

39  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР  
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков

**ВЫРОЖДЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ  
В ПРОСТЫХ СИСТЕМАХ**

ПРЕПРИНТ 80-128



Новосибирск

## ВЫРОЖДЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПРОСТЫХ СИСТЕМАХ

Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков

### А Н Н О Т А Ц И Я

В работе представлены результаты численного исследования поведения простой автоколебательной системы, в которой при достаточно сильной диссипации возникает стохастический аттрактор. Обращается внимание на тот факт, что при слабой диссипации турбулентное движение вырождается в квазипериодическое. Указанное явление исследуется как качественно, так и количественно. Выясняется роль числа степеней свободы системы.

Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков

В последние годы появилось большое число работ, в которых с разных точек зрения исследуется стохастическое движение в диссипативных системах. Широкий интерес к этой проблеме был в значительной степени стимулирован гипотезой Рюэля и Тэкенса /1/, которые предложили такой тип движения в качестве механизма возникновения турбулентности в широком смысле слова. По-видимому, впервые стохастичность в диссипативных системах наблюдалось в численных экспериментах Лоренца /2/, который обнаружил, в частности, что траектории системы притягиваются в этом случае к некоторому множеству весьма сложной структуры. В работе /1/ такое множество было названо "странным аттрактором". Этот термин представляется нам крайне неудачным, поскольку с точки зрения современной эргодической теории подобные структуры являются, наоборот, совершенно естественными. Они характерны, например, для хорошо известных систем Аносова, или  $U$  - систем /3/, которые обладают полным набором статических свойств, в том числе и самым сильным из них - бернуллиевостью<sup>\*</sup>). По указанным причинам мы будем говорить о стохастическом, или хаотическом аттракторе.

Свойства стохастического аттрактора для самых разных модельных систем исследовались как численно, так и аналитически в ряде работ (см., например, обзор /4/). В частности, в одной из наших старых работ /5/ мы также наблюдали стохастический аттрактор, который назвали, в духе теории систем Аносова, расслоением фазовой плоскости. Вместе с тем мы обнаружили и позднее исследовали более детально /6/ явление вырождения стохастического движения в периодическое. Это явление оказалось весьма типичным для многих простых моделей турбулентности, в том числе и для первоначальной

<sup>\*</sup>) Отметим, что последнее свойство было фактически обнаружено и описано Лоренцом в упомянутой работе /2/

модели Лоренца /7/, а также для отображения Хенона /8,9/, сходного с отображением, исследованным в /5,6/. Вырождение происходит вследствие захвата стохастической траектории под действием слабой диссипации в одну из областей устойчивости, наличие которых характерно для гамильтоновых колебательных систем. Подобные захваты наблюдались также в работе /10/. Хотя вырождение стохастичности безусловно не является универсальным феноменом, как правильно отмечено в /11/, — например, оно полностью отсутствует в системах Аносова вследствие их грубости, — это явление оказывается весьма типичным для простых моделей с диссипацией.

Ниже мы рассмотрим это явление более подробно на примере моделей, исследованных в /5,6/.

### § 1. ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

Модель задается нелинейным преобразованием:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \left\{ p + k \cdot f(x) - \epsilon \left( p - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ \bar{x} &= \left\{ x + \bar{p} - \frac{1}{2} \right\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где фигурные скобки обозначают дробную часть. Преобразование моделирует нелинейный осциллятор с угловой переменной  $X$  и импульсом (действием)  $p$ . Дробные части задают периодическую зависимость (с периодом 1) как по координате, так и по импульсу, последнее — для упрощения численных экспериментов. В результате фазовая плоскость осциллятора сводится к единичному квадрату, или точнее, тору. Осциллятор обладает затуханием с коэффициентом  $\epsilon$  и на него действует периодическое возмущение (с периодом в один шаг). Зависимость возмущения от координаты характеризуется функцией  $f(x)$ .

Для некоторого класса возмущений, который мы называем тривиальным (подробнее см. в /12/) например:

$$f(x) = x - \frac{1}{2} \quad (1.2)$$

система (1.1) является  $U$ -системой /3/ — и поэтому малое затухание не может разрушить стохастичность, которая имеет место для

$$k > 0 \text{ или } k < -4 \quad (1.3)$$

Ниже мы будем исследовать возмущение вида:

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} \quad (1.4)$$

Это возмущение не является тривиальным в том смысле, что в отсутствие диссипации ( $\epsilon = 0$ ) при любых  $k$  имеются области устойчивости на фазовой плоскости  $(x, p)$ .

