Планка (УФП), описывающее временную эволюцию функции распределения частиц в пространстве скоростей имеет вид [9].

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[A_\alpha F_\alpha + B_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} \right] + \frac{1}{x^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[C_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial \theta} + D_\alpha F_\alpha + E_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} \right] + S_\alpha \quad (10)$$

здесь α - сорт частиц, F_α - функция распределения частиц сорта α , S_α - функция источника

$$A_\alpha = x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta G_\alpha}{2} - H_\alpha \right) - x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x \Delta G_\alpha}{2} - \frac{1}{2x} \frac{\partial}{\partial x} x^2 \frac{\partial G_\alpha}{\partial x} \right),$$

$$B_\alpha = \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x^2}, \quad C_\alpha = \sin \theta \left(\frac{\partial G_\alpha}{\partial x} \frac{1}{2x} + \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial \theta^2} \frac{1}{2x^2} \right),$$

$$D_\alpha = \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\Delta G_\alpha}{2} - H_\alpha \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 G_\alpha}{2 \partial x \partial \theta} - \frac{\partial G_\alpha}{2x \partial x} \right] \right),$$

$$E_\alpha = \sin \theta \left(\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{x} \frac{\partial G_\alpha}{\partial \theta} \right),$$

$$H_\alpha = \Gamma_\alpha \sum_p \ln \Lambda_{\alpha p} z_p^2 / z_\alpha^2 \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_p} \right) h_p, \quad h_p = \int F_p |\vec{x} - \vec{x}'|^{-1} d^3 x',$$

$$G_\alpha = \Gamma_\alpha \sum_p \ln \Lambda_{\alpha p} z_p^2 / z_\alpha^2 g_p, \quad g_p = \int F_p |\vec{x} - \vec{x}'| d^3 x'$$

$\ln \Lambda_{\alpha p}$ - кулоновский логарифм, Δ - оператор Лапласа, z_α, m_α - заряд и масса частицы сорта α ,

Метод построения полностью консервативной разностной схемы, используемой в расчетах мы изложим следуя работе [8].

Представим дифференциальное уравнение (10) в полностью дивергентном виде

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x} \frac{\partial W_\alpha}{\partial x} + \frac{1}{x^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[C_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial \theta} + D_\alpha F_\alpha + E_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} \right] + S_\alpha \quad (12)$$

где

$$\frac{1}{x} \frac{\partial W_\alpha}{\partial x} = A_\alpha F_\alpha + B_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} \quad (12')$$

Интегрируя (12') и подставляя значения A_α и B_α через H_α и G_α получим

$$W_\alpha = \frac{1}{2} F_\alpha x^3 \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x^2} - \int F_\alpha dx' \left(x'^3 \frac{\partial H_\alpha}{\partial x'} + \frac{x'^2}{2} \Delta G_\alpha \right)$$

Для вычисления A, B, C, D, E разложим $F_\alpha, g_\alpha, h_\alpha$ в ряд по полиномам Лежандра

$$F_\alpha = \sum_j F_{\alpha j}(x) P_j(\theta), \quad g_\alpha = \sum_j g_{\alpha j}(x) P_j(\theta), \quad h_\alpha = \sum_j h_{\alpha j}(x) P_j(\theta)$$

Из симметрии функции распределения относительно $\theta = \pi/2$ следует, что j — четное число. Введем функционалы:

$$M_{\alpha j} = \int_x^\infty F_{\alpha j}(x') x'^{1-j} dx', \quad N_{\alpha j} = \int_0^x F_{\alpha j}(x') x'^{2+j} dx' \\ R_{\alpha j} = \int_x^\infty F_{\alpha j}(x') x'^{3-j} dx', \quad E_{\alpha j} = \int_0^x F_{\alpha j}(x') x'^{4+j} dx' \quad (I3)$$

Получим

$$h_{\alpha j} = \frac{4\pi}{2j+1} [X^{-(1+j)} N_{\alpha j} + X^j M_{\alpha j}] \\ g_{\alpha j} = \frac{4\pi}{2j+1} \left[\frac{1}{2j+3} (X^{-(1+j)} E_{\alpha j} + X^{j+2} M_{\alpha j}) - \frac{1}{2j-1} (X^{1-j} N_{\alpha j} + X^j R_{\alpha j}) \right] \quad (I4)$$

Формулы для $\partial h_{\alpha j} / \partial x$, $\partial^2 g_{\alpha j} / \partial x^2$, необходимые для вычисления W_{α} легко получить дифференцированием (I4) (ΔG_{α} вычисляется через h_{α}). После ряда вычислений и простых преобразований W_{α} имеет вид:

$$W_{\alpha} = \sum_{\beta, j} v_{\beta} \Lambda_{\alpha \beta} \Gamma_{\alpha} \frac{z_{\beta}^2 4\pi p_j(\theta)}{z_{\alpha}^2 (2j+1)} \left\{ F_{\alpha}(x, \theta) T_{\beta j}(x) + \right. \\ \left. (1 + m_{\alpha}/m_{\beta}) \int_0^x [(j+1) F_{\alpha}(y, \theta) N_{\beta j}(y) - j F_{\beta j}(y) N_{\alpha}(y, \theta)] y^{1-j} dy - \right. \\ \left. \int_0^x [N_{\beta j}(y) F_{\alpha}(y, \theta) + F_{\beta j}(y) N_{\alpha}(y, \theta)] y^{1-j} dy - (1+j(1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\beta}})) M_{\beta j} N_{\alpha} \right\} \quad (I5)$$

$$N_{\alpha}(x, \theta) = \int_0^x y^{2+j} F_{\alpha}(y, \theta) dy \\ T_{\beta j}(x) = \frac{(j+1)(j+2)}{2x^j} \int_0^x y^{2j+2} M_{\beta j}(y) dy - \frac{j(j-1)}{2x^{j-2}} \int_0^x y^{2j-2} R_{\beta j}(y) dy \quad (I5')$$

Для изотропного случая, когда F_{α} не зависит от θ W_{α} легко преобразуется к виду W_{α} из работы [10].

