СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

27

Б.Г.Конопельченко

СТРУКТУРА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ЛИНЕЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

ПРЕПРИНТ 80 - 75

Новосибирск

СТРУКТУРА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ЛИНЕЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Б.Г.Конопельченко

А Н Н О Т А Ц И Я

Найден общий вид дифференциальных уравнений в частных производных, интегрируемых при помощи линейной матричной спектральной задачи произвольного порядка. Показано, что дифференциальные уравнения описываемого класса являются гамильтоновыми. Рассмотрены некоторые редукции общих уравнений.

STRUCTURE OF THE NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS ASSOCIATED WITH ARBITRARY ORDER LINEAR SPECTRAL PROBLEM

B.G.Konopelchenko

Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, USSR

A b s t r a c t

The general form of the partial differential equations integrable by the general arbitrary - order linear spectral problem is found. It is shown that differential equations under study are hamiltonian ones. Certain reductions of the general equations are considered.

СТРУКТУРА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ЛИНЕЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Б.Г.Конопельченко

1. В В Е Д Е Н И Е

Метод обратной задачи рассеяния позволяет детально исследовать большое число различных дифференциальных уравнений в частных производных (см.например [1]). Общая схема этого метода была сформулирована в работах [2,3] . Другой подход к нелинейным интегрируемым уравнениям развит в работах [4,5] .

Как известно, дифференциальные уравнения, к которым применим метод обратной задачи рассеяния, объединяются в классы уравнений, интегрируемых с помощью одной и той же линейной спектральной задачи. Удобное и наглядное описание класса уравнений, интегрируемых с помощью линейной спектральной задачи второго порядка было дано в работе [6] . Эти уравнения задаются одной произвольной функцией и некоторым интегро-дифференциальным оператором. Аналогичные результаты получены для уравнений, связанных и с некоторыми другими линейными спектральными задачами [7-13] . В рамках этого подхода была проанализирована гамильтонова структура всех уравнений этих классов [14,8,11,13] .

В настоящей работе мы рассмотрим класс дифференциальных уравнений, связанных с общей линейной спектральной задачей произвольного порядка

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = (i\lambda A + iP(x,t))\,\Psi \qquad (1.1)$$

где λ – спектральный параметр ($\lambda \in C$), A – произвольная постоянная матрица $N \times N$, коэффициентные "функции" $P(x,t)$ – матрицы порядка N (т.е. $A \in gl(N,C)$, $P \in gl(N,C)$).

В работе найден общий вид дифференциальных уравнений, интегрируемых при помощи (1.1). Уравнения этого класса задаются некоторым интегро-дифференциальным оператором L^+ и r_A произвольными функциями $\Omega_1(\lambda,t),\ldots,\Omega_{r_A}(\lambda,t)$, где $r_A = \dim g_{0(A)} - 1$ ($g_{0(A)}$ – нулевая компонента разложения Фиттинга алгебры $gl(N,C)$ относительно A). Показано, что эти уравнения обладают бесконечными сериями локальных интегралов движения. В случае, когда A – регулярный элемент $gl(N,C)$ число серий равно $N-1$. Среди уравнений описываемого класса содержатся релятивистски-инвариантные уравнения, калибровочно эквивалентные уравнениям главного кирального поля.

Показано, что уравнения, интегрируемые с помощью (1.1) являются гамильтоновыми. Указана соответствующая скобка Пуассона и найден явный вид гамильтонианов.

План работы следующий. Во втором разделе вычислен интегро-дифференциальный оператор L^+ и найден общий вид уравнений, интегрируемых с помощью (1.1). В отличие от работ [8,10,13] не предполагается, что матрица A является диагональной. Бесконечные серии интегралов движения для этих уравнений построены в третьем разделе. В четвертом разделе рассмотрены уравнения с сингулярными функциями и, в частности, релятивистски-инвариантные уравнения. Гамильтонова структура уравнений, связанных с (1.1) проанализирована в пятом разделе. В шестом разделе рассмотрены некоторые линейные редукции общих уравнений.

Автор глубоко благодарен И.М.Гельфанду за внимание к работе и стимулирующее обсуждение и П.П.Кулишу за ряд полезных замечаний.