Наиболее крупные из них возникают вокруг устойчивой неподвижной точки периода  $T = 1$ . ( $\bar{p} = p = p^0$ ;  $\bar{x} = x = x^0$ ). Условие устойчивости движения вблизи произвольной точки  $(x, p)$  определяется соотношением:

$$-4 < k f'(x) < 0 \quad (1.5)$$

Из (1.1, 1.5) следует /5/, что имеются специальные значения  $k_0$ , для которых неподвижная точка  $(x^0, p^0)$  находится в центре устойчивой области (1.5). Оценка фазовой площади этой области устойчивости /5/ дает

$$S(k) \sim \left[ \frac{4}{k \cdot f''(x^0)} \right]^2 \quad (1.6)$$

Вид фазовой плоскости, для значения  $k_0 \approx 3.46$  приведен на рис.1, на котором ясно видна область с устойчивыми траекториями внутри нее и область стохастического движения. Существенно, что размер области устойчивости быстро убывает с ростом  $k$  (даже для специальных значений  $k_0$  (1.6)). Для произвольных значений  $k \neq k_0$ , как показали численные эксперименты /13,5/ площадь устойчивых областей убывает еще быстрее (см. § 2). Система (1.1) с затуханием может рассматриваться как простейшая модель многомерных автоколебаний. Многомерных потому, что внешнее возмущение можно рассматривать как одностороннее действие "другой" степени свободы с фиксированным движением. Автоколебания отличаются от пассивного затухания тем, что приводят систему не к положению равновесия, а к предельно-