Для построения разностной схемы уравнения (I2) введем равномерную сетку по X и θ : $X_i = \delta X \cdot i$, $\theta_k = \delta \theta \cdot k$

Заменяя дифференциальные операторы на разностные по формулам:

$$\frac{1}{x^2} \left(\frac{W_{\alpha x}}{x} \right)_x = \frac{2}{X_i^2 \delta X^2} \left[\frac{W_{\alpha i+1, k} - W_{\alpha i, k}}{X_{i+1} + X_i} - \frac{W_{\alpha i, k} - W_{\alpha i-1, k}}{X_i + X_{i-1}} \right] \\ \frac{1}{x^2 \sin \theta} (C_{\alpha} F_{\alpha \theta} + D_{\alpha} F_{\alpha} + E_{\alpha} F_{\alpha x})_{\theta} = \frac{1}{X_i^2 \sin \theta_k \delta \theta^2} \left[C_{\alpha i, k+1/2} \times \right. \\ \left. \times (F_{\alpha i, k+1} - F_{\alpha i, k}) - C_{\alpha i, k-1/2} (F_{\alpha i, k} - F_{\alpha i, k-1}) + \right. \\ \left. \delta \theta (D_{\alpha i, k+1/2} F_{\alpha i, k+1/2} - D_{\alpha i, k-1/2} F_{\alpha i, k-1/2}) + E_{\alpha i, k+1/2} \times \right. \\ \left. \frac{\delta \theta}{\delta X} (F_{\alpha i+1/2, k+1/2} - F_{\alpha i-1/2, k+1/2}) - E_{\alpha i, k-1/2} (F_{\alpha i+1/2, k-1/2} - F_{\alpha i-1/2, k-1/2}) \right]$$

получим разностное уравнение

$$(F_{\alpha})_t = \frac{1}{x^2} \left(\frac{W_{\alpha x}}{x} \right)_x + \frac{1}{x^2 \sin \theta} (F_{\alpha \theta} C_{\alpha} + F_{\alpha} D_{\alpha} + F_{\alpha x} E_{\alpha})_{\theta} + \dots \quad (I7)$$

аппроксимирующее (3) со вторым порядком точности по $\delta \theta$ и δX

. Здесь D , E , C , F в точках $i, k \pm 1/2$ и $i \pm 1/2, k \pm 1/2$ вычисляются соответственно как полусумма значений в точках θ_k и X_i и четверть от суммы значений в точках θ_k, X_i ; $\theta_k \pm \delta \theta, X_i$; $\theta_k, X_i \pm \delta X$; $\theta_k \pm \delta \theta, X_i \pm \delta X$. Уравнение (I7) будет полностью консервативным, т.е. обладать разностным аналогом закона сохранения частиц и энергии, если

$$F_{\alpha j i} = \sum_k p_j(\theta_k) \sin \theta_k F_{\alpha}(X_i, \theta_k) \delta \theta \quad (I7')$$

Для получения уравнения относительно F воспользуемся формулой трапеции, аппроксимирующей интегралы (I3) и (I5) имеем

$$\frac{1}{x^2} \left(\frac{W_{\alpha x}}{x} \right)_x = \frac{2}{X_i^2 \delta X^2} \left[(\bar{A}_{\alpha i, k} F_{\alpha i+1, k} + \bar{B}_{\alpha i, k} F_{\alpha i, k}) - \right. \\ \left. (\bar{A}_{\alpha i-1, k} F_{\alpha i, k} + \bar{B}_{\alpha i-1, k} F_{\alpha i-1, k}) \right] \quad (I8)$$

где

$$\bar{A}_{dik} = \frac{\Gamma_\alpha}{\chi_i + \chi_{i+1}} \sum_{p,i} \ln \Lambda_{dp} \frac{4\pi p_i(\theta) z_p^2}{z_\alpha^2 (2j+1)} \left[T_{p,i,i+1} + \frac{\delta X}{2} \left\{ \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_p}\right) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. (j+1) - 1 \right) \times \chi_{i+1}^{1-j} N_{p,i,i+1} - \left(\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_p}\right) j+1 \right) \left(M_{p,i,i+1} \chi_{i+1}^{2+j} + \frac{\delta X}{2} F_{p,i,i+1} \chi_{i+1}^2 \right) \right]$$

$$\bar{B}_{dik} = \frac{\Gamma_\alpha}{\chi_i + \chi_{i+1}} \sum_{p,i} \ln \Lambda_{dp} \frac{4\pi p_i(\theta) z_p^2}{(2j+1) z_\alpha^2} \left[-T_{p,i,i} + \frac{\delta X}{2} \left\{ \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_p}\right) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. (j+1) - 1 \right) \chi_i^{1-j} N_{p,i,i} - \left(\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_p}\right) j+1 \right) \left(M_{p,i,i} \chi_i^{2+j} + \frac{\delta X}{2} \chi_i^{2+j} \chi_{i+1}^{1-j} \right) \right]$$

Подставляя (18) в (17) получим разностное уравнение относительно F_α . Легко проверить, что разностное уравнение (17) с подстановкой (18) является полностью консервативным, т. е. сохраняет разностную сумму $\sum_{i,k} (F_\alpha)_t \sin \theta_{ik} \chi_i^2 \delta X \delta \theta$ и сумму

$$\sum_{i,k} (F_\alpha)_t \sin \theta_{ik} \chi_i^4 \delta \theta \delta X$$

Отметим, что при изотропных потенциалах g и h W_α совпадает с W_α работы [11].

В расчетах центробежной ловушки, мы полагали, что плазма состоит из двух сортов частиц ионов с массой m_{ip} равной 2.47 массы протона и электронов которые учитывались так же как и в работе [2]. Функция распределения ионов находилась решением уравнения (17) методом стабилизирующей поправки [12].

Литература

1. В. Lehnerz. *Nucl. Fus.*, II, 485 (1971)
2. А.А.Бехтенов, В.И.Волосов, В.Е.Пальчиков, М.С.Пеккер, Ю.Н.Юдин. *Nucl. Fus.*, 20, № 5, 579 (1980).
3. Будкер Г.И. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. I, 243, Изд. АН СССР, М., (1958).
4. А. Н. Futch, J. R. Holdren, I. Killeen, A. A. Mizin. *Plas. Phys.*, I4, 211, (1972).
5. I. Killeen. *Nucl. Fus.*, 16, 841 (1976).
6. В.И.Волосов, М.С.Пеккер, "Сб.числ. методы механ. сплошной среды", 10, вып. I, Новосибирск, "Наука", 1979, 45-56.
7. В.И.Волосов, М.П.Пеккер *Ж.вычисл.матем.физ.*, 20, № 4, 1980.
8. Пеккер М.С. Перепринт ИЯФ 80 * 38.
9. M. N. Rosenbluth, W. M. MacDonald, D. L. Judd. *Phys. Rev.*, 107, I (1957). *МАТ.*
10. А.В.Бобылев, В.В.Чуянов *Ж.вычисл.матем.физ.*, 1976, 16, № 2. 407-416.
11. И.Ф.Пятапенко, В.А.Чуянов, *Ж.вычисл.матем.физ.*, 20, 513 (1980). *МАТ.*
12. Н.Н.Яненко. Метод дробных шагов для решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, "Наука" АН СССР Сиб.отделение, 1967.

