

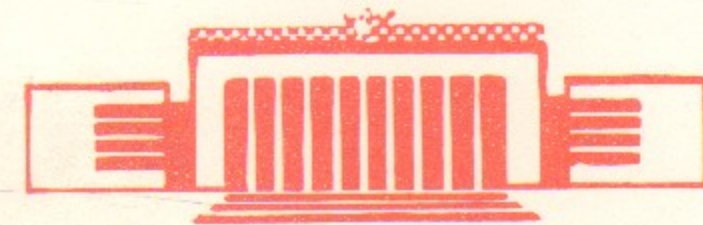
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР 32

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Г.В.Ступаков

**АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ В ТЕОРИИ
ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО УСКОРЕНИЯ ИОНОВ**

ПРЕПРИНТ 80-93



Новосибирск

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ В ТЕОРИИ
ГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО УСКОРЕНИЯ ИОНОВ

Г.В.Ступаков

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрено ускорение ионов с помощью облака осциллирующих электронов, образующегося вблизи анодной фольги сильноточного ускорителя. Получено автомодельное решение, описывающее процесс ускорения в случае тонких фольг, когда можно пренебречь торможением электронов в фольге. Найдена функция распределения ионов по энергии и сосчитан к.п.д. ускорения.

SELF-SIMILAR SOLUTION IN THE THEORY OF
GASDYNAMIC ION ACCELERATION

G.V.Stupakov

A b s t r a c t

Ion acceleration by the cloud of electrons oscillating near the anode foil of a high-current electron diode is studied. A self-similar solution to the problem is found in the case of a thin foil (when electron-energy losses in the foil are negligible). The ion-energy distribution function and acceleration efficiency are determined.

1. В в е д е н и е

При инжекции мощного электронного пучка в вакуум в определенных условиях вблизи анодной фольги диода образуется облако осциллирующих электронов, плотность которого может существенно превышать плотность исходного пучка [1,2]. Подробно динамика накопления облака с учетом процессов взаимодействия электронов с материалом фольги была исследована теоретически в работе [2], а результаты экспериментального изучения накопления содержатся в работе [3].

Одно из возможных применений такого облака состоит в использовании его энергии для коллективного ускорения ионов [4]. Если с внешней стороны фольги каким-либо образом создать слой плазмы, то под действием электрического поля электронов из него будут ускоряться ионы (см. рис.1). Такой метод ускорения был назван в работе [5] газодинамическим, ввиду того что соответствующие уравнения совпадают с уравнениями одномерной газодинамики. В работе [4] он изучался применительно к случаю, когда длина плазменной области велика по сравнению с межэлектродным зазором в диоде, а энергия, переданная ионам, много меньше полной энергии электронного облака, накопленного в плазменном объеме. Было показано, что максимальная энергия ускоренных ионов в несколько раз превышает энергию электронов в пучке, а их плотность сравнима с плотностью облака. Однако с точки зрения эффективности ускорения такой режим явно неоптимален; наибольший интерес представляет рассмотрение ситуации, когда ионам передается значительная доля энергии электронного облака. Именно эта задача изучается в настоящей работе.

Уменьшение энергии электронов в процессе ускорения ионов можно интерпретировать как адиабатическое "остывание" облака в результате его расширения. Время такого остывания N_c , выраженное числом пролетов электрона через систему ($N = tc/x$, x — продольный размер облака, скорость электронов предполагается близкой к скорости света c), можно оценить как $N_c \sim c/V$ где V — характерная скорость ионов. Кроме остывания

электроны рассеиваются по углу и теряют энергию при прохождении анодной фольги. Будем характеризовать величину ионизационных потерь числом пролетов N_ϵ , приводящих к полному торможению электрона, $N_\epsilon \approx eU/\delta\epsilon$, eU — энергия пучка, $\delta\epsilon$ — потеря энергии при одном пролете фольги; скорость углового рассеивания зададим числом пролетов N_θ , необходимых электрону, чтобы рассеяться на угол порядка $\pi/2$, $N_\theta \approx 1/\bar{\theta}^2$, где $\bar{\theta}^2$ — средний квадрат угла рассеяния при одном прохождении фольги. Ниже мы предполагаем, что материал фольги представляет собой вещество с большим атомным номером (как это обычно бывает в эксперименте), тогда $N_\epsilon \gg N_\theta$ (см. [2]), т.е. рассеяние по углу идет гораздо быстрее, чем потеря энергии. Что же касается N_c , то в зависимости от параметров эксперимента оно может быть как больше, так и меньше первых двух величин. Если $N_c \gg N_\epsilon$, то, очевидно, охлаждением электронов можно полностью пренебречь, так как основными будут являться потери энергии в фольге. При этом ионам передается малая доля (порядка N_ϵ/N_c) энергии электронов. Случай, который рассматривается в настоящей работе, определяется неравенствами

$$N_\theta \ll N_c \ll N_\epsilon \quad (1)$$

и характеризуется тем, что ионизационные потери пренебрежимо малы, а значительная доля энергии осциллирующих электронов передается ионам. Вместе с тем функцию распределения электронов можно считать изотропной.

Отметим, что для тонких фольг можно достичь условий, когда $N_c \ll N_\theta$, т.е. за время остывания электроны не успевают рассеяться по углу. В результате диод сильно запирается электронами облака, вследствие чего этот режим является, по-видимому, менее предпочтительным, чем (1).

2. Автомодельное решение

В одномерной постановке задача об ускорении ионов описывается следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} n_i v &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{Ze}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2)$$

где v и n_i — скорость и плотность ионов, Ze и M — их заряд и масса, а φ обозначает электрический потенциал. Для определенности будем отсчитывать φ от потенциала катода и обозначим потенциал анода через U . Предполагается, что величина U не зависит от времени. Координата x отмеряется от поверхности, с которой идет эмиссия ионов (см. рис.1.).

Поскольку скорость движения ионов вследствие их большой массы много меньше скорости электронов, то форма распределения потенциала φ по координате x меняется медленно по сравнению с электронным временем пролета. Последнее обстоятельство позволяет легко находить плотность электронов n в точке с потенциалом φ , если известна их функция распределения по импульсам $f(p, \theta)$ на фольге (θ — угол между вектором импульса и осью x). Для этого необходимо, считая распределение φ стационарным, воспользоваться постоянством функции распределения вдоль фазовых траекторий частиц, которые находятся из условия сохранения энергии и поперечной компоненты импульса:

$$\begin{aligned} p' \sin \theta' &= p \sin \theta, \\ (p')^2 &= p^2 - 2 \frac{e}{c} (U - \varphi) \sqrt{p^2 + m^2 c^2} + \frac{e^2}{c^2} (U - \varphi)^2, \end{aligned}$$

где штрих указывает, что соответствующие величины берутся в точке с потенциалом φ . В результате получим

$$n(\varphi) = 2\pi \int (p')^2 \sin \theta' f(p(p'), \theta(\theta', p')) dp' d\theta' \quad (3)$$

Разумеется, формула (3) справедлива, если потенциал φ монотонно убывает с ростом x , что выполняется во всех рассматриваемых ниже случаях. Как будет видно из дальнейшего (см. раздел 3), функция $f(\rho, \theta)$ не зависит от t , так что распределение $n(\varphi)$ не меняется со временем.

Чтобы замкнуть систему (2), воспользуемся условием квазинейтральности

$$n_i = n(\varphi). \quad (4)$$

Оно начинает выполняться после того, как фронт ускоряемых ионов отойдет от анодной фольги на расстояние, превышающее дебаевский радиус r_D в плазме, состоящей из ускоряемых ионов и осциллирующих электронов. Так как плотность электронного облака заведомо больше плотности электронного пучка (равной по порядку величины

$U/4\pi e d^2$, d — межэлектродный зазор в диоде), то $r_D \sim \sqrt{U/4\pi n e} \ll d$. Следовательно, условие (4) становится справедливым, когда ионный фронт отойдет на расстояние $x_f \gg d$.