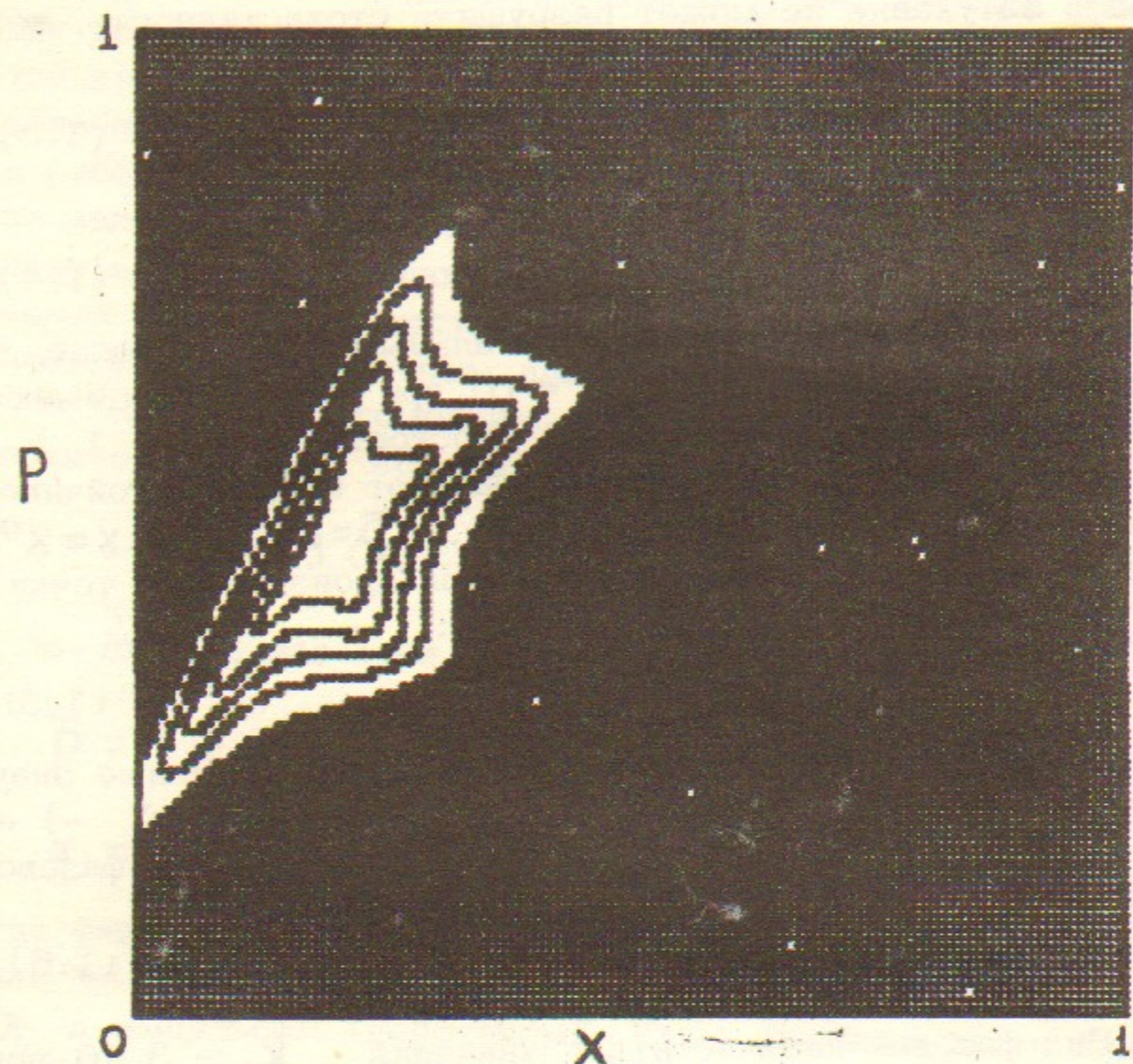


Рис.1. Фазовая плоскость системы (1.1, 1.4) для  $k_0 \approx 3.46$ ;  $E = 0$ . Внутри области устойчивости – четыре траектории с различными начальными данными  $(x_0, p_0)$ . Снаружи – стохастическая область, заполненная одной единственной траекторией. Число отображений (1.1) для каждой траектории равно  $N = 10^5$ .

му циклу с конечной амплитудой колебаний. Для модели (1.1) оба случая вообще не отличаются из-за периодичности по  $p$ . В [6] изучалась зависимость времени захвата системы в устойчивую область от различных параметров. Оказалось, что с хорошей степенью точности выполняется эмпирический закон:

$$N \cdot S \cdot E \approx 1 \quad (1.7)$$

где  $N$  – число итераций отображения (1.1) до захвата (время "жизни" стохастичности);  $S$  – площадь устойчивых областей (площадь фазового квадрата равна 1);  $E$  – коэффициент затухания в системе. Сводка данных, относящихся к закону (1.7), приведена на рис.2.