II. ОБЩИЙ ВИД ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Система линейных дифференциальных уравнений (1.1) задает отображение $P(x,t) \to \Psi(x,t,\lambda)$. Рассмотрим произвольное преобразование $P \to P'$, $\Psi \to \Psi'$, сохраняющее это отображение (т.е. $\lambda \to \lambda' = \lambda$). Нетрудно убедиться, что

$$\Psi' - \Psi K = -i\Psi \int_x^{\infty} dy\, \Psi^{-1}(P' - P)\,\Psi', \qquad (2.1)$$

где матрица K определяется асимптотическими свойствами матриц-решений Ψ.

Мы будем предполагать, что $P(x,t) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Тогда $\Psi_{|x|\to\infty} \to E = \exp i\lambda Ax$. Введем, следуя [15,16], фундаментальные матрицы-решения F^+, F^- с асимптотиками $F^+_{x\to+\infty} \to E$, $F^-_{x\to-\infty} \to E$ и матрицу перехода $S(\lambda,t)$: $F^+ = F^- S$. Полагая $\Psi = F^+$ и переходя в (2.1) к пределу $x \to -\infty$ получаем

$$S' - S = -iS \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, F_+^{-1}(P' - P)F^{+'} \qquad (2.2)$$

Соотношение (2.2) играет фундаментальную роль в дальнейшем рассмотрении. Из (2.2), в частности, имеем

$$f(\lambda,t)\frac{dS}{dt} = -iS \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, F_+^{-1} f(\lambda,t)\frac{\partial P}{\partial t} F^+, \qquad (2.3)$$

где $f(\lambda,t)$ – произвольная скалярная функция.

Предположим теперь, что матрица перехода удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{dS(\lambda,t)}{dt} = i[Y(\lambda,t),S(\lambda,t)]\,, \qquad (2.4)$$

где $[A,Y(\lambda,t)] = 0$, т.е. $Y(\lambda,t)\in g_{0(A)}$ – нулевой компоненте разложения Фиттинга алгебры $gl(N,C)$ относительно A. Напомним, что для компонент разложения Фиттинга $g=g_0+g_F$ (g_F – сумма ненулевых корневых подпространств) выполняются соотношения $[g_0,g_0]\subset g_0$, $[g_0,g_F]\subset g_F$ (см.например [17]). Для произвольной матрицы $B\in gl(N,C)$ имеем разложение $B=B_{0(A)}+B_{F(A)}$, где $B_{0(A)}$ – проекция B на $g_{0(A)}$ и $B_{F(A)}$ – проекция B на $g_{F(A)}$. Обозначим базис в подалгебре $g_{0(A)}$ через $\{H_\alpha, \alpha=1,\dots,r_A+1\}$. В качестве $Y(\lambda,t)$ можно взять любой элемент $g_{0(A)}$, т.е. $Y(\lambda,t)=\sum_{\alpha=1}^{r_A+1}\Omega_\alpha(\lambda,t)H_\alpha$, где $\Omega_\alpha(\lambda,t)$ – произвольные функции, мероморфные по λ.

Разложение на компоненты g_0, g_F существенно используются в дальнейших построениях. Отметим, что в силу (1.1) $F^{\pm}$ принадлежат локальной группе $GL(N,C)$. "Проекцию" произвольного $\Psi\in GL(N,C)$ на подгруппы с алгебрами g_0 и g_F будем обозначать соответственно Ψ_{g_0} и Ψ_{g_F}.

Заметим также следующее. Как известно [3] линейные спектральные задачи обладают калибровочной свободой, что позволяет накладывать на $P(x,t)$ различные калибровочные условия. В нашем случае удобно выбрать калибровку $P_{0(A)}=0$. Выполнения условия $P_{0(A)}=0$ всегда можно добиться. Действительно, пусть $P_{0(A)}\neq 0$. Совершим преобразование $\Psi\to\Psi'=G(x,t)\Psi$, где $G(x,t)=G_{0(A)}(x,t)$. Т.к. в силу (1.1)

$$P'_{0(A)} = GP_{0(A)}G^{-1}-i\,\partial G/\partial x\cdot G^{-1}$$

всегда можно подобрать $G(x,t)$ так, чтобы $P'_{0(A)}=0$.

