

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР 86
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

А.С.Артамонов, В.А.Горбунов

**ПАРАМЕТРЫ ФУНКЦИИ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В
СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО
ПОЛЯ**

ПРЕПРИНТ 80-117



ПАРАМЕТРЫ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ
В СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
И МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А.С.Артамонов, В.А.Горбунов

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе находятся параметры функции распределения релятивистских электронов, влетающих в рассеивающую среду вдоль электрического и магнитного поля, в предположении постоянства продольной скорости и линейных потерь импульса. Для выявления влияния электрического и магнитного поля на характер рассеяния электронов анализируются полученные уравнения для среднеквадратичного угла отклонения и среднеквадратичного радиуса.

Пусть релятивистские электроны влетают в рассеивающую среду в точке O декартовой системы координат $Oxyz$ в направлении оси Z . Вдоль этой же оси направлены вектора однородного электрического поля E и однородного магнитного поля B . Предполагается, что вдоль всего распространения электронов угол отклонения θ мал, а линейные потери импульса ε и скорость распространения v постоянны. Кроме того, предполагается, что электрическое и магнитное поле не изменяет элементарного акта рассеяния электрона на малый угол и время между столкновениями мало по сравнению с характерным временем изменения величины θ . Требуется найти вероятностное распределение электронов по углам и поперечным координатам (функцию распределения)

$$D(\theta_x, \theta_y, x, y, z).$$

Электрон в такой системе движется под действием четырех сил: силы Лоренца $e[\vec{v} \times \vec{B}]$, изменяющей направление движения; силы внешнего электрического поля eE , увеличивающей или уменьшающей продольный импульс; силы, уменьшающей импульс электрона за счет ионизационных и других видов потерь, $-\varepsilon\vec{v}$ и силы полей рассеивающих центров, приводящих к случайным по величине и направлению отклонениям электрона от начального направления движения. Для решения задачи нахождения функции распределения в диффузионном приближении [1] представим силу, обуславливающую рассеяние, как гауссову случайную силу $f = \{f_x, f_y\}$, вид которой однозначно определяется уравнением Фоккера-Планка для функции распределения D :

$$\langle f_x \rangle = \langle f_y \rangle = \langle f_x, f_y \rangle = 0,$$

$$\langle f_x(z), f_x(z+\tau) \rangle = \langle f_y(z), f_y(z+\tau) \rangle = L^2 \delta^*(\tau),$$

где $\delta^*(\tau)$ - дельта функции Дирака,

$$L = \frac{E_s}{v_z} \sqrt{\frac{1}{2X_0}}$$

(E_s - константа с размерностью энергии [2], X_0 - радиационная длина, выраженная в метрах).

Из уравнений движения релятивистского электрона под действием всех указанных сил можно выписать следующую систему динамических уравнений для $x, y, z,$

θ_x, θ_y :

$$\left\{ \begin{array}{l} [p - (\varepsilon - \frac{eE}{v_z})z] \theta_y' + \frac{eE}{v_z} \theta_y = -eB\theta_x + f_y(z); \quad (1a) \\ [p - (\varepsilon - \frac{eE}{v_z})z] \theta_x' + \frac{eE}{v_z} \theta_x = eB\theta_y + f_x(z); \quad (1b) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \theta_x; \quad (1в) \\ y' = \theta_y, \quad (1г) \end{array} \right.$$

в которой e и p - заряд и начальный импульс электрона, штрихом обозначено дифференцирование по z . Линейный характер системы уравнений (1) для рассматриваемой модели процесса распространения электронов указывает на то, что функция распределения носит гауссов характер и полностью определяется корреляционными моментами второго порядка [3] $\langle \theta_x^2 \rangle, \langle \theta_y^2 \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle y^2 \rangle, \langle x\theta_x \rangle, \langle y\theta_y \rangle,$

$\langle y\theta_x \rangle, \langle x\theta_y \rangle$, которые следует найти решением этой системы.