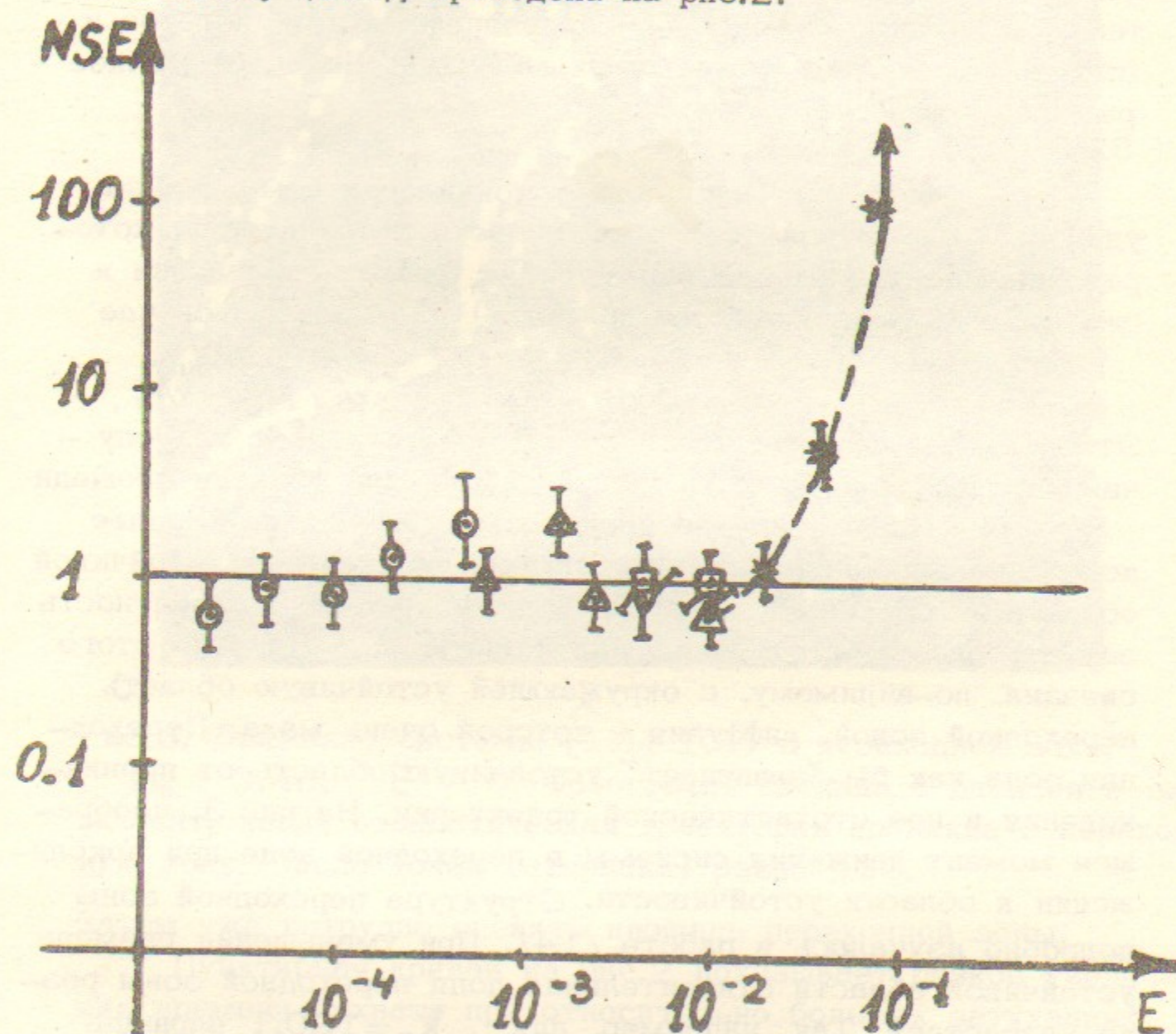


Рис.2. "Время жизни" стохастичности при наличии затухания:  $\circ - k = 3.46$ ;  $\Delta - k = 12.98$ ;  $\square - k = 5.56$ ;  $*$  –  $k = 7.66$ ; прямая линия соответствует закону (1.7), пунктирная линия обозначает возникновение стохастического аттрактора. Стрелка над последней точкой указывает, что захват не наблюдается, а положение точки дает нижнюю границу времени жизни.

Закон (1.7) проверялся путем независимого измерения среднего времени захвата  $N$  и площади областей устойчивости для значений  $k = 3.46; 5.56; 12.98$ . При изменении площади устойчивых областей фазовый единичный квадрат  $(x, p)$  разбивался на ячейки и фиксировался факт попадания стохастической траектории в каждую из ячеек. Затем подсчитывалось число незаполненных ячеек, которое и определяло площадь устойчивых областей. Наиболее мелкое разбиение фазовой плоскости составляло  $512 \times 1024 = 524288$  ячеек.

Для  $k = 7.66$  область устойчивости измерить не удалось. Это связано с формой области устойчивости, которая оказывается сильно вытянутой в одном направлении и сжатой в другом. Соотношение (1.7) дает в этом случае  $S = 2.8 \times 10^{-3}$ .

Можно было бы ожидать время захвата  $N_1 \sim 1/S$ . Это время, в течении которого система попадает при случайном блуждании в окрестность устойчивой области площади  $S$ . При наблюдении за процессом движения на дисплее действительно оказалось, что система подходит к устойчивой области, в среднем, через  $N_1$  шагов. Однако, вероятность захвата оказывается очень малой ( $\sim E$ ). Причина этого связана, по-видимому, с окружающей устойчивую область переходной зоной, диффузия в которой очень мала. Переходная зона как бы "защищает" устойчивую область от проникновения в нее стохастической траектории. На рис.3. изображен момент движения системы в переходной зоне при приближении к области устойчивости. Структура переходной зоны подробно изучалась в работе [14]. При уменьшении размера устойчивой области относительная доля переходной зоны резко возрастает. Так, например, для  $k_0 = 120.1$  площадь переходной зоны примерно равна площади устойчивой области ( $S \approx 1.6 \cdot 10^{-4}$ ). Это измерение удалось провести благодаря использованию дисплея, работающего в параллели с ЭВМ. В тот момент, когда на экране дисплея траектория проникает в переходную зону, счет останавливается и фиксируется распределение этого участка траектории на фазовой плоскости