При известной зависимости $n(\varphi)$ соотношение (4) вместе с уравнениями (2) образует полную систему уравнений для определения n_i , v , φ . Эта система, очевидно, совпадает с системой уравнений одномерной газодинамики, что и дало название газодинамического рассматриваемому методу ускорения ионов.

Начальное условие к уравнениям (2) состоит в том, что при $t = 0$ в области $0 < x < \infty$ ускоряемые ионы отсутствуют, т.е.

$$n_i = 0. \quad (5)$$

Поскольку как в самой системе (2), (4), так и в начальном условии (5) нет параметра размерности длины, то искомого решение должно быть автомодельным. Соответствующее решение газодинамической задачи хорошо известно [6]. В безразмерных переменных

$$u = \frac{v}{V}, \quad \varphi = \frac{\psi}{U}, \quad \xi = \frac{x}{Vt}, \quad (6)$$

где $V = \sqrt{ZeU/M}$, оно имеет вид

$$\xi_f - \xi = \int_0^\psi \left(\frac{d \ln n}{d \psi'} \right)^{1/2} d\psi' + \left(\frac{d \ln n}{d \psi} \right)^{-1/2}, \quad (7)$$

$$u = \xi + \left(\frac{d \ln n}{d \psi} \right)^{-1/2}.$$

Здесь через ξ_f обозначена автомодельная координата фронта ионного потока, на котором потенциал ψ обращается в нуль (предполагается, что при $\psi \rightarrow 0$ $n(\psi)$ стремится к нулю степенным образом, так что $\lim_{\psi \rightarrow 0} (d \ln n / d \psi)^{-1/2} = 0$). Соотношения (7) в неявном виде определяют зависимости ψ и u от ξ с точностью до произвольной постоянной ξ_f .

Для того чтобы найти эту постоянную, необходимо сформулировать граничные условия к системе (2), (4) в точке $\xi = 0$. Заметим прежде всего, что в окрестности этой точки нарушается условие квазинейтральности плазмы (4). Это связано с тем, что обычно плотность анодной плазмы гораздо больше плотности осциллирующих электронов, поэтому и плотность ускоряемых ионов, равная вблизи поверхности инжекции (там, где они не успели еще заметно ускориться) плотности плазмы, также будет существенно превышать величину n . В результате вблизи эмиссионной поверхности образуется дебаевский слой (толщины $\sim r_D$), в котором потенциал ψ падает от 1 до некоторого значения ψ_0 (см. рис. 2). Детальное исследование условий существования такого слоя и его структуры содержится в работе [7]. Нам достаточно определить только величину потенциала за слоем ψ_0 . Для этого запишем уравнение Пуассона для безразмерного потенциала ψ внутри слоя

$$\frac{d^2 \psi}{d x^2} = \frac{4\pi e}{U} \left[n(\psi) - i (1 - \psi)^{-1/2} \right], \quad (8)$$

где параметр i связан с плотностью тока ионов в слое j_i соотношением

$$i = \frac{j_i}{e} \sqrt{\frac{M}{2ZeU}} \quad (9)$$

Граничное условие к уравнению (8) состоит в равенстве нулю электрического поля при $X = 0$ (условие "бесконечной эмиссионной способности"):

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (10)$$

На большом же расстоянии от слоя (но малом по сравнению с масштабом X_f) потенциал ψ должен стремиться к величине ψ_0 . Поэтому второе граничное условие имеет вид

$$\psi \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \psi_0 \quad (11)$$

Теперь, решая (8), нетрудно убедиться, что параметры ψ_0 и i удовлетворяют уравнениям

$$n(\psi_0) = i(1-\psi_0)^{-1/2}, \quad (12)$$

$$\int_{\psi_0}^1 n(\psi) d\psi = 2i(1-\psi_0)^{1/2}.$$

Первое из этих уравнений просто означает, что при $X \gg r_D$ выполняется условие квазинейтральности, а из второго следует, что суммарный заряд электронов и ионов внутри слоя равен нулю.

Поскольку в масштабе автомодельного решения размер дебаевского слоя пренебрежимо мал, то найденные из уравнений (12) параметры ψ_0 и i должны рассматриваться как граничные условия в точке $\xi = 0$ для автомодельного решения (6)*):

* В последнем разделе работы [4] было учтено только одно условие в (13), поэтому полученное там автомодельное решение неточно. Исправленный вариант приведен в разделе 4 настоящей статьи.

$$\psi|_{\xi=0} = \psi_0, \quad u|_{\xi=0} = \frac{\sqrt{2}i}{n(\psi_0)} = \sqrt{2(1-\psi_0)} \quad (13)$$

Но соотношения (7) содержат всего одну произвольную постоянную ξ_f , выбором которой невозможно одновременно удовлетворить двум граничным условиям (13). Поэтому искомое решение получается сшивкой (7) с областью, в которой u , ψ и n не зависят от ξ , как изображено на рис.2 (очевидно, в этой области уравнения (2) удовлетворяются тождественно). Координата точки сшивки ξ_0 является вторым параметром, который вместе с ξ_f определяется с помощью уравнений (13). После простых выкладок находим

$$\xi_0 = \sqrt{2(1-\psi_0)} - \left(\frac{d \ln n}{d\psi} \right)^{-1/2} \Big|_{\psi=\psi_0}, \quad (14)$$

$$\xi_f = \sqrt{2(1-\psi_0)} + \int_0^{\psi_0} \left(\frac{d \ln n}{d\psi} \right)^{1/2} d\psi \quad (15)$$

Отметим, что, как следует из (7), скорость ионов возрастает по мере приближения к фронту и достигает максимума в точке ξ_f . Максимальная энергия ионов соответствует координате ξ_f и равна

$$W_{\max} = \frac{1}{2} \xi_f^2 ZeU \quad (16)$$

3. Функция распределения электронов

Чтобы определить плотность $n(\psi)$, как отмечалось в предыдущем разделе, достаточно знать функцию распределения электронов по импульсам f у фольги, в точке $X = 0$. Как видно из рисунка 3, где изображена форма потенциальной ямы для электронов, характер движения и, следовательно, вид функции f существенно зависят от полной энергии электрона E . Только частицы с

$E > E_{min}$, где

$$E_{min}/eU = -\psi_0, \quad (17)$$

могут проникать в область ионного течения.

Найдем сначала функцию распределения f в области $E > E_{min}$. Для этого воспользуемся кинетическим уравнением, усредненным по быстрому осциллиционному движению вдоль оси X . Это уравнение имеет наиболее простой вид, если его записать в переменных, являющихся интегралами движения частицы. Так как форма потенциала изменяется медленно по сравнению с периодом осцилляций, то, кроме p_{\perp} , таким интегралом движения является адиабатический инвариант I :

$$I = \int_0^{x_*} p'_x dx \quad (18)$$

(напомним, что отсутствие штриха отличает параметры частицы у фольги). Здесь x_* обозначена координата правой точки поворота, а в качестве нижнего предела выбран нуль, ввиду того, что рассматриваются времена, когда x_* много больше диодного зазора d . В переменных I, p_{\perp} кинетическое уравнение для функции распределения электронов у фольги записывается следующим образом (см. [2]):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{I, p_{\perp}} = \left[\oint \frac{dx}{v'_x} (Stf + q) \right] \left[\oint \frac{dx}{v'_x} \right]^{-1} \quad (19)$$

Здесь интегрирование в правой части ведется вдоль фазовой траектории частицы, задаваемой интегралами I, p_{\perp} ; Stf обозначает столкновительный член, в котором, в соответствии со сказанным во Введении, достаточно учесть только упругие соударения с ядрами:

$$Stf = h(x) \frac{v}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial f}{\partial\theta},$$

v — частота столкновений, $h(x)$ — функция, равная единице внутри фольги и нулю вне ее. Источник q

описывает рост числа частиц в облаке за счет пучка:

$$q = \frac{nbv_0}{2\pi p_0^2} \delta(p-p_0) \delta(\cos\theta-1) \delta(x),$$

где nb , v_0 , p_0 — плотность, скорость и импульс электронов пучка у фольги. Выполняя усреднение вдоль фазовой траектории, запишем уравнение (19) в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{I, p_{\perp}} = \frac{\overline{\theta^2}}{4t_n |\cos\theta| \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial f}{\partial\theta} + nb \frac{\delta(p-p_0) \delta(|\cos\theta|-1)}{4\pi p_0^2 t_n}, \quad (20)$$

где введен средний квадрат угла рассеяния $\overline{\theta^2}$ при нормальном падении электрона на фольгу, $\overline{\theta^2} = 4\ell v/v$ (ℓ — толщина фольги), а также время продольного движения

$$t_n = \int_0^{x_*} \frac{dx}{v'_x} \quad (21)$$

Подчеркнем, что при вычислении оператора St функцию f необходимо задавать в переменных p, θ , тогда как производная в левой части (20) берется при постоянных I и p_{\perp} .