- рис.1. Схема центробежной ловушки
 1 - кольцевые электроды
 2 - внутренний лайнер
 3 - внешний лайнер
 4-5 - катушки магнитного поля
 пунктир - силовые линии магнитного поля.
- Рис.2. Границы удержания плазмы в фазовом пространстве для центробежной ловушки
 А. $R_H = 1$ Б. $R_H = 0.5$
 В. $R_H = R_G$ (ловушка с вращающейся плазмой)
- Рис.3. Зависимость $n\tau$, T_i/W_{e0} и T_e/W_{e0} (пунктир) от R_G для идеальной центробежной ловушки при различных R_H для ДТ-плазмы ($m_{\text{эф}} = 2.47$). Энергия инжекции $50 \cdot m_{\text{эф}}$ кэВ, мощность источника 10^{15} част/см³сек.
 I - $R_H = 1$; II - $R_H = 0.95$; III - $R_H = 0.9$;
 IV - $R_H = 0.85$; V - $R_H = R_G$; VI - ловушка с $R_G = 0$ (по оси отложена величина R_H).
- Рис.4. Зависимость $n\tau$, T_i/W_{e0} и T_e/W_{e0} (пунктир) от W_{eH} для центробежной ловушки. ДТ-плазма ($m_{\text{эф}} = 2.47$) мощность источника 10^{15} част/см³сек; W_{eH} - энергия инжекции иона водорода (энергия вращения); энергия инжекции дейтона $W_{eD} = 2 W_{eH}$ трития $W_{eT} = 3 W_{eH}$.
 I - $R_H = 0.75$, $R_G = 3$; II - $R_H = 0.8$, $R_G = 4$;
 III - $R_H = 0.8$, $R_G = 5$; IV - $R_H = 0.75$, $R_G = 5$;
 V - $R_H = R_G = 3$; VI - $R_H = R_G = 5$.
- Рис.5. Схема движения иона вблизи торцевых электродов.
- Рис.6. Зависимость Q от энергии инжекции W_{eH} (см.рис.5) с учетом рекуперации энергии на электродах для реактора с $R_G = 3$, $R_H = 0.75$ - сплошная кривая и $R_H = R_G = 3.0$ - пунктирная кривая; при $\Delta/2\beta_c^*$ равном а) $-1/8$; в) $-1/4$; с) $-1/2$; д) -1.0 .
- Рис.7. То же, что на рис.6 для реактора с $R_G = 4$, $R_H = 0.8$,

при $\Delta/2\beta_c^*$ равном а) $-1/8$; в) $-1/4$; с) $-1/2$;
 д) 1.0 .

- Рис.8. То же, что на рис.6 для реактора с $R_G = 5$, $R_H = 0.8$ - сплошные кривые; $R_G = R_H = 5.0$ - пунктирные кривые;
- Рис.9. То же, что на рис.6 для реактора с $R_G = 5$, $R_H = 0.75$ - сплошные кривые; $R_G = R_H = 5$ - пунктирные кривые.