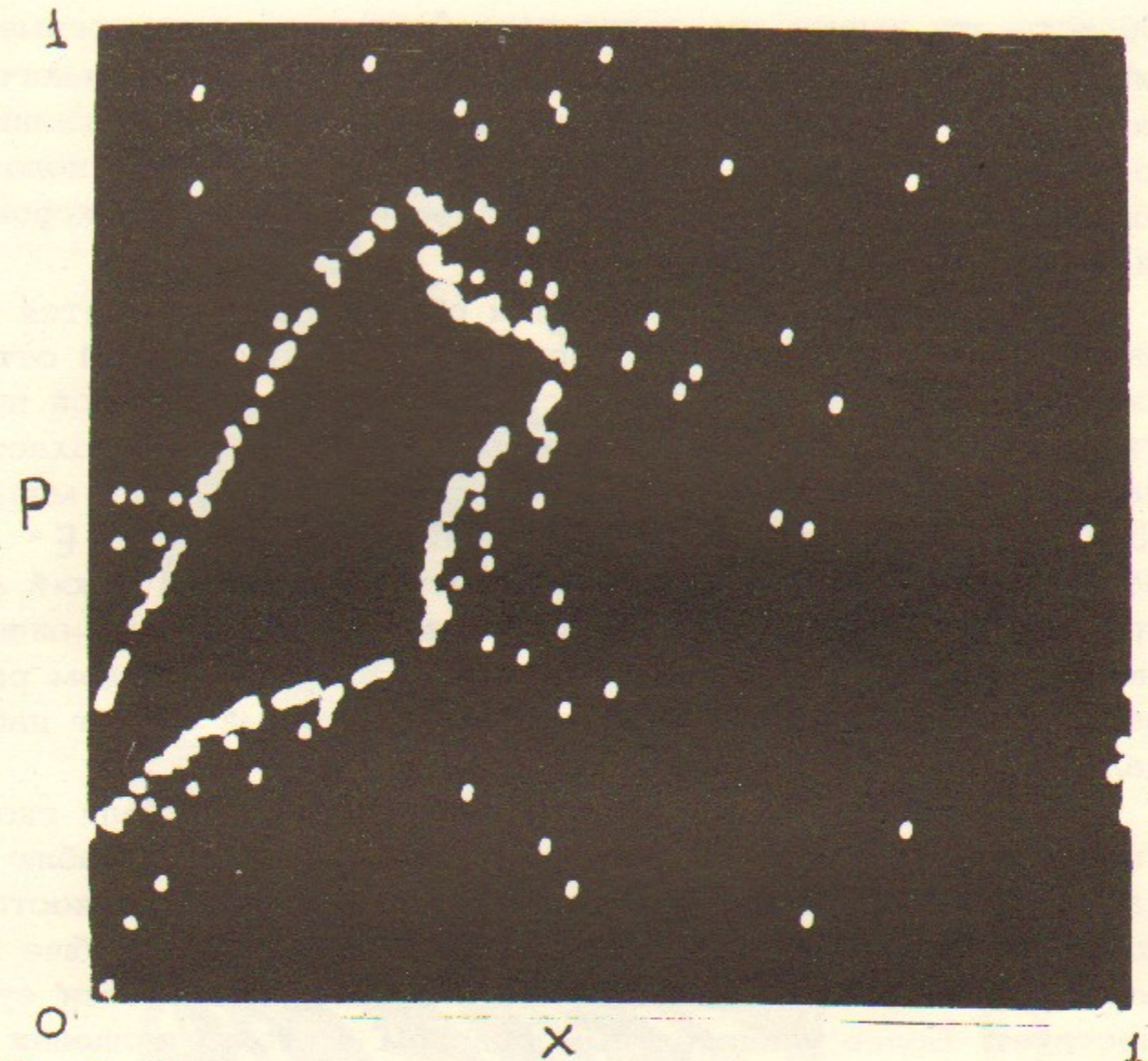


Рис.3. Движение системы (1.1, 1.4) в переходной зоне,  $k_0 = 3.46$ ,  $E = 0$ . Фотография сделана с дисплея в тот момент, когда стохастическая траектория проникла в переходную зону. Число точек (итераций) равно 400.

Затем уже нетрудно оценить площадь переходной зоны.

Пунктирная кривая на рис.2 показывает резкое увеличение времени захвата при относительно больших затуханиях ( $E > 10^{-2}$ ). Подробное исследование структуры фазовой плоскости показало [6], что при этом возникает стохастический аттрактор. При этом наблюдается появление "запрещенных" для движения областей (рис.4). Если в начальный момент система находится в одной из таких областей, она сразу же уходит оттуда и больше не возвращается назад.

Области эти имеют вид полос разной ширины, а их осевые линии соответствуют преобразованию линии "максимального затухания":  $\rho = 0$ . Повторные преобразования этой линии соответствуют все более и более узким запрещенным полосам, образующим тонкую структуру расслоения. Последняя хорошо видна на рис.4б.

Вся фазовая плоскость таким образом расслаивается на две компоненты, одна из которых состоит из областей отталкивания — "запрещенных" областей, а другая, к которой притягиваются все траектории, фактически и является стохастическим аттрактором с канторовой структурой нулевой меры. Интересно отметить, что при дальнейшем увеличении  $E$  область притяжения резко уменьшается и стохастический аттрактор принимает вид нескольких линий, которые, по-видимому, сохраняют канторову структуру, но уже с трудом разрешаемую в численном эксперименте. Подобный эффект наблюдался также в [8].

Расслоение имеет место, по всей видимости, для сколь угодно малых  $E$ , включая и те, для которых наблюдается вырождение. Поэтому расслоение фазовой плоскости, которое хорошо видно на дисплее, не доказывает, вообще говоря, что стохастический аттрактор в действительности существует. Более убедительным доводом в этом отношении является резкое увеличение времени захвата (см.рис.2).