Для переменной

$$\eta = \theta_y + i\theta_x$$

из (1a) и (1б) можно записать уравнение:

$$(1 - \varphi z) \eta' + \omega \eta = F,$$

где

$$\varphi = \frac{1}{p} \left(\varepsilon - \frac{eE}{v_z} \right); \quad \omega = \frac{1}{p} \left(\frac{eE}{v_z} - ieB \right);$$

$$F = [f_y(z) + if_x(z)].$$

Решением его при нулевых начальных условиях является:

$$\eta = \frac{L}{p} (1 - \varphi z)^{\gamma} \int_0^z \frac{\lambda(s) ds}{(1 - \varphi s)^{\gamma+1}}, \quad (2)$$

где

$$\gamma = \gamma_1 - i\gamma_2; \quad \gamma_1 = \frac{eE}{v_z p \varphi}; \quad \gamma_2 = \frac{eB}{p \varphi}; \quad \lambda = f_y + if_x.$$

Решение (2) совместно с (1в) дает:

$$\mu \equiv y + ix = \frac{1}{p} \int_0^z (1 - \varphi s)^{\gamma} ds \int_0^s \frac{\lambda(l) dl}{(1 - \varphi l)^{\gamma+1}} \quad (3)$$

(s и l - переменные интегрирования).

Уравнения (2) и (3) позволяют найти корреляционные моменты второго порядка для $\mathcal{D} (x, y, z, \theta_x, \theta_y)$. Так

$$\begin{aligned} 2\langle \theta_x^2 \rangle &= 2\langle \theta_y^2 \rangle = \langle \theta^2 \rangle = \langle \eta \eta^* \rangle = \\ &= \frac{L^2}{p^2} (1 - \varphi z)^{\gamma + \gamma^*} \iint_0^z \frac{\langle \lambda^*(s) \lambda(l) \rangle ds dl}{(1 - \varphi s)^{\gamma^*+1} (1 - \varphi l)^{\gamma+1}}, \end{aligned}$$

учитывая, что

$$\langle \lambda^*(s) \lambda(l) \rangle = 2\delta^*(s-l) \text{ и } \gamma + \gamma^* = 2\gamma_1,$$

получим:

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{2L^2}{\rho^2(1+2\gamma_1)\varphi} \left[\frac{1}{1-\varphi Z} - (1-\varphi Z)^{2\gamma_1} \right] \quad (4)$$

Аналогичным способом находятся уравнения остальных корреляционных моментов.

$$\begin{aligned} 2\langle x^2 \rangle &= 2\langle y^2 \rangle = \langle r^2 \rangle = \mu\mu^* = \\ &= \frac{2L^2}{\rho^2\varphi^3(2\gamma_1+1)(\gamma_1^2+\gamma_2^2)[\gamma_2^2+(\gamma_1+1)^2]} \times \\ &\times \left\{ (\gamma_1^2+\gamma_2^2)[(2\gamma_1+1)-(1-\varphi Z)^{2\gamma_1+2}] - 2\gamma_1(1-\varphi Z) \times \right. \\ &\times [\gamma_2^2+(\gamma_1+1)^2] + 2(2\gamma_1+1)(1-\varphi Z)^{\gamma_1+1} \times \\ &\times \left. \left\{ \gamma_1 \cos[\gamma_2 \ln(1-\varphi Z)] + \gamma_2 \sin[\gamma_2 \ln(1-\varphi Z)] \right\} \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x\theta_x \rangle &= \langle y\theta_y \rangle = \frac{1}{4} \langle (\eta+\eta^*)(\mu+\mu^*) \rangle = \\ &= \frac{L^2}{\rho^2\varphi^3(2\gamma_1+1)} \left\{ \frac{(\gamma_1+1)(1-\varphi Z)^{2\gamma_1+1}}{\gamma_2^2+(\gamma_1+1)^2} - \right. \\ &- \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2+\gamma_2^2} - \frac{(1-\varphi Z)^{\gamma_1}}{(\gamma_1^2+\gamma_2^2)[\gamma_2^2+(\gamma_1+1)^2]} \times \\ &\times \left. \left\{ (\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_1) \cos[\gamma_1 \ln(1-\varphi Z)] + \right. \right. \\ &\left. \left. + \gamma_2 \sin[\gamma_2 \ln(1-\varphi Z)] \right\} \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle y\theta_x \rangle &= -\langle x\theta_y \rangle = \frac{1}{4i} \langle (\eta+\eta^*)(\mu-\mu^*) \rangle = \\ &= \frac{L^2}{\rho^2\varphi^3(2\gamma_1+1)} \left\{ \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2+\gamma_2^2} - \frac{\gamma_2^2(1-\varphi Z)^{2\gamma_1+1}}{\gamma_2^2+(\gamma_1+1)^2} + \right. \\ &+ \frac{2(2\gamma_1+1)(1-\varphi Z)^{\gamma_1}}{(\gamma_1^2+\gamma_2^2)[\gamma_2^2+(\gamma_1+1)^2]} \left\{ (\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_1) \times \right. \\ &\times \sin[\gamma_2 \ln(1-\varphi Z)] + \\ &\left. \left. + \gamma_2 \cos[\gamma_1 \ln(1-\varphi Z)] \right\} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