Приступая к решению (20), воспользуемся тем, что в силу предположения о медленности адиабатического остывания по сравнению с угловым рассеянием функция f мало отличается от изотропной:

$$f = f_0(p, t) + \delta f(p, \theta, t), \quad \delta f \ll f_0.$$

Уравнение для изотропной части f_0 получится, если проинтегрировать (20) по телесному углу с весом $t_n |\cos\theta|$:

$$\int_0^{\pi} 2\pi t_n |\cos\theta| \sin\theta \left(\frac{\partial f_0}{\partial t}\right)_{I, p_{\perp}} d\theta = \frac{nb}{p_0^2} \delta(p-p_0). \quad (22)$$

Перейдем теперь в левой части уравнения (22) от переменных I, p_{\perp} к p, θ пользуясь тем, что

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial t}\right)_{I, p_{\perp}} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial t}\right)_p + \left(\frac{\partial f_0}{\partial p}\right)_{\theta} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{I, p_{\perp}}. \quad (23)$$

Производную $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{I, p_{\perp}}$ в силу постоянства адиабатического инварианта можно выразить через производные функции $I(p, p_{\perp}, t)$. Существенно, что в автомодельном решении, где потенциал ψ зависит только от

ξ , I (а также t_n) - линейная функция времени:

$$I = Vt \int_0^{\xi_*} p'_x d\xi \equiv t J(p, p_\perp), \quad (24)$$

$$t_n = Vt \int_0^{\xi_*} \frac{d\xi}{v'_x} \equiv t \tau(p, p_\perp),$$

поэтому

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{I, p_\perp} = -\frac{1}{t} \frac{J}{\partial J / \partial p}. \quad (25)$$

Подставляя теперь (23)-(25) в (22), получаем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{1}{t} G(p) \frac{\partial f_0}{\partial p} = \frac{1}{t} \frac{n_b}{p_0^2} H(p) \delta(p - p_0) \quad (26)$$

где

$$G(p) \equiv \frac{\langle J (\partial J / \partial p)^{-1} \rangle}{\langle 1 \rangle}, \quad H(p) \equiv \frac{1}{\langle 1 \rangle},$$

а угловые скобки означают следующее усреднение:

$$\langle \dots \rangle = 2\pi \int_0^\pi d\theta \tau \sin\theta |\cos\theta| (\dots).$$

Поскольку в автомодельном решении задачи об ускорении ионов нет никакого масштаба размерности времени, то из (26) сразу следует, что f_0 не зависит от t и равна константе в области своего определения:

$$f_0 = \frac{n_b}{p_0^2} \frac{H(p_0)}{G(p_0)} = \text{const}. \quad (27)$$

Величина этой константы будет найдена ниже из других соображений, без вычисления функций H и G .

Переходя к определению функции f при $E < E_{\min}$, докажем прежде всего, что $G(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow p_{\min}$.

(p_{\min} - импульс на фольге частиц с энергией E_{\min}). Действительно, величина $G(p)/t$ равна потере импульса электроном в единицу времени \dot{p} (усредненной по θ) за счет адиабатического остывания. Электрон с $p \approx p_{\min}$ (но $p > p_{\min}$!) теряет энергию только при столкновении с движущейся стенкой в точке $x_* \approx x_0$ (см. рис. 3). Число таких столкновений

в единицу времени пропорционально его скорости в области $0 < x < x_0$ и стремится к нулю вместе с разностью $p - p_{\min}$. А это означает, что $\dot{p} \rightarrow 0$ при $p \rightarrow p_{\min}$. Разумеется, этот результат можно получить и формально, используя приведенное выше явное выражение для $G(p)$.

Обращение в нуль $G(p)$, очевидно, означает, что поток частиц в импульсном пространстве в точке $p = p_{\min}$ равен нулю, другими словами в область $E < E_{\min}$ электроны не попадают и функция распределения здесь равна нулю.

Таким образом, мы приходим к следующему результату

$$f = \begin{cases} \text{const}, & 0 > E > eU\psi_0, \\ 0, & -eU\psi_0 > E > -eU. \end{cases}$$

Вычисляя теперь с помощью (3) плотность облака в зависимости от потенциала ψ , найдем

$$n(\psi) = \begin{cases} n_0 (\psi + \frac{\delta-1}{2} \psi^2)^{3/2}, & \psi < \psi_0 \\ n_0 \left\{ (\psi + \frac{\delta-1}{2} \psi^2)^{3/2} - \left[\psi - \psi_0 + \frac{\delta-1}{2} (\psi - \psi_0)^2 \right]^{3/2} \right\}, & \psi > \psi_0 \end{cases} \quad (28)$$

где n_0 - неизвестная пока константа. Ее можно связать с плотностью пучка у фольги n_b , если воспользоваться тем, что в силу квазинейтральности ионного потока плотность тока электронов $e n_b v_0$ должна равняться плот-

* Заметим, что когда эта скорость сравнивается со скоростью ионов, адиабатический инвариант перестает сохраняться. Однако доля таких электронов пренебрежимо мала.

** Если все-таки электрон захватывается в область $E < E_{\min}$ (например, за счет малого изменения напряжения на аноде), то реально он очень быстро поглощается в фольге, так как время торможения для него резко уменьшается с величины $N_e x_f / c$ до $N_e d / c$.

ности ионного тока j_i . Вместе с (9) это дает

$$n_b = i \sqrt{2(1-\psi_0)} n(\psi_0) \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma+1}} \sqrt{\frac{Z_m}{M}}, \quad (29)$$

где $\gamma = eU/mc^2 + 1$. Соотношение (29), как можно проверить, получается также формально из (27), если, воспользовавшись автомодельным решением, вычислить значения $G(\rho_0)$ и $H(\rho_0)$.

4. Определение параметров ионного потока

Полученная выше функция $n(\psi)$ позволяет полностью конкретизировать автомодельное решение, найденное в разделе 2. Для простоты мы рассмотрим сначала нерелятивистский предел $\gamma - 1 \ll 1$, когда зависимость (28) существенно упрощается:

$$n(\psi) = \begin{cases} n_0 \psi^{3/2}, & \psi < \psi_0 \\ n_0 [\psi^{3/2} - (\psi - \psi_0)^{3/2}], & \psi > \psi_0 \end{cases} \quad (30)$$

Уравнения (12) для определения ψ_0 и i принимают вид

$$n_0 \psi_0^{3/2} = i (1 - \psi_0)^{-1/2},$$

$$n_0 [1 - \psi_0^{5/2} - (1 - \psi_0)^{5/2}] = 5i (1 - \psi_0)^{1/2}.$$

Численное их решение дает $\psi_0 = 0,27$, $i/n_0 = 0,12$. Из (14), (15) находим координату фронта $\xi_f = 2,5$ и точку сшивки решений $\xi_0 = 0,79$, а уравнения (7) позволяют определить зависимости ψ , n и u от ξ в области $\xi_0 \leq \xi \leq \xi_f$:

$$\psi = \frac{3}{32} (\xi - \xi_f)^2, \quad n = n_0 \left(\frac{3}{32}\right)^{3/2} (\xi_f - \xi)^3, \quad u = \frac{1}{4} (3\xi + \xi_f).$$