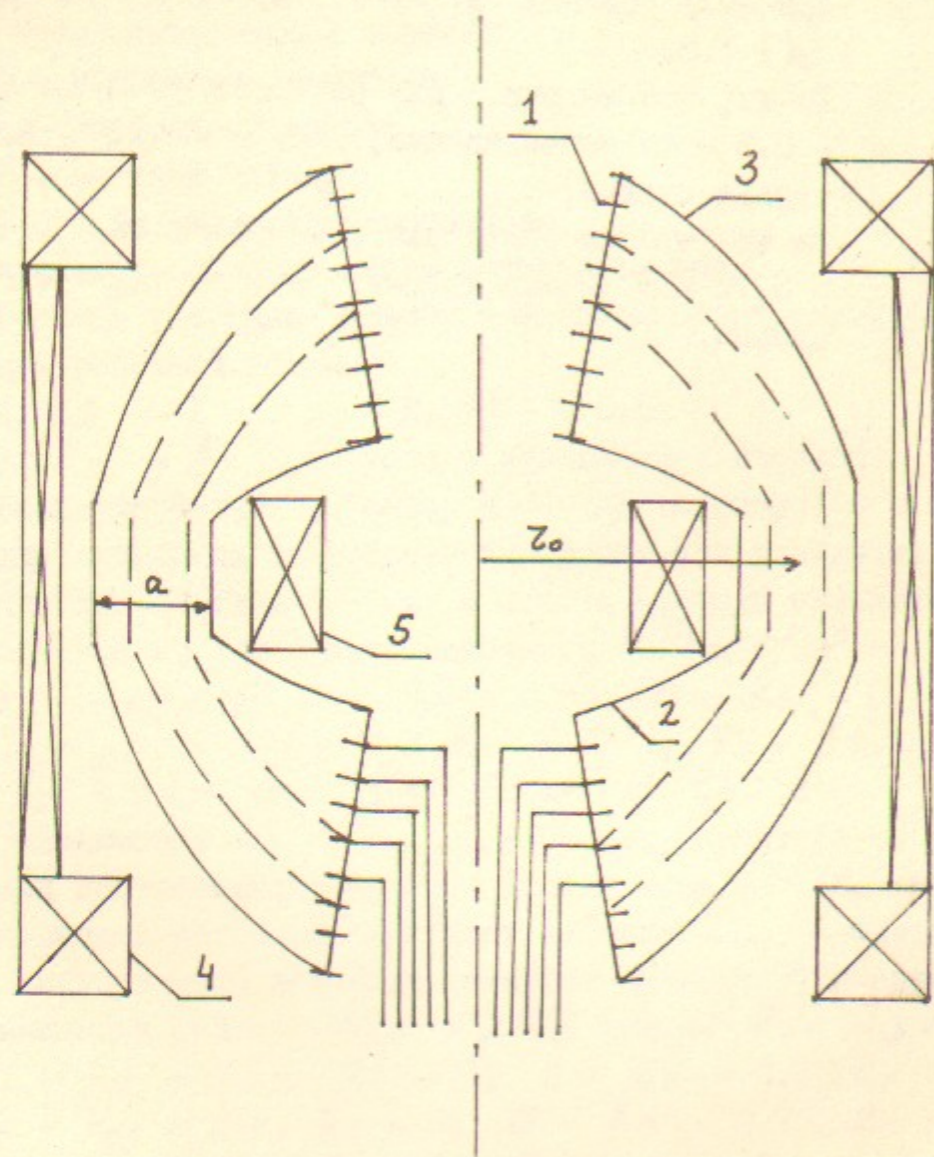


Рис. I

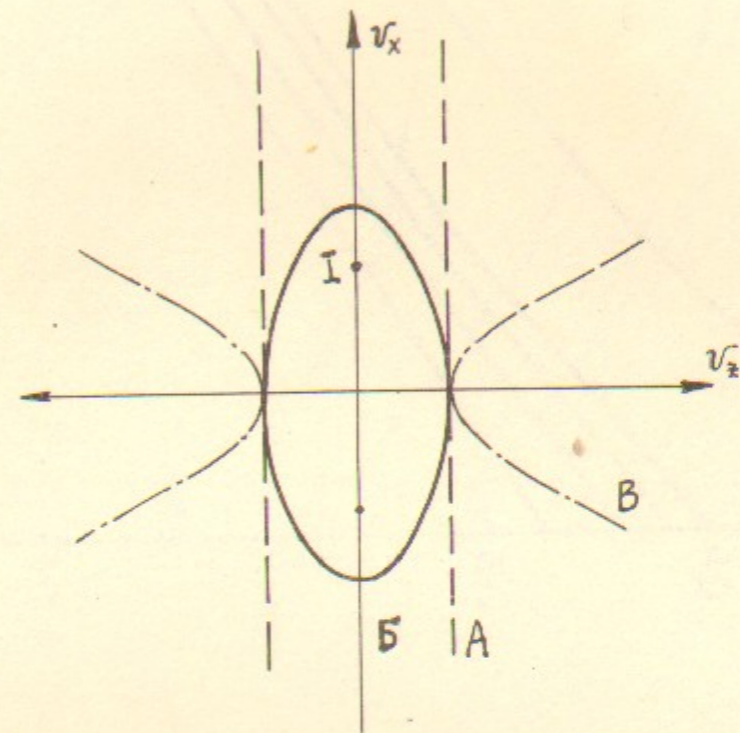