Стандартная процедура записи функции распределения по корреляционным моментам приведена, например, в [3], здесь уравнение функции распределения не приводится из-за значительной громоздкости.

Кроме функции распределения практический интерес представляют уравнения (4) и (5), характеризующие процесс многократного рассеяния релятивистских электронов в среде при наличии электрического и магнитного поля. Некоторые свойства этого процесса можно выявить формальным анализом уравнений в частных случаях и рассмотрением численного примера для электронов с кинетической энергией 5 МэВ, распространяющихся в гелии при нормальной величине давления и температуры. В примере линейные потери импульса вычислялись из линейных потерь энергии в $4 \cdot 10^4$ в/м, прочие константы принимались следующих размеров:

$$E_s = 15,5 \text{ МэВ}; \quad X_0 = 5,2 \cdot 10^3 \text{ м.}$$

Если $\varepsilon v_z - eE > 0$, ($E < 0$), т.е. электрическое поле уменьшает продольный импульс, то $\langle \theta^2 \rangle$ по (4) является монотонно нарастающей функцией Z . При $\varepsilon v_z - eE = 0$, т.е. потери импульса скомпенсированы электрическим полем,

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{v_z L^2}{\rho e E} \left[1 - \exp\left(-\frac{2eE}{\rho v_z} z\right) \right]$$

и при достаточно больших z среднеквадратичный угол становится постоянной величиной порядка $v_z L^2 / e \rho E$. Для численного примера эта величина порядка $0,1 \text{ рад}^2$. Если $\varepsilon v_z - eE < 0$, $\varphi < 0$, $\gamma_1 < 0$ ($|2\gamma_1| \geq 1$), т.е. продольный импульс электрона увеличивается, то с ростом z среднеквадратичный угол нарастает до некоторой величины $\langle \theta_{\max}^2 \rangle$, а при

$$z > \frac{1}{\varphi} \frac{1}{|2\gamma_1|^{1/2} - 1} = z_{\max}$$

начинает монотонно спадать до 0. В численном примере $z_{\max} = 3,66 \text{ м}$ и $\langle \theta_{\max}^2 \rangle = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ рад}^2$

при $E = 15 \cdot 10^5 \text{ в/м}$. На рис.1 представлена зависимость от z величины $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$ для различных E и начальной кинетической энергии электрона.

Интересный результат получается в случае, когда электроны на входе в рассеивающую среду имеют некоторый начальный разброс углов $\langle \theta_0^2 \rangle$. Тогда из динамических уравнений получаем:

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{2L^2}{\rho(2\gamma_1 + 1)\varphi(1-\varphi z)} \left[\frac{1}{1-\varphi z} - (1-\varphi z)^{2\gamma_1} \right] + \langle \theta_0^2 \rangle (1-\varphi z)^{2\gamma_1}$$

При компенсации потери импульса электрическим полем,

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{v_z L^2}{\rho e E} \left[1 - \exp\left(-\frac{2eE}{\rho v_z} z\right) \right] + \langle \theta_0^2 \rangle \exp\left(-\frac{2eE}{\rho v_z} z\right)$$

и видно, что с ростом z результирующий среднеквадратичный угол стремится к постоянной величине $v_z L^2 / \rho e E$ и если она меньше величины $\langle \theta^2 \rangle$, то происходит уменьшение входного угла.