Максимальная энергия ионов на фронте (16) равна

$$W_{\max} = 3,1 Z e U.$$

Наконец, автомодельное решение позволяет определить отношение n_b/n_0 . Для этого необходимо задаться значением M/Z_m и воспользоваться формулой (29). Полагая, что ускоряются протоны, $M/Z_m = 1836$, и пользуясь приведенными значениями ψ_0 и i/n_0 , получим:

$$n_b/n_0 = 2,7 \cdot 10^{-3} \quad (31)$$

Найдем теперь величину плотности n_0 . Для этого решим уравнение Пуассона, описывающее распределение потенциала в электронном диоде. В предположении, что ионов внутри диода нет, имеем

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \frac{4\pi e d^2}{U} [n(\psi) + n_b \psi^{-1/2}], \quad (32)$$

где $\xi = x/d$. Первое и второе слагаемые в правой части (32) — это плотность облака и пучка, соответственно. Граничные условия к уравнению (32) состоят в обращении электрического поля в нуль на катоде,

$$(d\psi/d\xi)|_{\text{кат.}} = 0, \text{ и равенства } \psi = 1 \text{ на аноде.}$$

Интегрируя (32), получим

$$\int_0^1 d\psi \left[2 \frac{n_b}{n_0} \psi^{1/2} + \int_0^\psi \frac{n(\psi')}{n_0} d\psi' \right]^{-1/2} = \left(\frac{8\pi e n_0 d^2}{U} \right)^{1/2}.$$

Вместе с заданным отношением (31) и зависимостью (30) определение n_0 сводится к вычислению выписанного интеграла. Результат численного интегрирования дает

$$n_0 = 65 n_d$$

где через n_d обозначена плотность пучка, посчитанная по "закону 3/2", $n_d = U/9\pi e d^2$. Из (31) находим, что $n_b = 0,18 n_d$.

Отметим, что величина n_0 не дает значения плотности облака в какой-либо области пространства. Максимальная плотность ионов n_* , соответствующая координатам $0 < \xi < \xi_0$, равна: $n_* = n_0 \psi_0^{3/2} = 8,9 n_d$.

В случае произвольных значений γ все вычисления проводятся по схеме, изложенной выше, хотя становятся более громоздкими и требуют привлечения численных методов. Мы приведем только соответствующие результаты.

На рис.4 изображена величина безразмерного потенциала ψ_0 (см.рис.2) как функция релятивистского фактора γ , а на рис.5 приведены зависимости параметров автономного решения ξ_0, ξ_+ (см. формулы (14),(15)) и максимальной энергии W_{max} от γ . Все эти величины, как было видно из нерелятивистского рассмотрения, не зависят от сорта ускоряемых ионов. Отношение M/Z_m проявляется при вычислении плотностей электронного пучка и ионов. Зависимости n_b и плотности ионов в области однородного течения n_* для трех разных значений

M/Z_m приведены соответственно на рис.6 и 7. Величины n_b и n_* отнесены к плотности пучка n_d в обычном плоском диоде без осциллирующих электронов

$$n_d(\gamma) = \frac{mc^2}{8\pi e^2 d^2} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \left(\int_1^\gamma \frac{dx}{(x^2 - 1)^{1/4}} \right)^2$$

(см.например, [8], где приведен также график плотности тока $eU_0 n_d(\gamma)$).

Важной характеристикой процесса ускорения является доля энергии η , передаваемой ионам электронами пучка. Как обсуждалось в предыдущем разделе, частицы пучка участвуют в ускорении только до тех пор, пока их энергия больше, чем $-eU\psi_0$. Поэтому, хотя релятивистские электроны не теряют энергии в анодной фольге, к.п.д. ускорения заведомо меньше единицы. Формально параметр η определяется следующим образом

$$\eta = \frac{dT_i}{dt} (n_b v_0 eU)^{-1}, \quad (33)$$

где T_i - кинетическая энергия ускоряемых ионов на единицу площади фольги. Нетрудно убедиться, что η не зависит от массы ускоряемых ионов M , но обратно пропорционален их заряду Z . Результат расчета по формуле (33) (для $Z = 1$) приведен на рис.4. Отметим,

что при $\gamma = 3$ эффективность ускорения составляет примерно 70%.

Хотя максимальная энергия ионов, как следует из рис.5, в несколько раз превышает энергию ZeU , доля высокоэнергичных ионов мала. Это демонстрирует приведенная на рис.8 функция распределения ионов по энергии (при $\gamma = 3$). Отсутствие в системе ионов с $W < 0,47 \cdot ZeU$ связано с начальным ускорением в дебаевском слое. Видно, что примерно 70% ионов имеют энергию, не превышающую ZeU .

В заключение этого раздела приведем исправленные варианты решений для случая, когда в системе имеется длинный накопительный плазменный объем, рассмотренного в работе [4] (см.сноску на стр. 8). Константа C в решении (25) работы [4] равна 1,8, а само решение справедливо на интервале $0,8 < \xi < 1,8$. При $0 < \xi < 0,8$ $u = 1,3$; $N = 0,35$; $\psi = 0,13$. Максимальная энергия ионов равна $1,7 eZeU$. Последние формулы раздела 3 работы [4] должны иметь вид

$$u = \frac{1}{5} (4\xi + 3,1); \quad N = \frac{4}{625} (\xi - 3,1)^4; \quad \psi = \frac{2}{25} (\xi - 3,1)^2$$

$$0,41 < \xi < 3,1;$$

$$u = 0,94 \quad N = 0,31 \quad \psi = 0,56$$

$$0 < \xi < 0,41$$

Максимальная энергия ионов в этом случае $E_{max} = 4,7ZeU$.

5. Заключение

Построенное в работе решение позволяет самосогласованным образом описать газодинамическое ускорение ионов с учетом процессов рассеяния электронов в анодной фольге. Оно предсказывает также ряд интересных качественных эффектов. Это, в частности, существование скачка потенциала

в тонком дебаевском слое вблизи плоскости инжекции ионов. Ускорение ионов в этом слое приводит к тому, что их функция распределения носит пороговый характер — она равна нулю ниже некоторой границы. Другим следствием наличия дебаевского скачка является ограничение на к.п.д. ускорения — даже в пределе тонких фольг, когда ионизационными потерями можно пренебречь, он не может превышать $\approx 70\%$ (при $\gamma = 3$).

Необходимо, однако, отметить, что использованные при выводе автомодельного решения предположения в эксперименте могут выполняться только с некоторой точностью. Это прежде всего относится к условию постоянства потенциала анода. Так как реально импульс напряжения имеет конечную длительность, это условие справедливо только на начальной стадии, пока напряжение на диоде не сильно изменилось. Другое возможное ограничение применимости проведенного рассмотрения состоит в том, что со временем с внутренней стороны анодной фольги может образоваться плазма, и в диодном промежутке появятся ионы. Как показывает дополнительное исследование, автомодельное решение с биполярным потоком в диоде не существует (нет решения уравнения Пуассона для распределения потенциала в диоде). По-видимому, в этом случае решение носит качественно другой характер, роль характерного времени в нем может играть время пролета ионов через диодный промежуток.

В заключении автор выражает искреннюю благодарность Д.Д.Рютову за многочисленные полезные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. J.M. Creedon, I.D. Smith, D.S. Proano. *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 91, 1975; D.S. Proano, J.M. Creedon, I. Smith, N. Bergstrom. *J. Appl. Phys.*, **46**, 3310, 1975.
2. Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков. *Физика плазмы*, **2**, 566, 1976.
3. А.В.Аржанников, А.В.Бурдаков, В.С.Койдан, Д.Д.Рютов. *Письма в ЖЭТФ*, **24**, 19, 1976.
4. Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков. *Физика плазмы*, **2**, 767, 1976.
5. Д.Д.Рютов. *Препринт ИЯФ 77-4*, 1977.
6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Механика сплошных сред*, Гостехиздат, 1954.
7. B. Bezzerides, D.W. Forslund, E.L. Lindman, *Phys. Fluids*, **21**, 2179 (1978).
8. Б.Н.Брейзман, Д.Д.Рютов, Г.В.Ступаков. *Известия ВУЗов, Физика*, № 10, 7, 1979.