Пример 1: диагональная матрица A с различными элементами. Калибровка $P_{0(A)}=0$ означает $P_{ii}=0$ $(i=1,\dots,N)$. Пример 2: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ где 1 – единичная матрица порядка N. В калибровке $P_{0(A)}=0$ матрица $P(x,t)$ имеет вид

$$P=\begin{pmatrix}0 & P_1(x,t)\\ P_2(x,t) & 0\end{pmatrix},$$

где $P_1(x,t)$, $P_2(x,t)$ – произвольные матрицы порядка N.

Смысл калибровки $P_{0(A)}=0$ состоит в исключении из $P(x,t)$ чисто калибровочных степеней свободы. Это особенно важно при гамильтоновой интерпретации уравнений, связанных с (1.1). В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $P_{0(A)}=0$.

Возвратимся к основному предположению (2.4). Подставляя (2.4) в (2.3) получаем

$$f(\lambda,t)S^{-1}Y(\lambda,t)S-f(\lambda,t)Y(\lambda,t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(F^{+})^{-1} f(\lambda,t)\frac{\partial P}{\partial t}F^{+},$$

Отсюда, учитывая соотношение

$$\{S^{-1}YS\}_{F(A)} = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\partial}{\partial x}\{(F^{+})^{-1}YF^{+}\}_{F(A)} = -i\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\{(F^{+})^{-1}[Y,P]F^{+}\}_{F(A)}$$

находим $(\tilde{Y}=fY)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\Big\{(F^{+})^{-1}\Big(f(\lambda,t)\frac{\partial P}{\partial t}-i[\tilde{Y}(\lambda,t),P(x,t)]\Big)F^{+}\Big\}_{F(A)} = 0 \qquad (2.5)$$

Расписывая (2.5) по компонентам и вводя обозначение

имеем $\overset{++}{\Phi}{}^{(in)}_{ke} = (F^{+^{-1}})_{ie}(F^{+})_{kn}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{tr}\left\{ \left(f(\lambda,t)\frac{\partial P}{\partial t} - i\sum_{\alpha=1}^{r_A}\Omega_\alpha(\lambda,t)[H_\alpha,P]\right)\overset{++}{\Phi}{}^{F(A)}(x,t,\lambda)\right\} = 0 \qquad (2.6)$$

Сумма в (2.6) содержит только r_A членов, т.к. центр $\Omega_{r_A+1}\cdot 1$ (1 единичная матрица порядка N) не дает вклада в $[\tilde{Y},P]$.

Равенство (2.6) содержит произведения $\Omega_\alpha(\lambda)\Phi(x,t,\lambda)$, заданные локально, в каждой точке λ пучка (1.1). Спектральная задача (1.1) позволяет преобразовать эти локальные по λ произведения в глобальные, определенные уже на всем пучке.

<u>Лемма 1.</u> Имеет место соотношение

$$L\overset{++}{\Phi}{}^{(in)}_{F(A)} = \lambda[A,\overset{++}{\Phi}{}^{(in)}_{F(A)}]+[P(x,t),\overset{++}{\Phi}{}^{(in)}_{O(A)}(+\infty)] \qquad (2.7)$$

где

$$L\Phi = -i\frac{\partial \Phi}{\partial x} - [P(x),\Phi]_{F(A)} + i[P(x),\int_x^\infty dy[P(y),\Phi(y)]_{O(A)}]. \qquad (2.8)$$

Доказательство. Из определения $\Phi^{(in)}_{ke}$ и (1.1) находим

$$\frac{\partial \Phi^{in}}{\partial x} = i\,[A,\Phi^{(in)}(x)]+i[P(x),\Phi^{(in)}(x)]. \qquad (2.9)$$

Представляя Φ в виде $\Phi = \Phi_{O(A)} + \Phi_{F(A)}$ и учитывая свойства разложения Фиттинга, имеем (т.к. $P_{O(A)} = 0$, $P=P_{F(A)}$)

$$\frac{\partial \Phi^{(in)}_{O(A)}}{\partial x} = i[P(x),\Phi^{(in)}_{F(A)}(x)]_{O(A)}, \qquad (2.10)$$

$$\frac{\partial \Phi^{(in)}_{F(A)}}{\partial x} = i\lambda[A,\Phi^{(in)}_{F(A)}]+i[P(x),\Phi^{(in)}_{O(A)}(x)]_{F(A)} + i[P(x),\Phi^{(in)}_{F(A)}(x)]_{F(A)} \qquad (2.11)$$

Интегрируя (2.10), получаем

$$\Phi^{(in)}_{O(A)}(x) = \Phi^{(in)}_{O(A)}(+\infty) - i\int_x^\infty dy[P(y),\Phi^{(in)}_{F(A)}(y)]_{O(A)}. \qquad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.11) приходим к (2.7).