Таким образом, из уравнения (4) видно, что величина

угла отклонения электрона не зависит от магнитного поля и сильно связана с электрическим. Кроме того, из асимптотического поведения величины $\langle \theta^2 \rangle$ вытекает, что если при наличии всех рассматриваемых сил продольный импульс электрона неизменный, то с увеличением пройденного расстояния угол стремится к постоянной величине; если импульс растет, то угол при больших расстояниях стремится к нулю. Уменьшение величины начального угла при неизменной величине продольного импульса происходит из-за уменьшения поперечных составляющих импульса силой $-\varepsilon v^r$, в то время как потери продольной составляющей восполняются электрическим полем.

Если $\gamma_1 = 0$, т.е. отсутствует электрическое поле, то по (5)

$$\langle r^2 \rangle = \frac{2L^2}{\rho^2 \varphi^3 \gamma_2^2 (\gamma_2^2 + 1)} \left\{ \gamma_2^2 [1 - (1 - \varphi z)^2] + (1 - \varphi z) \gamma_2 \sin[\gamma_2 \ln(1 - \varphi z)] \right\} \quad (8a)$$

и видно, что при стремлении величины φz к 1

$$\langle r^2 \rangle \rightarrow \frac{2L^2}{\rho^2 \varphi^3 (\gamma_2^2 + 1)} \quad (8b)$$

Если $\gamma_2 = 0$, т.е. отсутствует магнитное поле, то

$$\langle r^2 \rangle = \frac{2L^2}{\rho^2 \varphi^3 (2\gamma_1 + 1) \gamma_1^2 (\gamma_1 + 1)^2} \left\{ \gamma_1^2 [(2\gamma_1 + 1) - (1 - \varphi z)^{2\gamma_1 + 2}] - 2\gamma_1 (1 - \varphi z) (\gamma_1 + 1)^2 + 2(2\gamma_1 + 1) \gamma_1 (1 - \varphi z)^{\gamma_1 + 1} \right\} \quad (9a)$$

и видно, что в случае $\varphi > 0$ (продольный импульс электрона падает под действием электрического поля), при

$$\varphi z \rightarrow 1$$

$$\langle r^2 \rangle \rightarrow \frac{2L^2}{\rho^2 \varphi^3 (\gamma_1 + 1)^2}; \quad (96)$$

в случае $\varphi < 0$ (импульс растет), при $|\varphi z| \gg 1$

$$\langle r^2 \rangle \approx \frac{4L^2 z}{\rho^2 \varphi^2 (2\gamma_1 + 1) \gamma_1}$$

Если $\varphi = 0$, т.е. потери импульса скомпенсированы, то

$$\langle r^2 \rangle = \frac{2L^2}{\rho^2} \left\{ \frac{1 - \exp\left(-\frac{2eE}{\rho v_z} z\right) + \frac{2eE}{\rho v_z}}{\frac{2eE}{\rho v_z} \left[\left(\frac{eE}{\rho v_z}\right)^2 + \left(\frac{eB}{\rho}\right)^2 \right]} + \frac{2}{\left[\left(\frac{eE}{\rho v_z}\right)^2 + \left(\frac{eB}{\rho}\right)^2 \right]^2} \right\} \times \quad (10a)$$

$$\times \left\{ \left[\frac{eE}{\rho v_z} \cos\left(\frac{eB}{\rho} z\right) - \frac{eB}{\rho} \sin\left(\frac{eB}{\rho} z\right) \right] \exp\left(-\frac{eE}{\rho v_z} z\right) - \frac{eE}{\rho v_z} \right\}$$

и при достаточно больших z

$$\langle r^2 \rangle \approx \frac{2L^2 z}{\left(\frac{eE}{v_z}\right)^2 + (eB)^2} \quad (10b)$$

На рис.2 приведены графики зависимости величины $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ от z для данных численного примера при различных величинах E , вычисленной по (9a). Влияние магнитного поля иллюстрируется данными рис.3, полученными вычислениями по (5) и (10a).