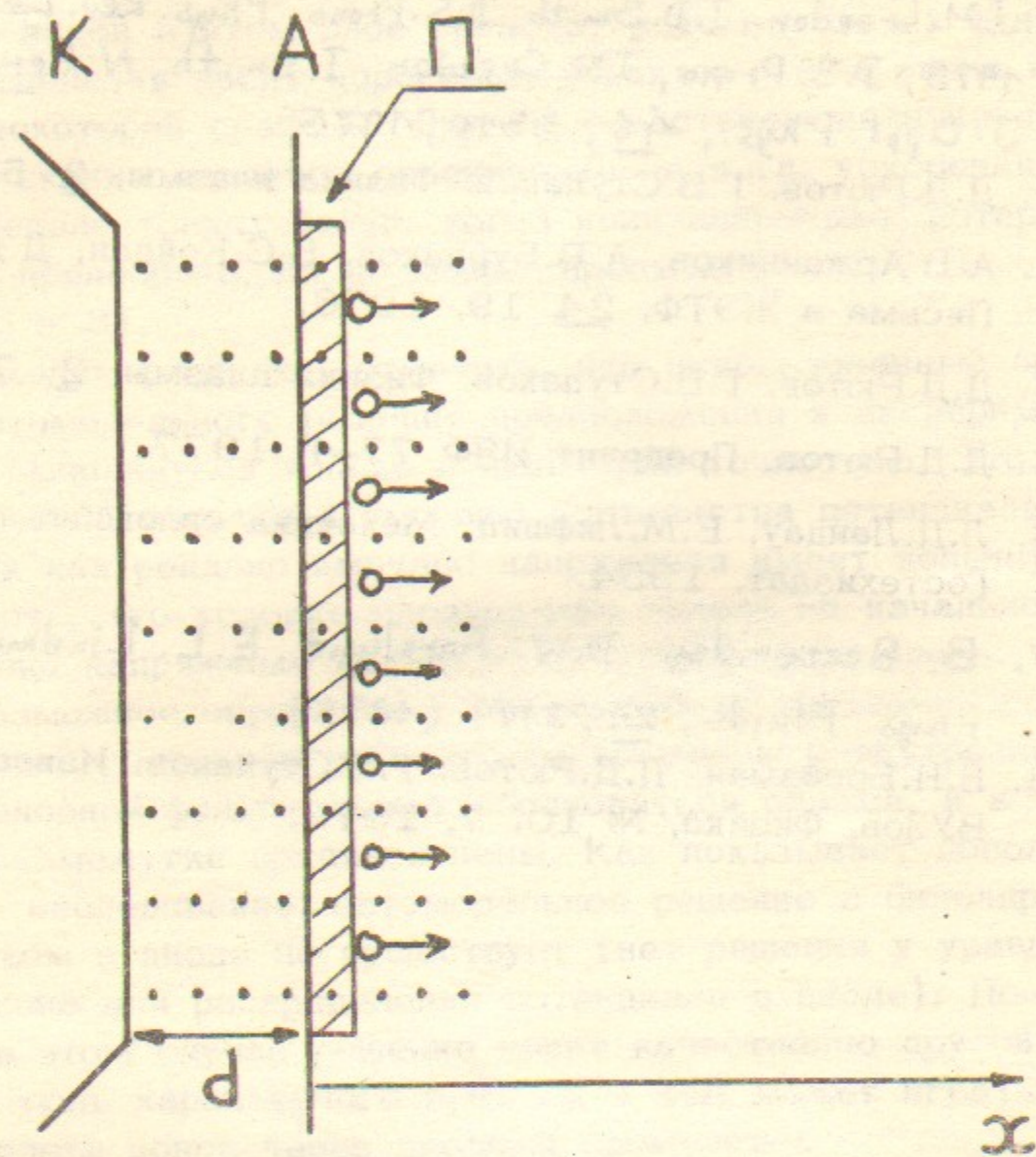


Рис.1. Схема газодинамического ускорения ионов.
 К - катод, А - анод, П - плазменный слой.

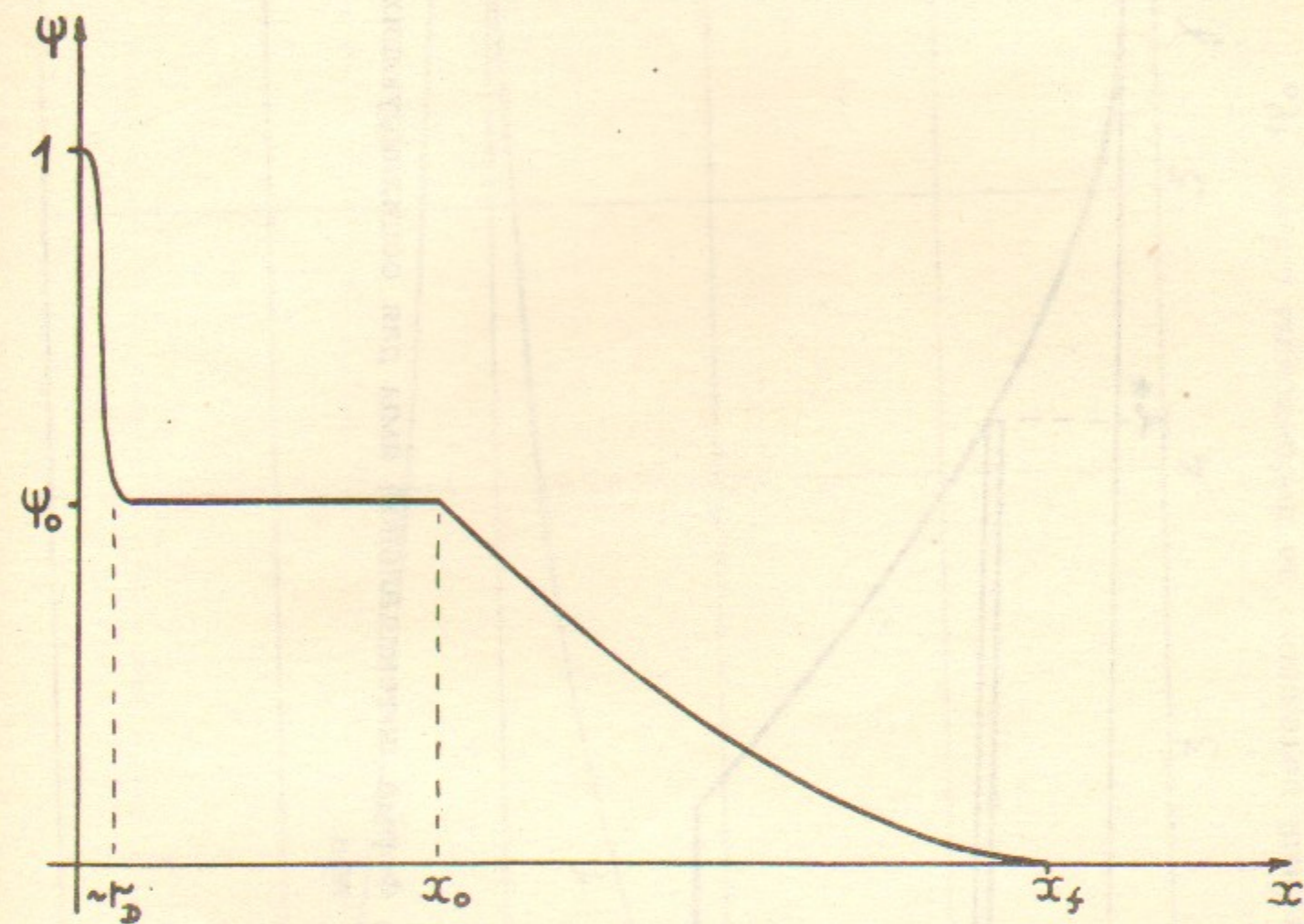


Рис.2. Распределение безразмерного потенциала ψ в атомодельном решении.