<u>Следствие.</u>

$$L_A\overset{++(F(A))}{\Phi}_{F(A)} = \lambda\overset{++(F(A))}{\Phi}_{F(A)}, \qquad (2.13)$$

где величина Φ_A определяется соотношением $[A,\Phi_A] = \Phi$, т.е. $\Phi_A = ad_A^{-1}\Phi$.

Действительно, в силу асимптотических свойств F^+: $\overset{++(F(A))}{\Phi}_{O(A)} = 0$

Тем самым, из (2.7) имеем

$$L\overset{++(F(A))}{\Phi}_{F(A)} = \lambda[A,\overset{++(F(A))}{\Phi}_{F(A)}] \qquad (2.14)$$

Отсюда следует (2.13).

<u>Замечание.</u> Подпространство $\left\{\overset{++(F(A))}{\Phi}_{O(A)}\right\}$ является ядром присоединенного представления подалгебры $\lambda A(\lambda\in C)$. Равенство (2.14) задает в явном виде это присоединенное представление в подпространстве $\left\{\overset{++(F(A))}{\Phi}_{F(A)}\right\}$.

Очевидно, что для произвольной целой функции $\Omega(\lambda,t)$

$$\Omega(\lambda,t)\ \overset{++(F(A))}{\Phi}_{F(A)} = \Omega(L_A,t)\ \overset{++(F(A))}{\Phi}_{F(A)} . \qquad (2.15)$$

Выберем произвольную целую функцию $f(\lambda,t)$ так, чтобы и $\bar{\Omega}_\alpha(\lambda,t)$ были целыми функциями. Тогда в силу (2.15) равенство (2.6) эквивалентно следующему

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{tr}\Big\{ \frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\, f(L_A,t)\ \overset{++(F(A))}{\Phi}_{F(A)} - \qquad (2.16)$$

$$-i\sum_{\alpha=1}^{r_A}\,[H_\alpha,P(x,t)]\,\bar{\Omega}_\alpha(L_A,t)\ \overset{++(F(A))}{\Phi}_{F(A)}\Big\} = 0$$

При выводе (2.16) мы воспользовались тем, что $\mathrm{tr}(P_F\Phi)=\mathrm{tr}(P_F\Phi_F)$. Переходя, наконец, от L к оператору L^+, сопряженному L относительно билинейной формы $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\mathrm{tr}(\Psi(x)\Phi(x))$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,\mathrm{tr}\Big\{\overset{++(F(A))}{\Phi}_{F(A)}(x)\cdot\Big(f(L_A^+,t)\,\frac{\partial P}{\partial t} - \qquad (2.17)$$

$$-i\sum_{\alpha=1}^{r_A}\bar{\Omega}_\alpha(L_A^+,t)[H_\alpha,P]\Big)\Big\} = 0$$

где

$$L^+\Phi = i\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} + [P(x),\Phi]_{F(A)} + \qquad (2.18)$$

$$+i\Big[P(x),\int\limits_{-\infty}^{x} dy\,[P(y),\Phi(y)]_{0(A)}\Big] .$$

Равенство (2.17) выполняется, если

$$f(L_A^+,t)\,\frac{\partial P}{\partial t} - i\sum_{\alpha=1}^{r_A}\bar{\Omega}_{\alpha\, F(A)}(L_A^+,t)[H_\alpha,P] = 0 \qquad (2.19)$$

Таким образом доказана следующая Теорема 1: Нелинейные дифференциальные уравнения, ассоциированные с линейной спектральной задачей (1.1), имеют в калибровке $P_{0(A)} = 0$ вид

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} - i\sum_{\alpha=1}^{r_A}\Omega_{\alpha\, F(A)}(L_A^+,t)[H_\alpha,P] = 0 \qquad (2.20)$$