Анализ асимптотического поведения уравнения (5) показывает, что электрическое и магнитное поле практически одинаково влияют на величину среднеквадратичного радиуса при меняющемся импульсе (параметры γ_1 и γ_2 в (8б) и (9б), при постоянстве импульса это влияние одинаково (уравнение 10б). Количественно соотношение эффективнос -

ти влияния магнитного и электрического поля на отклонение электрона можно пронаблюдать сопоставив величины $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ вычисленные по (8a) и (9a) для таких величин B и E , чтобы силы $e[\vec{v} \times \vec{B}]$ и eE были одинаковы. Для условий численного примера ($z = 4$ м) при $E = 15 \cdot 10^5 \frac{B}{M}$ и $B = 0,005$ Т $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 11$ см, а при $E = 0$ $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 18$ см.

Применимость полученных уравнений, в основном, определяется условиями постоянства скорости и величины потери импульса. Эти условия наиболее точно выполняются для релятивистских электронов в диапазоне энергии 0,5 - 5 МэВ. Уравнения (4) и (5) пригодны для анализа параметров пучков электронов в тех случаях, когда коллективные эффекты не нарушают исходных условий.

Касаясь используемого здесь метода нахождения функции распределения, следует отметить, что из динамических уравнений оказалось возможным найти решение задачи рассеяния электронов для более сложного случая, чем удалось найти из решения кинетического уравнения [4,5] или другим способом [6,7]. На целесообразность использования динамических уравнений при решении подобных задач указывалось в работе [1].

Л и т е р а т у р а :

1. В.И.Кляцкин, В.Н.Татарский. УФН, 110, 499, 1973.
2. Virgil L. Highland. Nucl. Instr. and Meth., 129, 497, 1975.
3. Леви, Поль. Стохастические процессы и броуновское движение, "Наука", 1972, М.
4. L.Eyges. Phys. Rev., 74, 1534, 1948.
5. F.J.M.Farley, G.Fiorentini, D.C.Stocks. Nucl. Instr. and Meth., 152, 353, 1978.
6. R.M.Pearce. Nucl. Instr. and Meth., 164, 11, 1979.
7. H.Daniel. Nucl. Instr. and Meth., 124, 253, 1975.