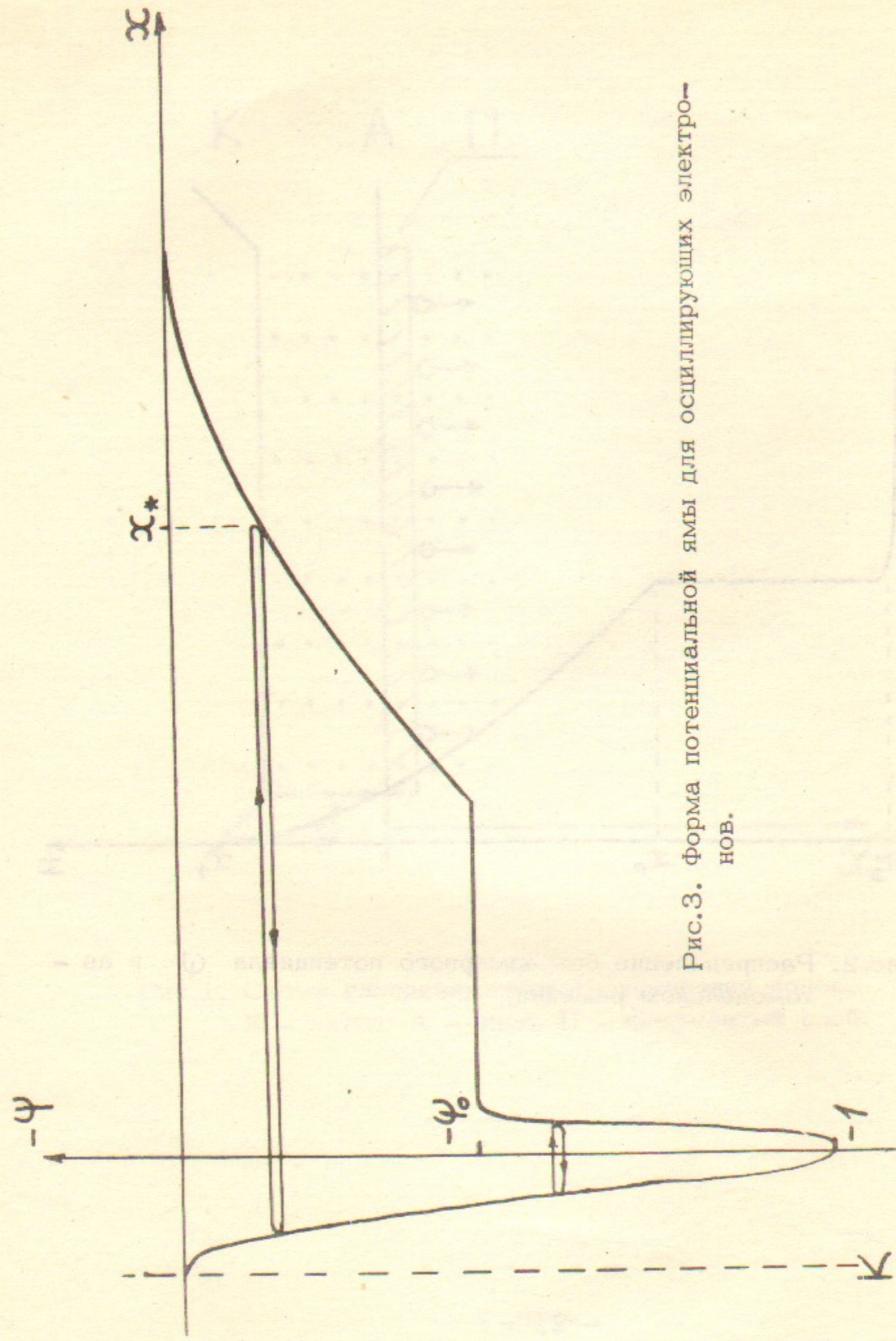


Рис.3. форма потенциальной ямы для осциллирующих электронов.

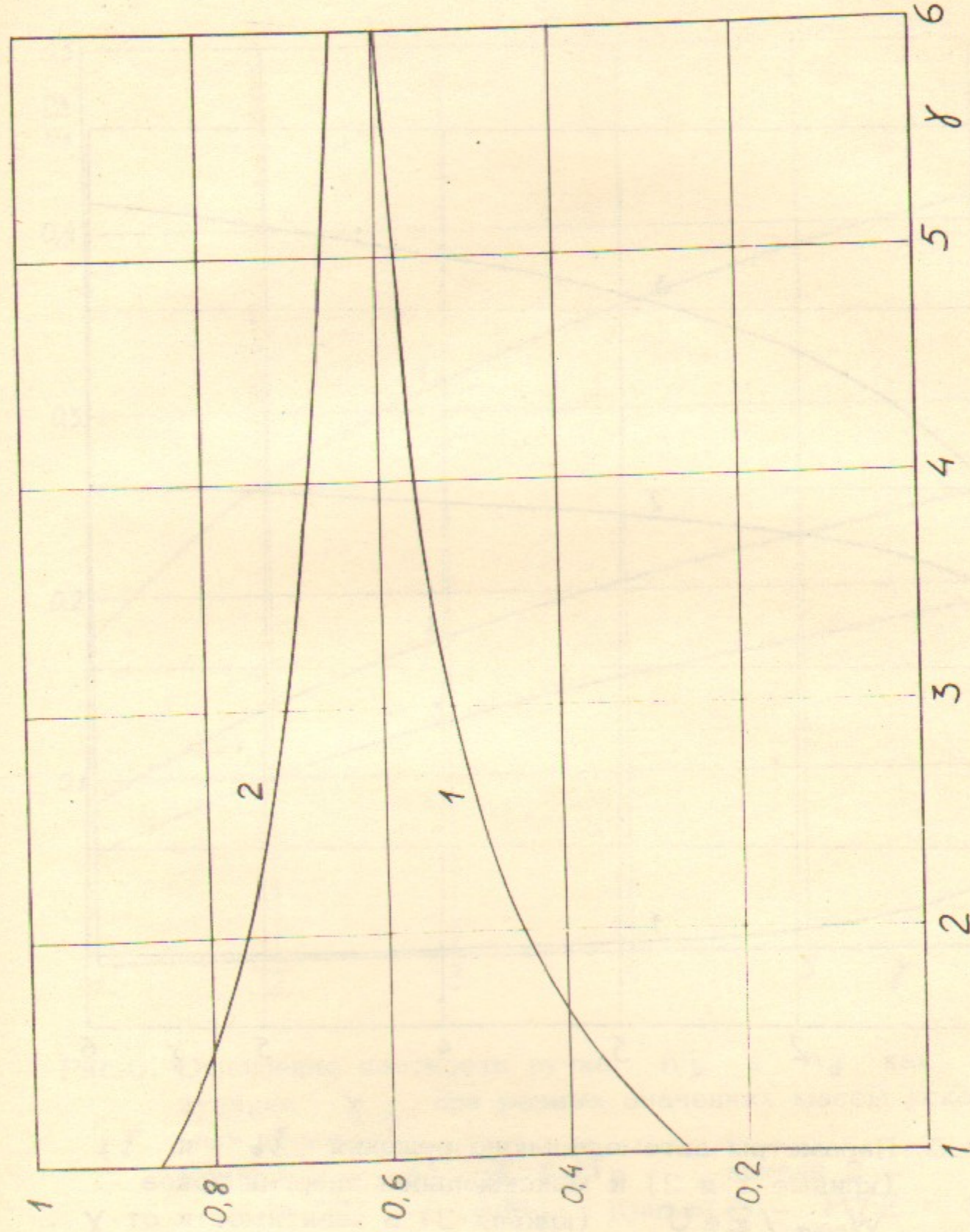


Рис.4. Безразмерный потенциал за дебаевским слоем ψ_0 (кривая 1) и к.п.д. ускорения ионов (кривая 2) в зависимости от γ .