Рис. 2

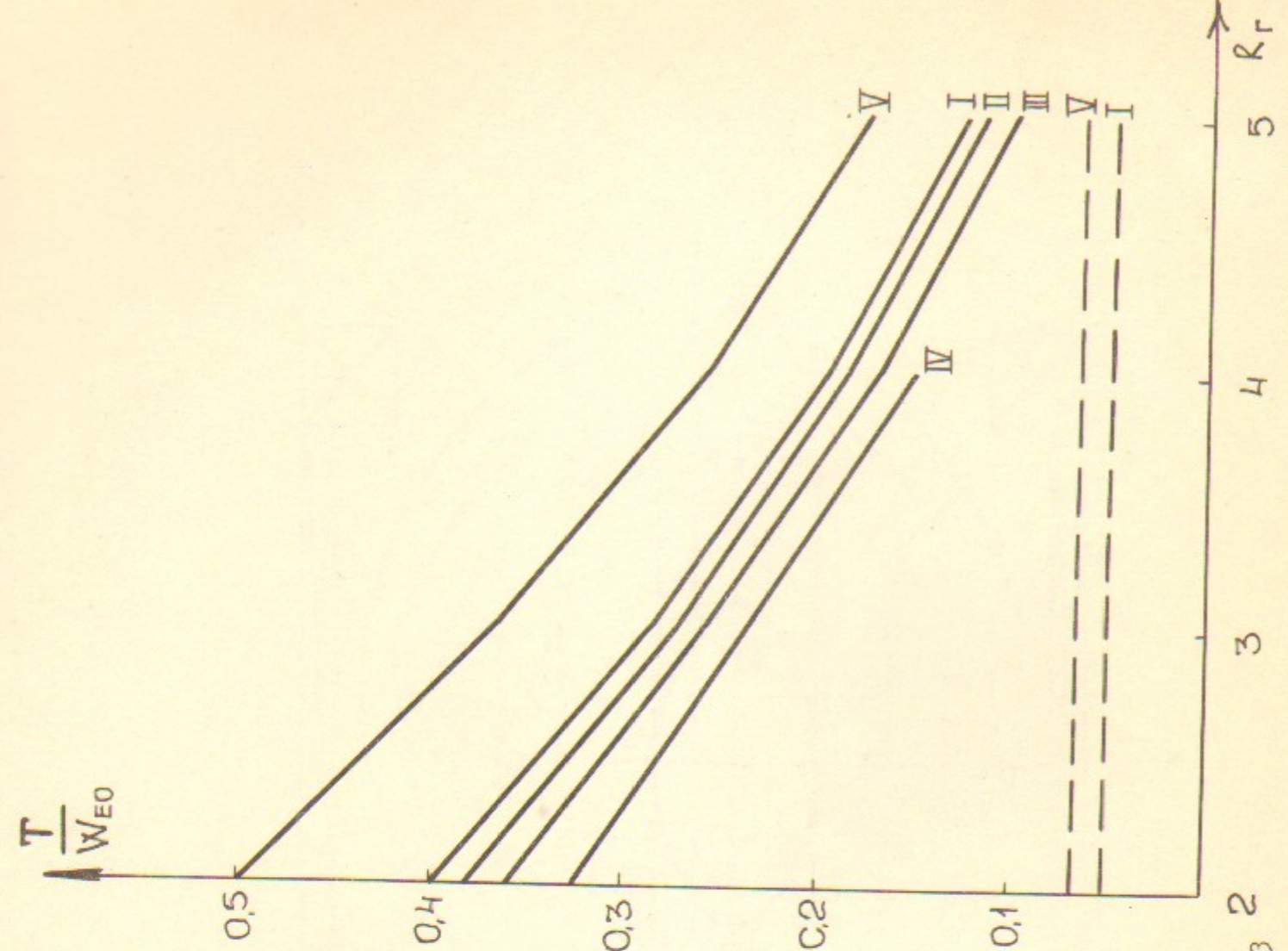
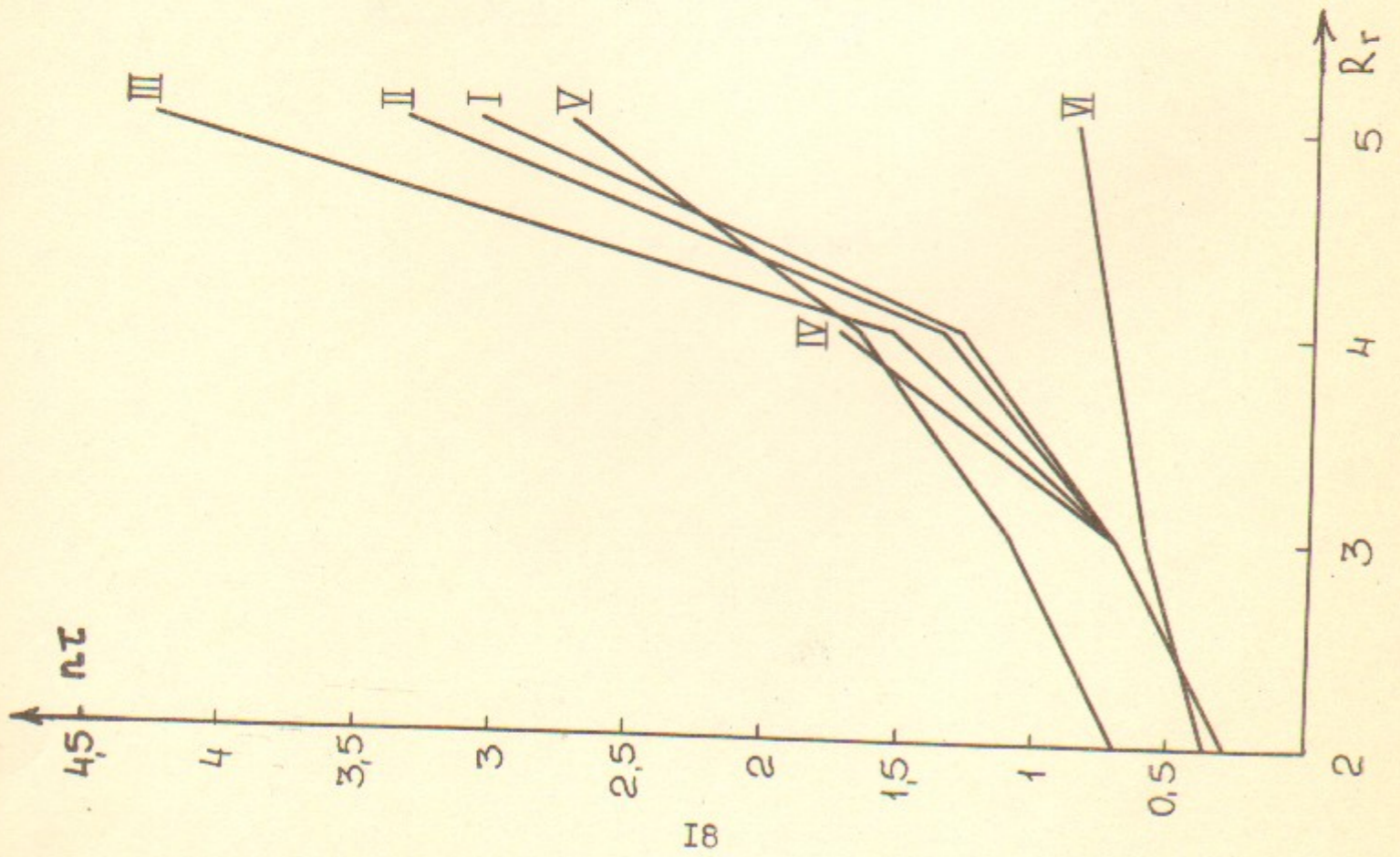