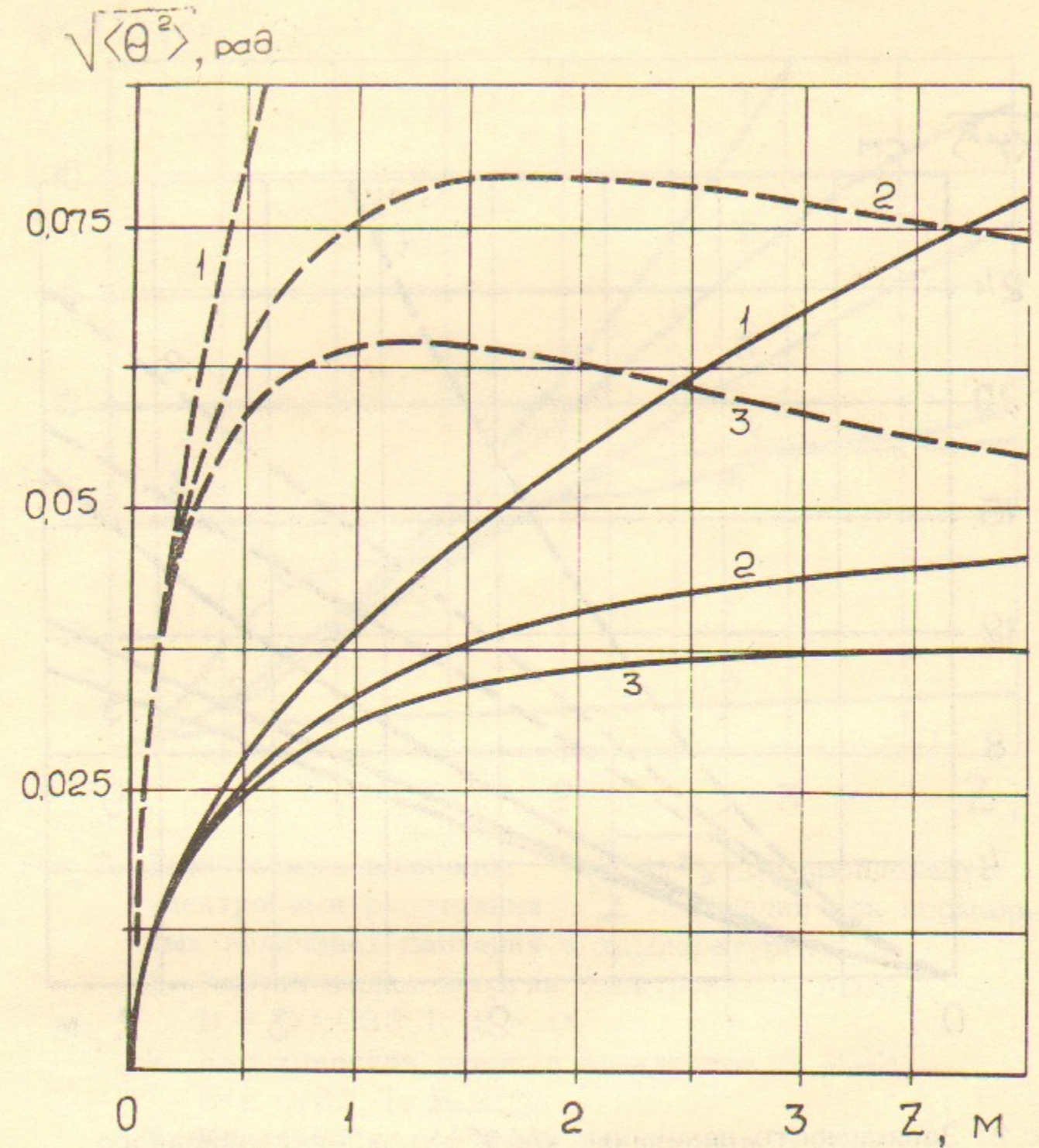


Рис.1. Зависимость величины $\sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$ от пройденного электронами расстояния z в гелии при нормальных величинах давления и температуры.
 ————— кинетическая энергия электронов 5 МэВ;
 - - - - кинетическая энергия электронов 1,5 МэВ.
 1. $E = 0,4$ кВ/см; 2. $E = 10$ кВ/см; 3. $E = 15$ кВ/см