При этом расслоение становится всё более крупноструктурным. Такое увеличение времени захвата связано, очевидно, с разрушением больших областей устойчивости. Пунктирная кривая на рис.2 проведена в предположении, что площадь устойчивых областей не зависит от затухания. Если же считать наоборот, что закон (1.7) продолжает оставаться справедливым, то площадь областей устойчивости уменьшится до значения

$$S_1 < 2.5 \cdot 10^{-4} \quad (\text{последняя точка на рис.2}).$$

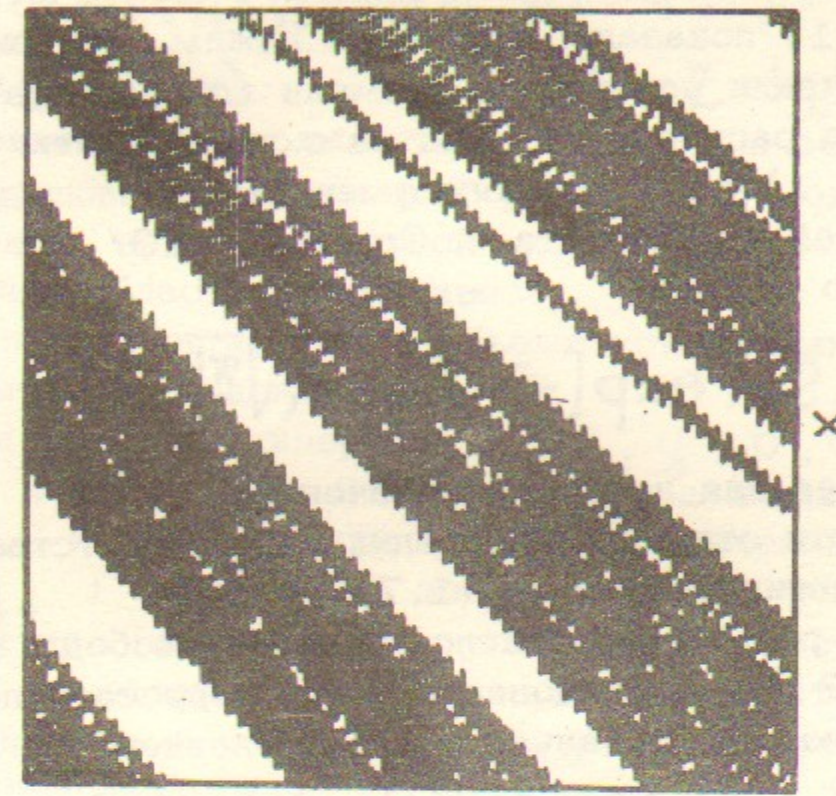


Рис.4. Расслоение фазовой плоскости — стохастический аттрактор;  $k \approx 9.76$ ;  $E = 0.2$ ;  $N = 10^5$ . Слева — полная фазовая плоскость  $1 \times 1$ ; справа — часть фазовой плоскости  $1/4 \times 1/4$ .

## § 2. 4-МЕРНАЯ МОДЕЛЬ

Исследования двумерной модели стохастических автоколебаний (§ 1) показали, что такой режим действительно возможен в течении некоторого времени (до захвата). Правда, время жизни растет очень быстро с увеличением параметра  $k$  в (1.1) из-за резкого уменьшения площади  $S$  всех областей устойчивости. Согласно [13] для  $E = 0$  имеет место оценка:

$$S \sim \exp[-3(\ln \frac{k}{2})(\sqrt{\frac{\pi k}{2}} - 1)] \quad (2.1)$$

Тем не менее для небольших значений  $k \lesssim 4$  устойчивые области относительно велики и, соответственно, время жизни стохастичности мало (1.7).

Какую роль играет число степеней свободы нелинейного осциллятора? Для исследования этого вопроса использовалась двумерная модель, заданная преобразованием:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \{p + k_1 f(x) - E \cdot (p - 1/2) + c \cdot (y - 1/2)\} \\ \bar{q} &= \{q + k_2 f(y) - E \cdot (q - 1/2) + c \cdot (x - 1/2)\} \\ \bar{x} &= \{x + \bar{p} - 1/2\} \\ \bar{y} &= \{y + \bar{q} - 1/2\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $c$  - коэффициент связи. Для  $E = 0$  преобразование является каноническим.

Численные эксперименты при  $c \sim 1$  (сильная связь) не обнаружили захвата вплоть до  $N = 10^8$  шагов ни при каких  $k$ , даже при  $k \approx 1$ , когда двумерная система ( $c=0$ ) имеет большую область устойчивости. Это говорит о том, что области устойчивости становятся чрезвычайно малыми. Условие устойчивости для неподвижной

\*) За исключением специальных интервалов для  $k$ , (см. §1).