Рис.3

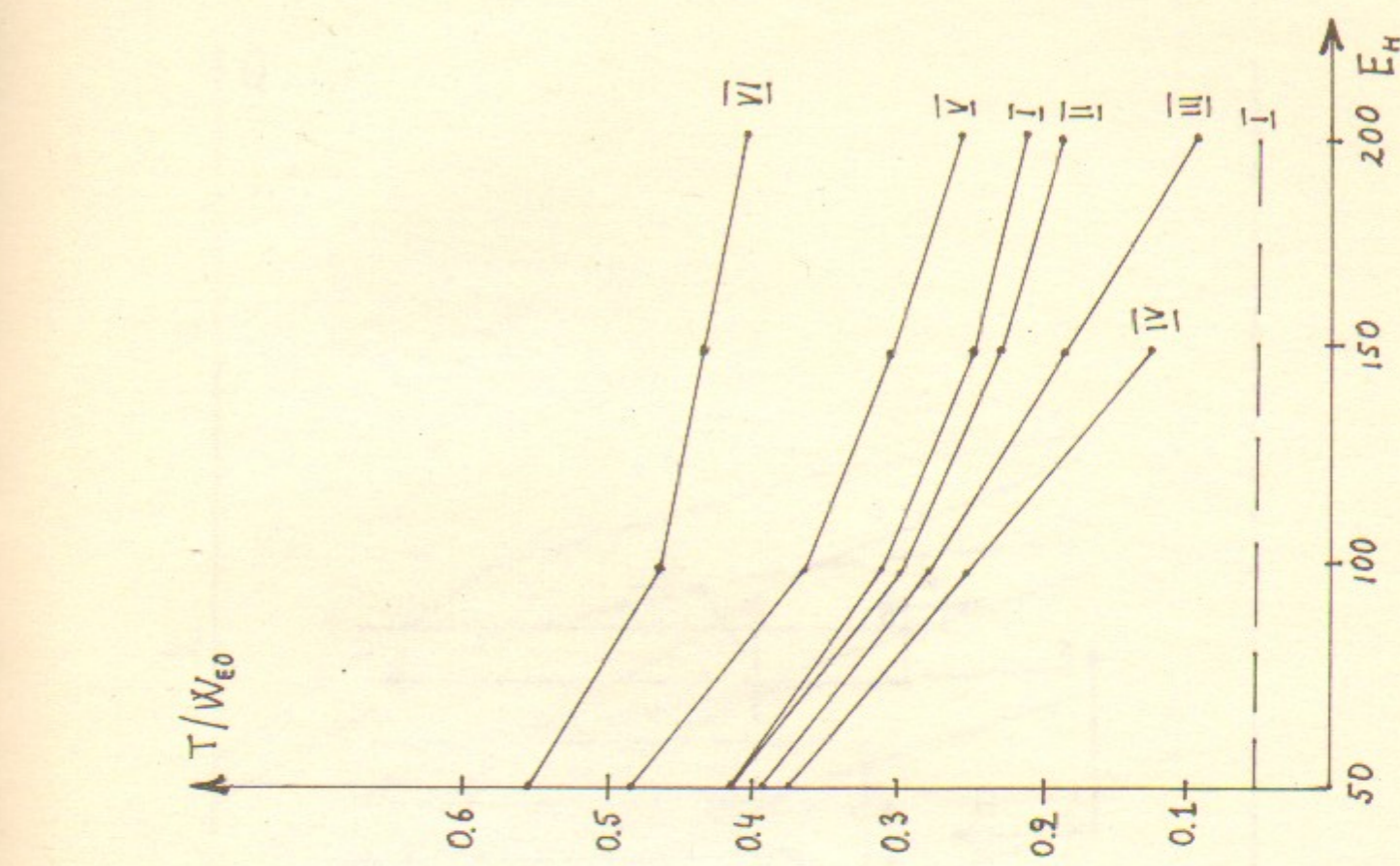
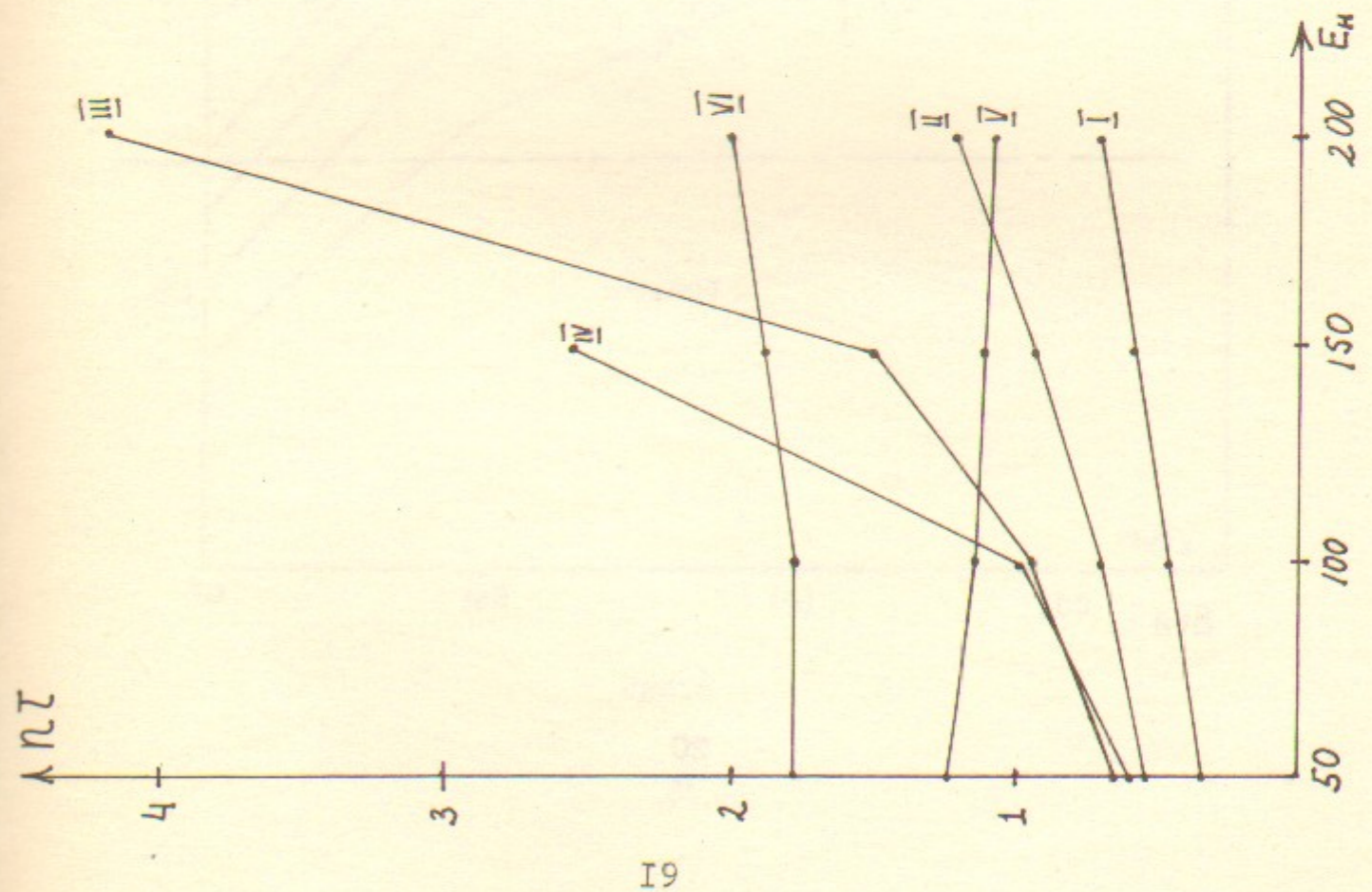