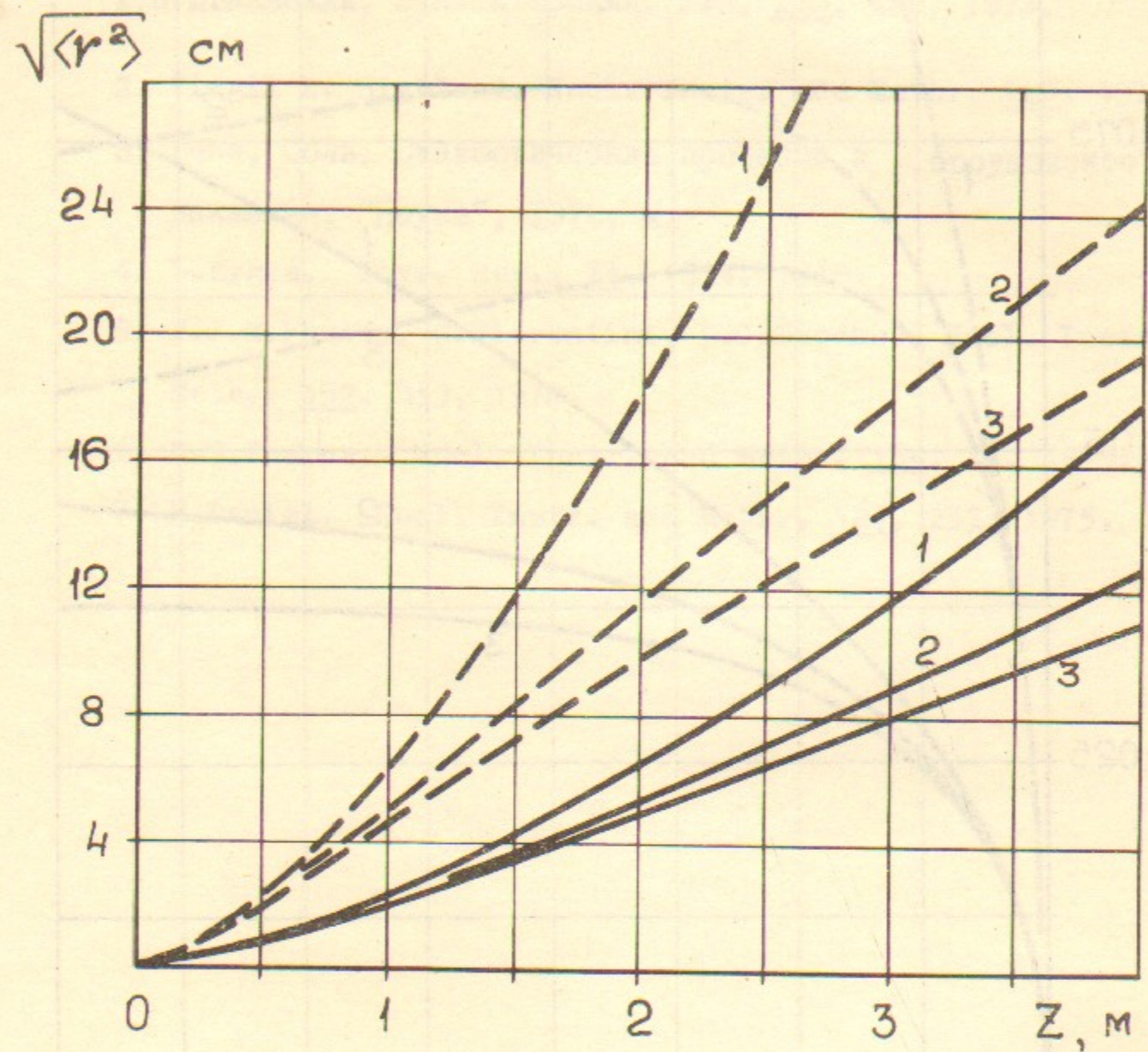


Рис.2. Зависимость величины $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ от пройденного электронами расстояния Z в гелии при нормальном давлении и нормальной температуре.
 ————кинетическая энергия электронов 5 МэВ;
 - - - -кинетическая энергия электронов 1,5 МэВ.
 1,2,3 - $E = 0,4; 10; 15$ кВ/см.