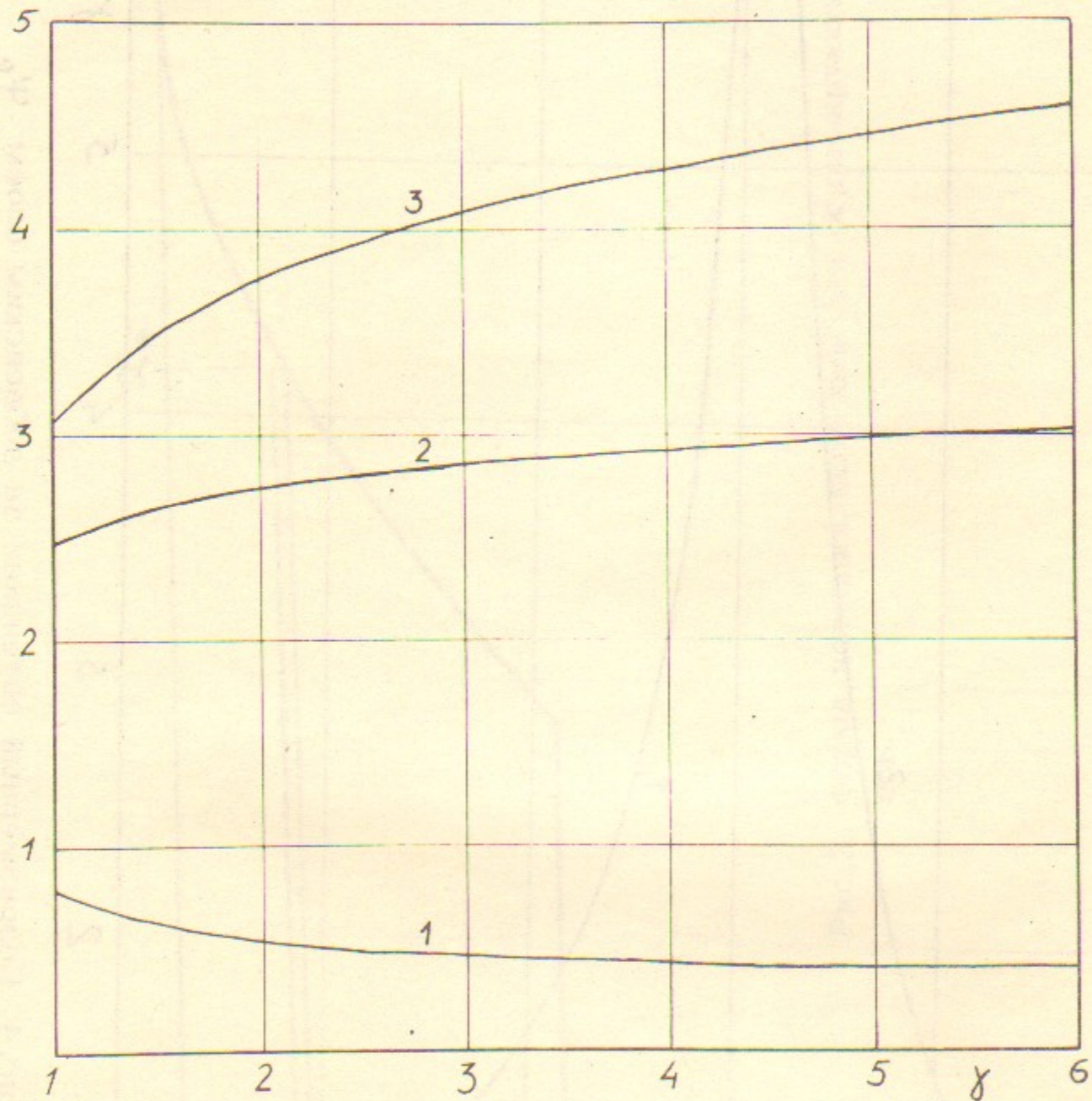


Рис.5. Параметры автомодельного решения ξ_0 и ξ_1 (кривые 1 и 2) и максимальная энергия ионов W_{max}/ZeU (кривая 3) в зависимости от γ .

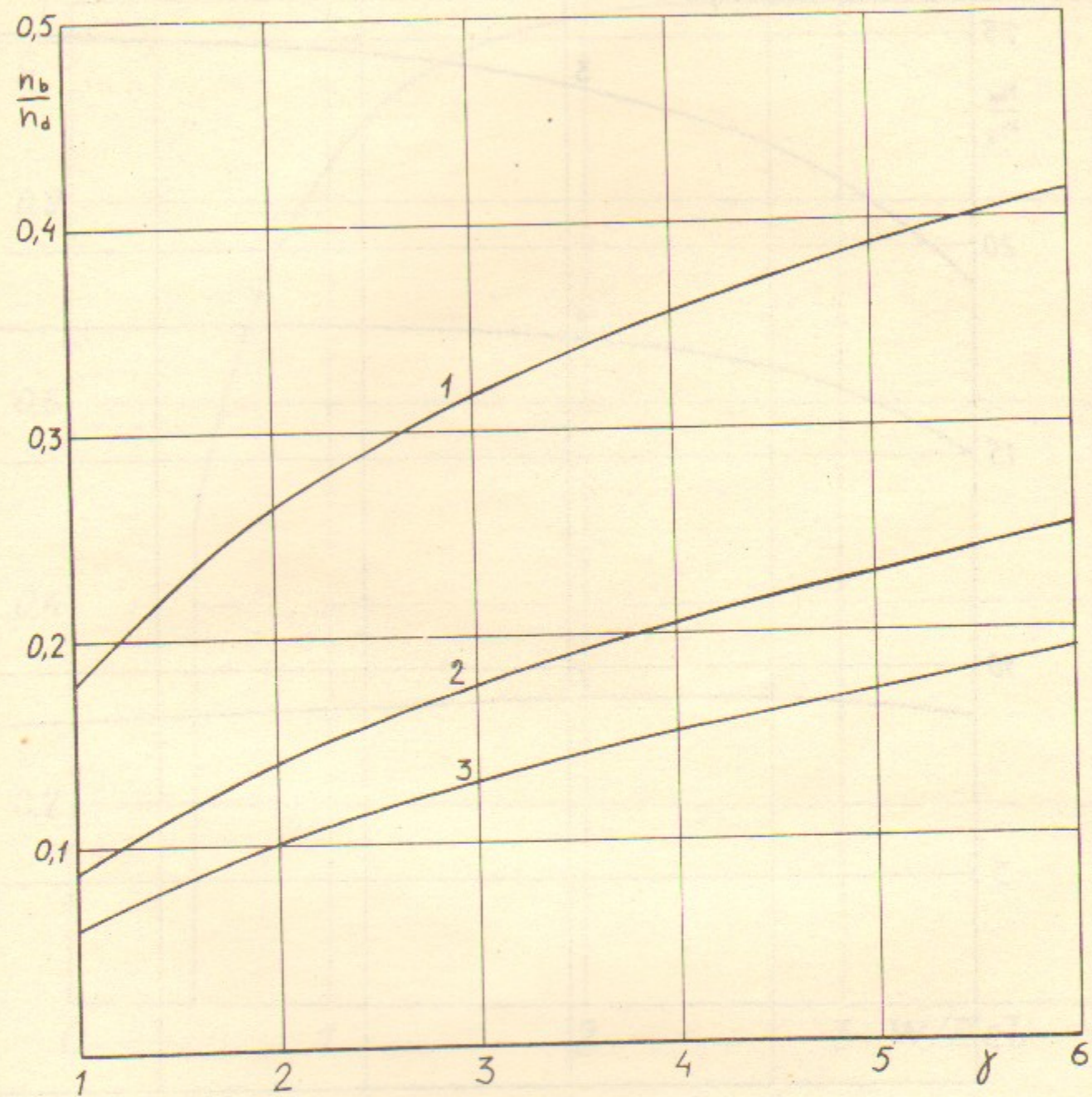


Рис.6. Отношение плотности пучка n_b к n_d как функция γ при разных значениях массы ускоряемых ионов.
 Кривая 1 - $M/Z = M_p$, кривая 2 - $M/Z = 12 M_p$, Кривая 3 - $M/Z = 40 M_p$.