Рис.4

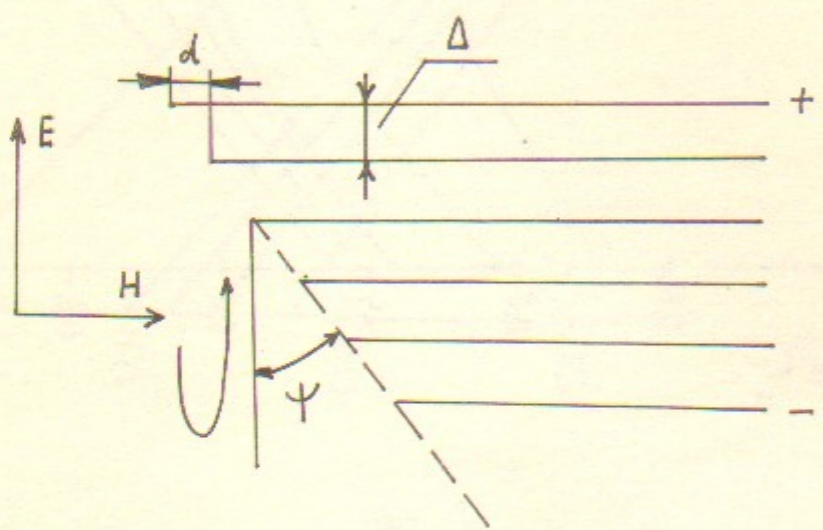


Рис.5

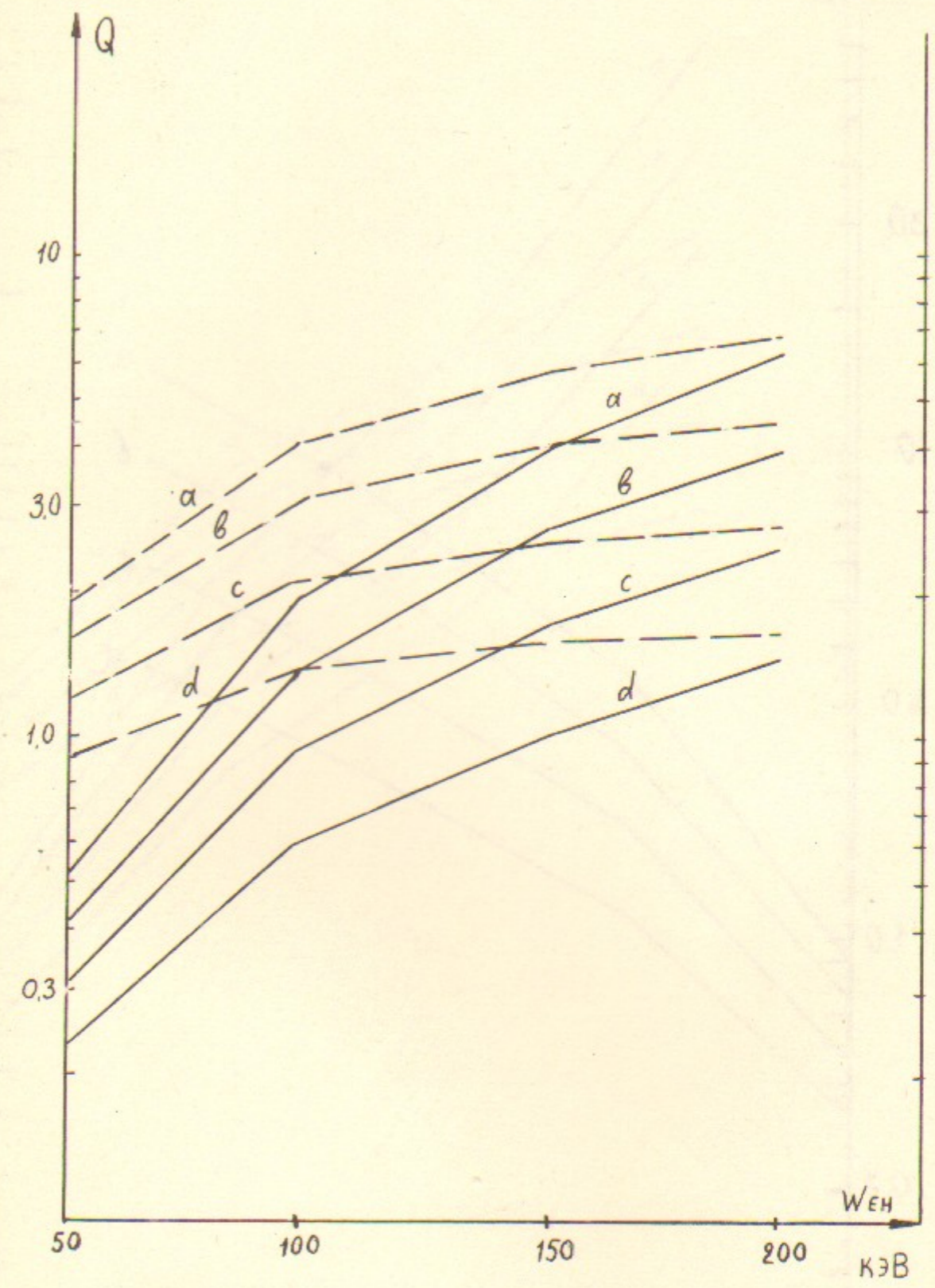


Рис.6

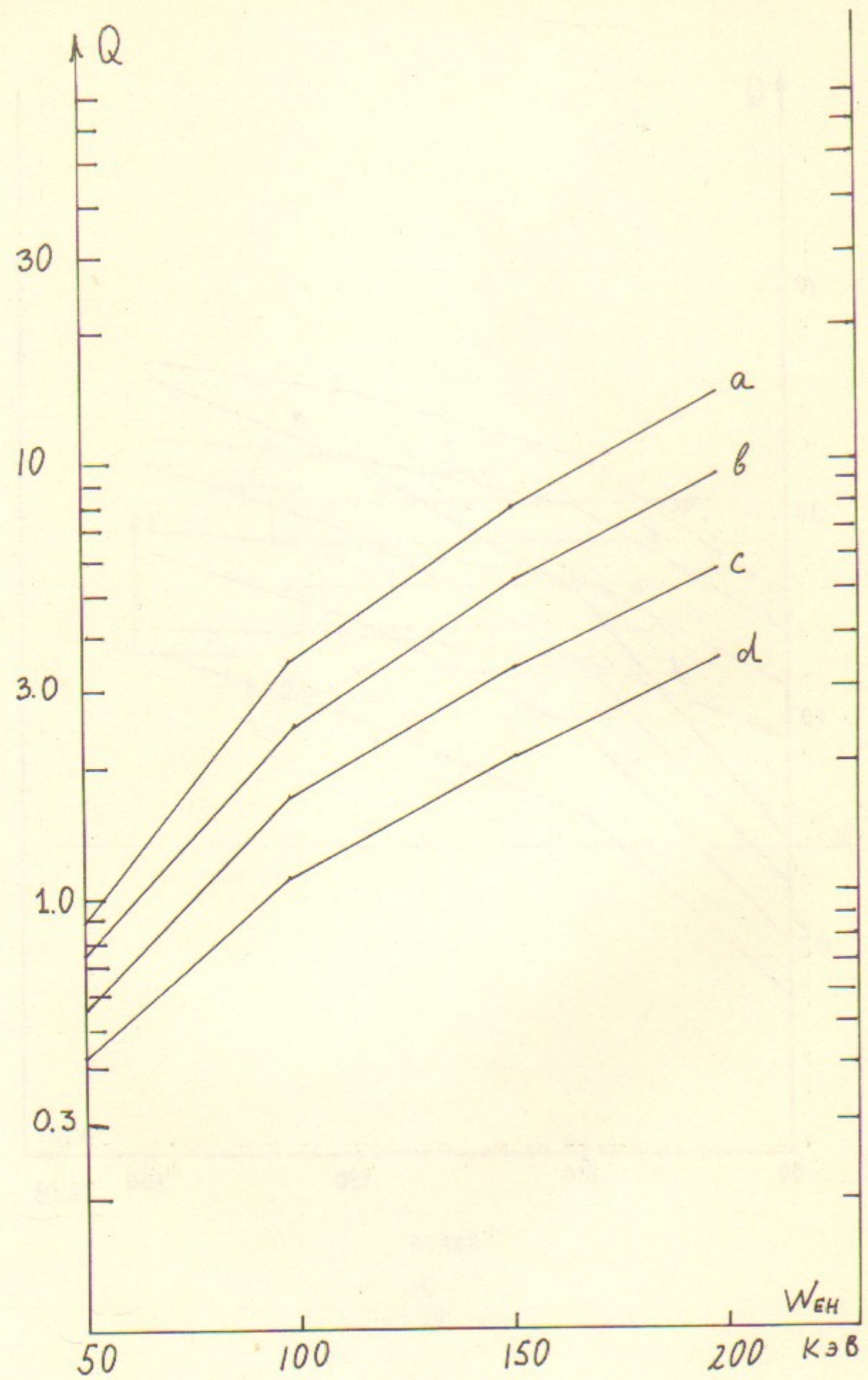