точки будет теперь иметь вид (ср. с (1.5)):

$$-4 < (\xi_1 + \xi_2 \pm \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + 4c^2}) < 4 \quad (2.3)$$

$$\text{где } \xi_1 = 2 + k_1 f'(x) \quad ; \quad \xi_2 = 2 + k_2 f'(y)$$

Соотношение (2.3) должно выполняться для обоих знаков перед корнем. Ясно, что условие устойчивости оказывается более жестким, чем в двумерной модели. Это ведет к резкому уменьшению областей устойчивости.

Численное определение объема устойчивых областей сильно затруднено даже для  $E = 0$ . Так, например, при разбиении фазового гиперкуба ( $x, y, p, q$ ) на  $32 \times 32 \times 32 \times 16 = 524288$  ячеек для значений  $k \approx 3$ ,

$c = 0.9$  и произвольных начальных значений ( $x_0, y_0, p_0, q_0$ ) наблюдалось заполнение всех ячеек фазового пространства. Тем не менее, устойчивая область периода  $T = 1$  существует, и её легко зафиксировать, задавая начальные данные ( $x_0, y_0, p_0, q_0$ ) внутри этой области. Так, например, для  $p_0 = q_0 = 0.5, x_0 = y_0 = 0.025$  траектория заполняет лишь  $V \approx 0.3 \cdot 10^{-4}$  от всего единичного объема. Это говорит о том, что устойчивые области могут быть сильно вытянуты и занимать только часть каждой фазовой ячейки.

При слабой связи захват появляется, но очень резко исчезает даже при незначительном увеличении  $c$  ( $\Delta c \approx 10^{-3}$ ), по крайней мере на времени  $N = 10^5$  шагов. Критическое значение связи зависит от затухания:

$c_{кр} = 0.10, 0.179, 0.30$  для  $E = 0.05, 0.1, 0.2$ , соответственно.

Пример двумерной проекции фазовой траектории приведен на рис.5. Характерной особенностью движения, в отличие от двумерной модели, является наличие явной регулярной структуры. Наблюдение за процессом на дисплее показывает, что такого рода структуры постоянно, но нерегулярно, появляются на фазовой плоскости и существуют лишь относительно короткое время ( $\sim 10^4$  шагов) после чего снова разрушаются. При уменьшении связи до критической повторение





Рис. 5. Пример двумерной проекции траектории стохастических автоколебаний в четырехмерном фазовом пространстве системы (2.2);  $k_1 \approx 1.278$ ,  $k_2 \approx 1.25$ ,  $c = 0.2$ ;  $E = 0.1$ . Слева - проекция  $(x, p)$ ; справа - проекция  $(y, q)$ . Зафиксирован момент прохождения траектории по регулярной структуре.

структур становится более регулярным, хотя, по-прежнему, не является периодическим.

При сильном затухании ( $E \sim 1$ ) в системе (2.2) легко наблюдается стохастический аттрактор, который также как и для модели (1.1) связан с расслоением теперь уже четырехмерного фазового объема (см.рис.6.).

Проведенные численные эксперименты таким образом показывают, что в нелинейной колебательной системе стохастическое движение может при слабой диссипации вырождаться в устойчивое. "Время жизни" стохастических автоколебаний при этом зависит от размеров оставшихся областей устойчивости, которые, хотя и убывают с ростом нелинейного возмущения, однако влияют на движение в целом. С увеличением числа степеней свободы, при отсутствии каких-либо дополнительных симметрий, "время жизни" стохастичности резко увеличивается.