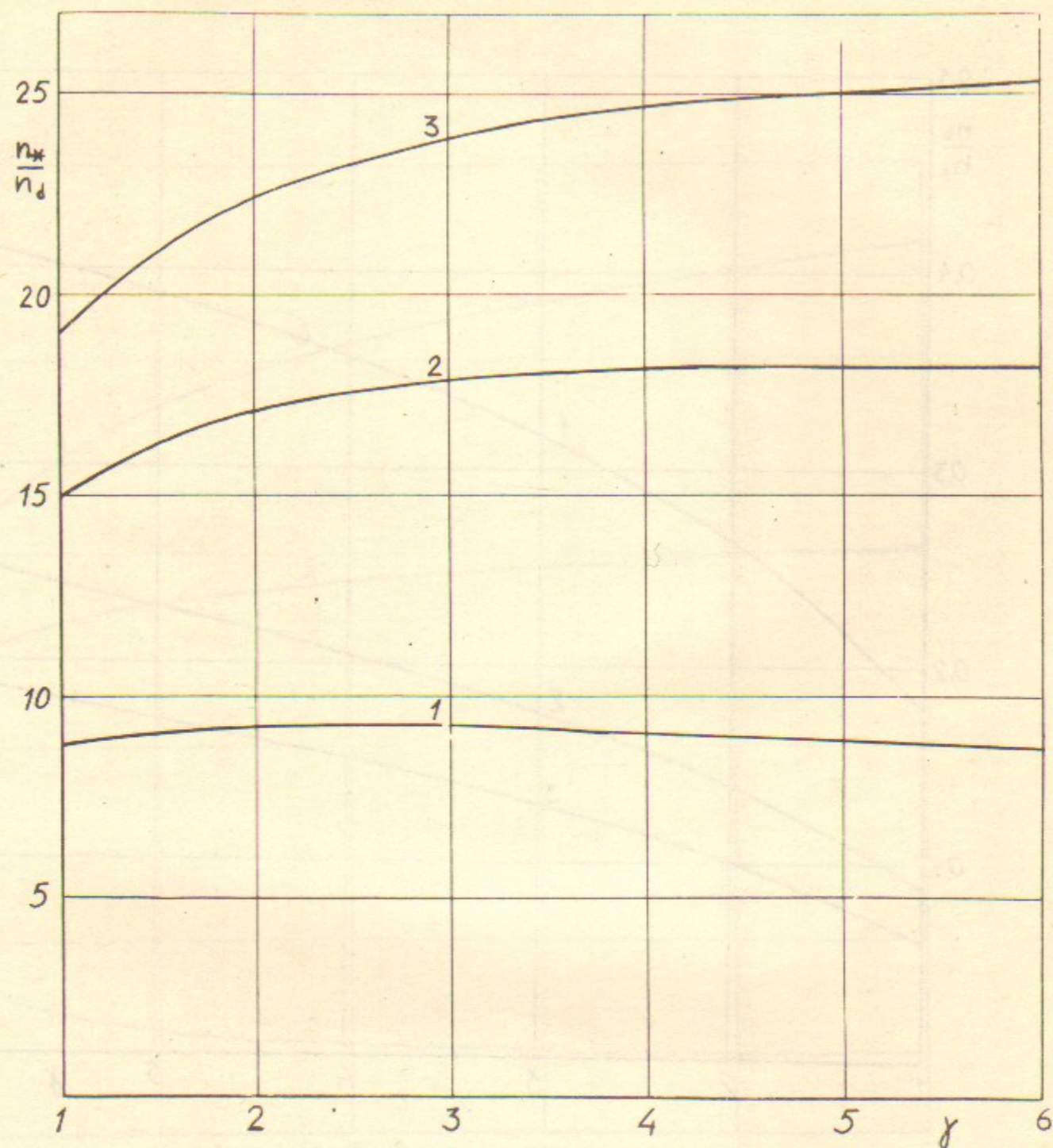


Рис.7. Отношение плотности ионов в области однородного течения n_* к n_d . Кривая 1 - $M/Z = M_p$, Кривая 2 - $M/Z = 12 M_p$, кривая 3 - $M/Z = 40 M_p$.

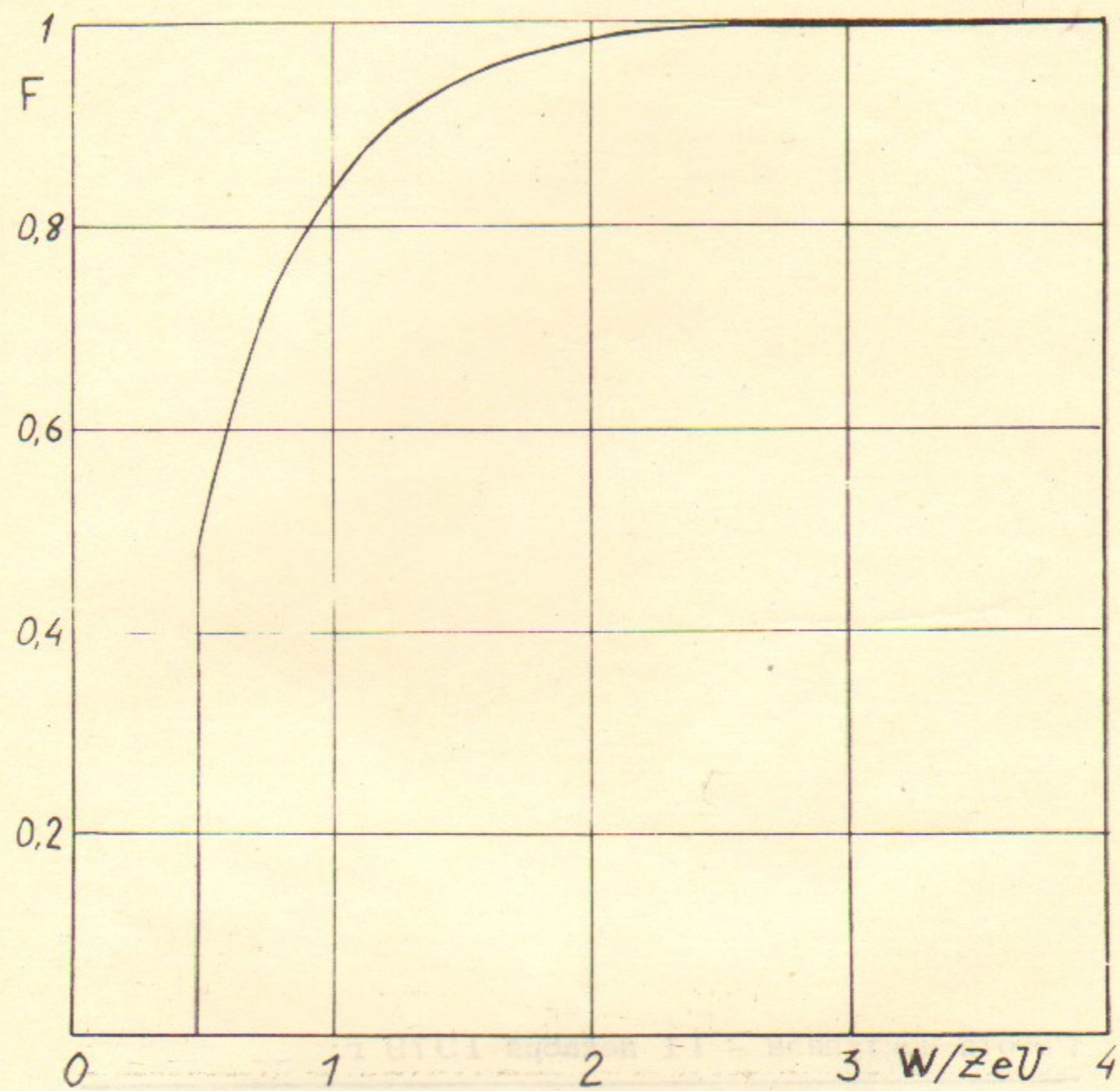


Рис.8. Функция распределения ионов по энергии. Величина $F(W)$ равна относительному числу частиц с энергией, меньшей чем W .