Рис.7

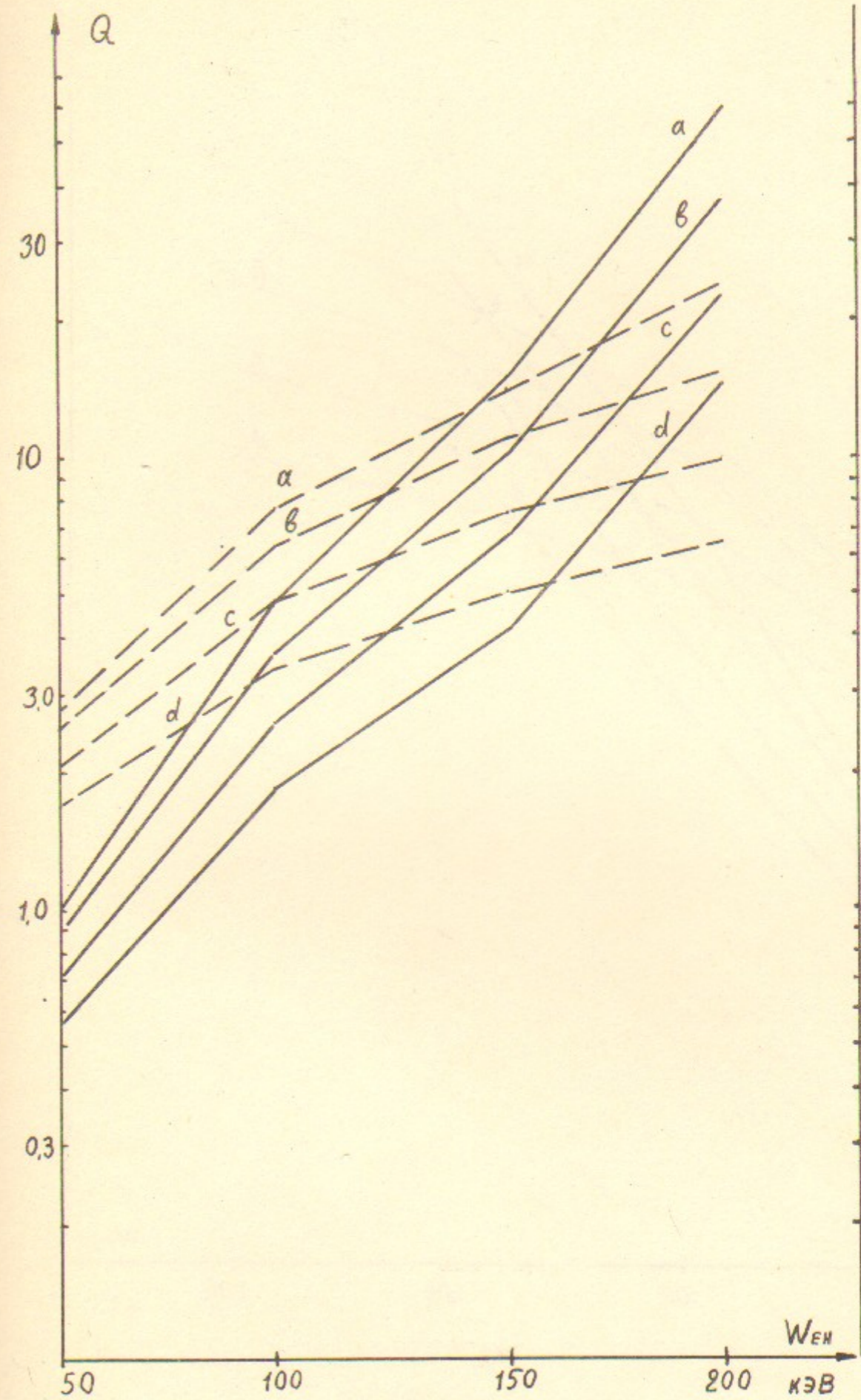


Рис.8

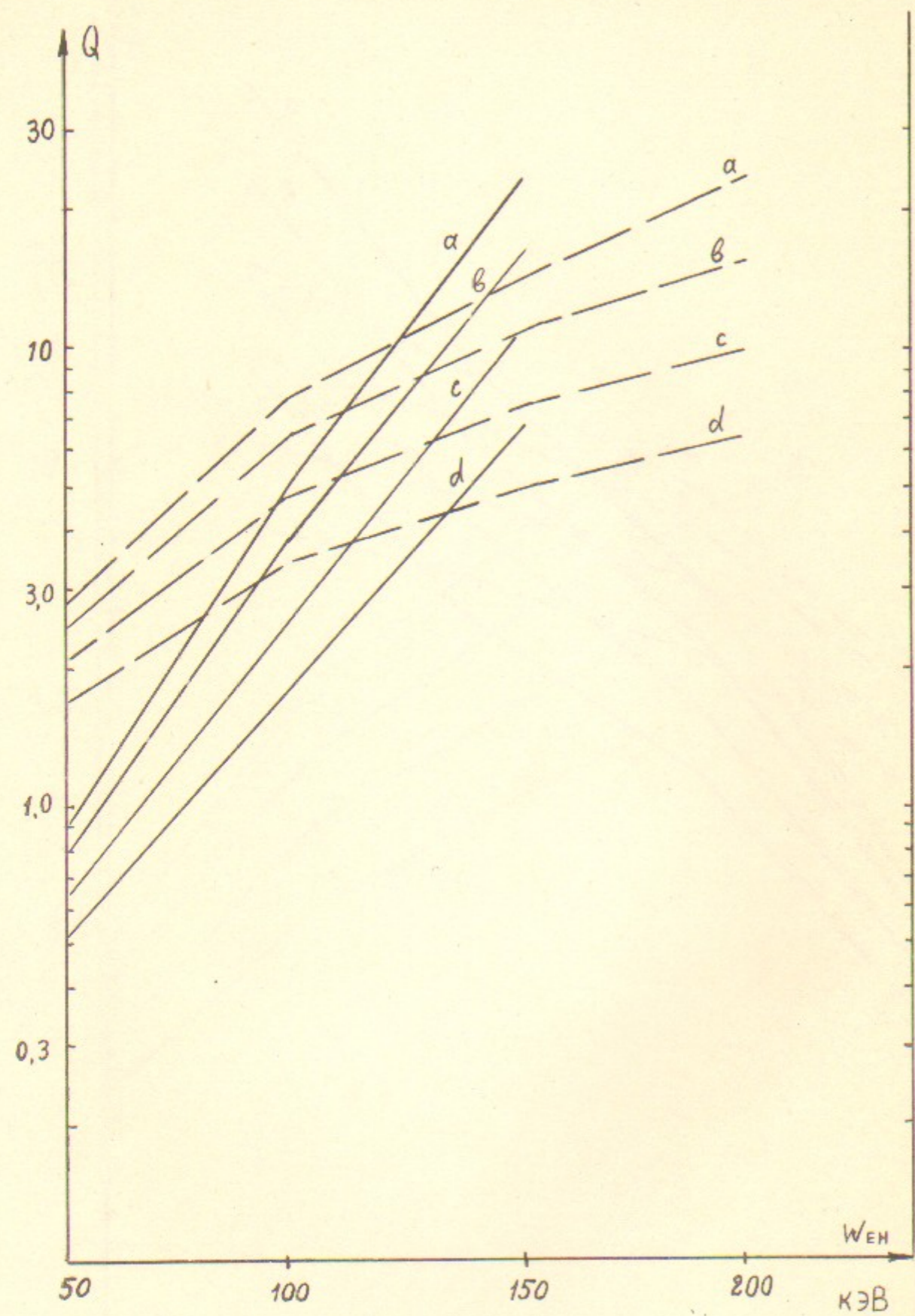


Рис. 9