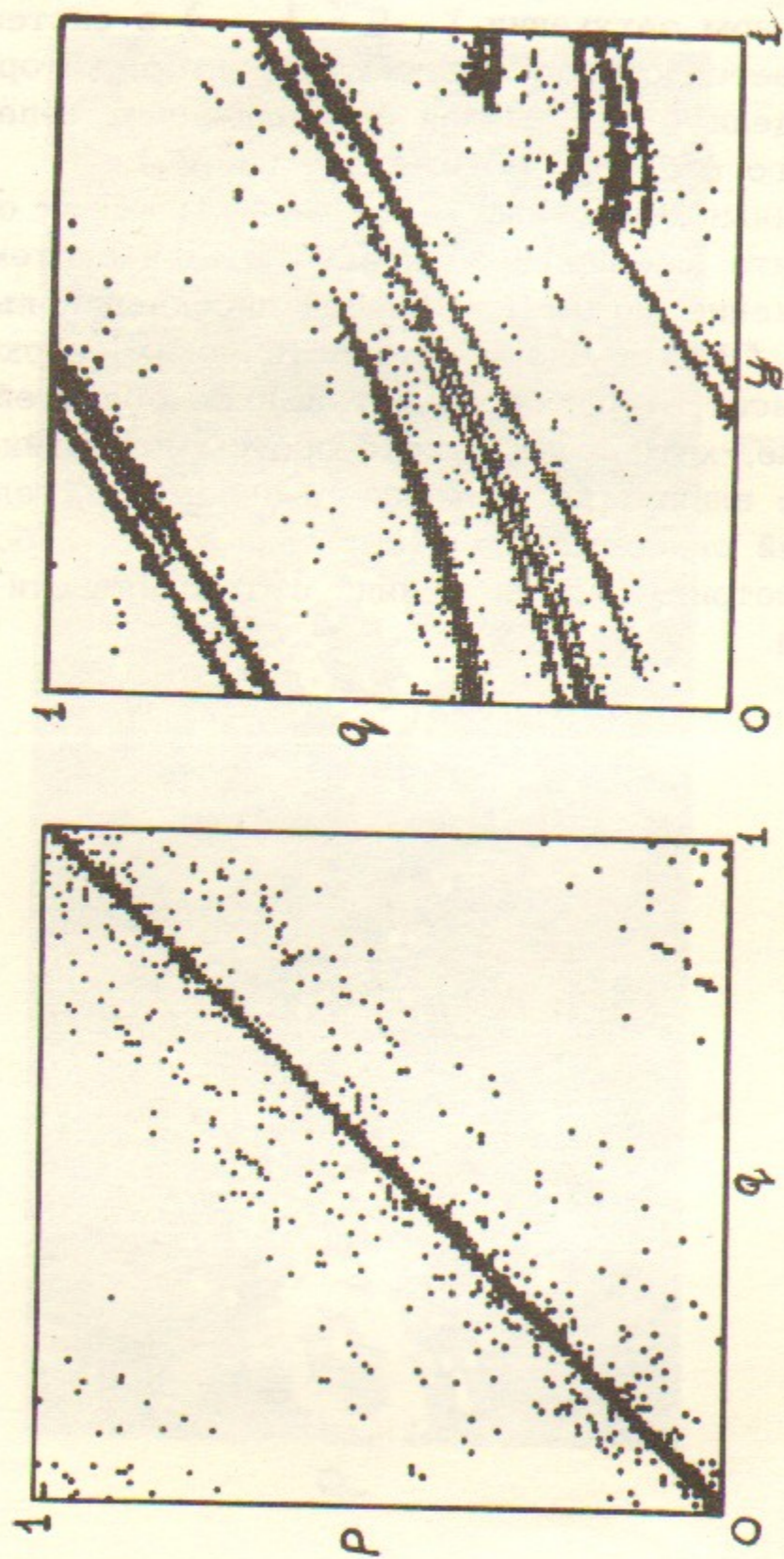


Рис.6. Стохастический аттрактор для системы (2.2) при сильном затухании;  
 $k_1 \approx 1.278$ ;  $k_2 \approx 1.25$ ;  $E = 0.6$ ;  $C = 0.8$ .  
 СЛЕВА — проекция (  $q, p$  ), СПРАВА — проекция (  $y, q$  ),  $N = 10^4$ .

Л и т е р а т у р а :

1. D.Ruelle, F.Takens, Commun.Math.Phys. 20, (1971), 167.
2. E.N.Lorenz, J. Atmos. Sci. 20, (1963), 130.
3. Д.В.Аносов. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. Труды Математического института им.В.А.Стеклова. ХС, 1967.
4. М.И.Рабинович, УФН, 125:1 (1978) 123.
5. B.V.Chirikov, F.M.Izrailev, Some Numerical Experiments with a Nonlinear Mapping: Stochastic Component., Colloques Internationaux du C.N.R.S. "Transformations Ponctuelles et leurs Applications" (Toulouse, 1973) N229, p. 409, Paris (1976)
6. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков. Некоторые численные эксперименты с простейшей моделью турбулентности. Труды Совещания по программированию с математическим методом решения физических задач (Дубна, 1973). Дубна, ОИЯИ, 1974, с.266.
7. I.Shimada, T.Nagashima, Prog.Theor.Phys. 59 (1978), 1033.
8. M.Henon, Commun.Math.Phys., 50 (1976) 69.
9. S.D. Feit, Commun.Math.Phys., 61 (1978) 249.
10. M.A.Liberman, A.J.Lichtenberg, Phys.Rev., A.5 (1972) 1852.
11. J.McLaughlin, The Role of Dissipation in a Truncation of Henon's map. 1979, unpublished.
12. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков, УФН, 105:1 (1971), 3.
13. Б.В.Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1969.
14. Г.В.Гадияк, Ф.М.Израйлев. ДАН 218:6 (1974) 1302.