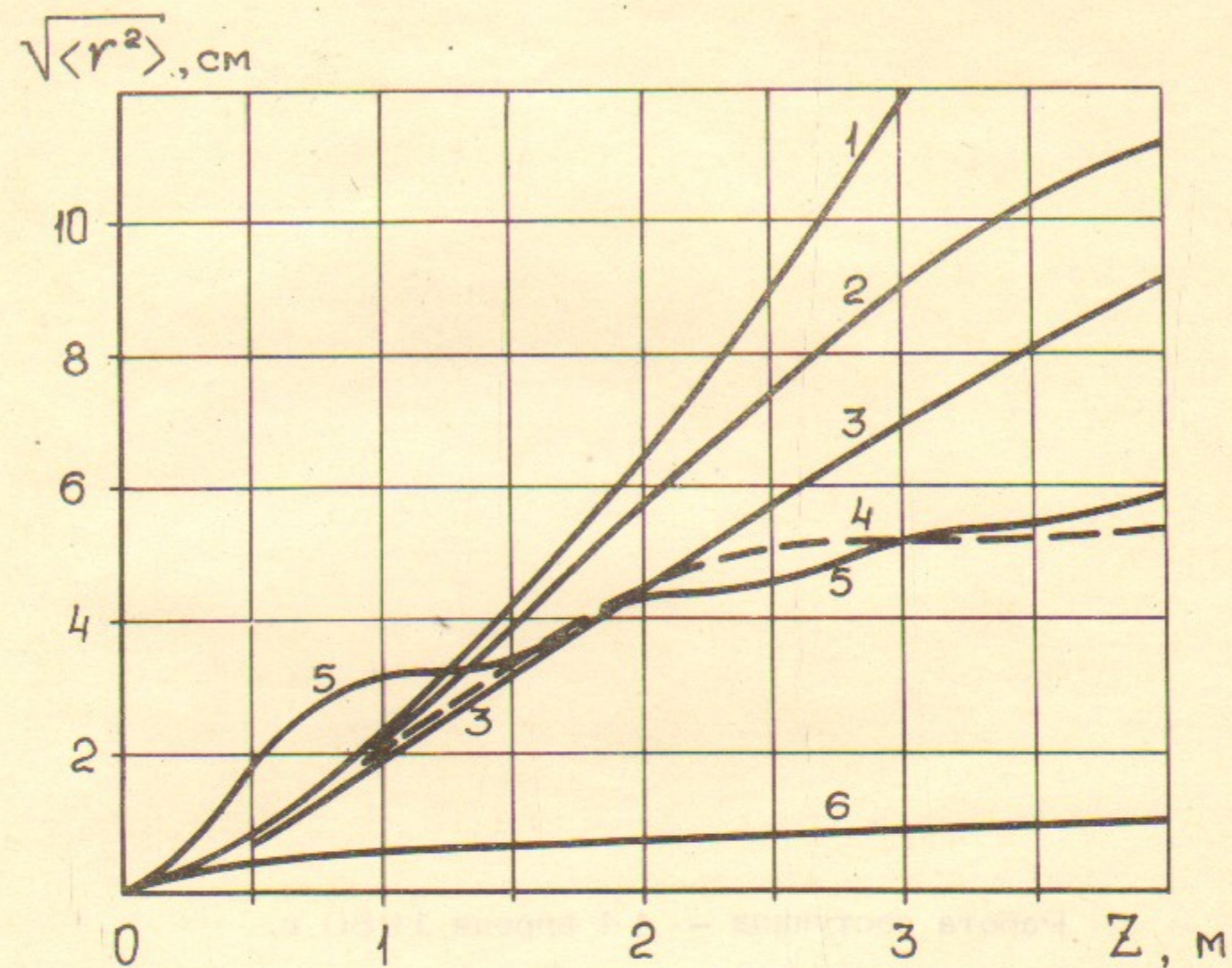


Рис.3. Зависимость величины $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ от пройденного электронами расстояния Z в гелии при нормальных величинах давления и температуры.

1. Кинетическая энергия электронов 5 МэВ;
 $V = 0,0033$ Т; $E = 0$.
2. Кинетическая энергия электронов 5 МэВ;
 $V = 0,02$ Т; $E = 0$.
3. Кинетическая энергия электронов 5 МэВ;
 $V = 0,02$ Т; $E = 15$ кВ/см.
4. Кинетическая энергия электронов 5 МэВ;
 $V = 0,035$ Т; $E = 0$.
5. Кинетическая энергия электронов 1,5 МэВ;
 $V = 0,035$ Т; $E = 0$.
6. Кинетическая энергия электронов 5 и 1,5 МэВ;
 $V = 0,2$ Т; $E = 0$.