где $\Omega_1(\lambda,t),\ldots,\Omega_{r_A}(\lambda,t)$ – произвольные мероморфные функции, $r_A=\dim g_{0(A)}-1$ и оператор L^+ дается формулой (2.18). Матрица перехода при этом удовлетворяет линейному уравнению

$$\Big(Y(\lambda,t)=\sum_{\alpha=1}^{r_A}\Omega_\alpha(\lambda,t)H_\alpha\Big)$$

$$\frac{dS(\lambda,t)}{dt} = i[Y(\lambda,t),S(\lambda,t)] .$$

Нелинейные уравнения (2.20) представляют собой уравнения, интегрируемые методом обратной задачи рассеяния с помощью линейной спектральной задачи (1.1). Используя уравнения обратной задачи можно в принципе найти широкий класс решений уравнений (2.20) (решения солитонного типа). Некоторые конкретные уравнения типа (2.20 при $N \geq 3$ рассмотрены, например в [15,18].

Более широкий класс интегрируемых уравнений возникает, если P зависит от нескольких переменных $t_1,\ldots,t_n$ временного типа. Эти уравнения имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(L_A^+,t_1,\ldots,t_n)\,\frac{\partial P(x,t_1,\ldots,t_n)}{\partial t_i} - \qquad (2.21)$$

$$-i\sum_{\alpha=1}^{r_A}\Omega_{\alpha\, F(A)}(L_A^+,t_1,\ldots,t_n)[H_\alpha,P] = 0 ,$$

где $f_i(\lambda, t_1, \ldots, t_n)$ $(i=1,\ldots,n)$ $\Omega_\alpha(\lambda, t_1, \ldots, t_n)$ – произвольные целые функции. При этом

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\lambda, t_1, \ldots, t_n) \frac{\partial S(\lambda, t_1, \ldots, t_n)}{\partial t_i} =$$

$$= i[Y(\lambda, t_1, \ldots, t_n), S(\lambda, t_1, \ldots, t_n)]$$

Если A – регулярный элемент $gl(N,C)$, то $g_{0(A)}$ – подалгебра Картана и $r_A = N-1$.

В этом случае, используя коммутативность подалгебры Картана, можно найти явный вид интегрируемых уравнений, не накладывая на P никаких калибровочных условий. Уравнения выглядят следующим образом

$$\frac{\partial P_{F(A)}(x,t)}{\partial t} + i\left[P(x,t), \int_{-\infty}^{x} dy \frac{\partial P_{0(A)}(y,t)}{\partial t}\right] - \tag{2.22}$$

$$- i \sum_{\alpha=1}^{N-1} \Omega_{\alpha F(A)}(L_A^+, t)[H_\alpha, P] = 0$$

где L_A^+ дается формулой (2.18). Для диагональной матрицы A см. [13].

Ш. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Легко видеть, что в силу (2.4) $S_{g0(\gamma)}$ ($[S_{g0(\gamma)}, Y]=0$) от времени не зависит

$$\frac{dS_{g0(\gamma)}(\lambda)}{dt} = 0 \tag{3.1}$$

Тем самым, $S_{g0(\gamma)}$ является производящим функционалом интегралов движения уравнений вида (2.20). Разлагая $\ln S_{g0(\gamma)}$ в ряд по λ^{-1}

$$\ln S_{g0(\gamma)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} C^{(n)} \tag{3.2}$$

получаем бесконечные серии интегралов движения.

Найдем явный вид $C^{(n)}$ в случае, когда A – регулярный элемент $gl(N,C)$. Воспользуемся для этого методом, предложенным в [15].

Представим F^+ в следующей форме

$$F^+(x,t,\lambda) = R(x,t,\lambda)E(x,\lambda)\exp\int_x^\infty dy\, \chi(y,t,\lambda) \tag{3.3}$$

где $E = \exp i\lambda Ax$, $\chi \in g_{0(\gamma)}$, а матрица R удовлетворяет условию $R_{g0(\gamma)} = 1$.

Из (3.3) вытекает

$$\ln S_{g0(\gamma)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \chi(y,t,\lambda) \tag{3.4}$$

Подставляя (3.3) в (1.1) и учитывая коммутативность подалгебры $g_{0(\gamma)}$, находим

$$\frac{\partial R}{\partial x} - i\lambda[A,R] - R\chi - iPR = 0. \tag{3.5}$$

Разлагая χ и R в ряд по λ^{-1}

$$\chi(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \chi^{(n)}(x,t) \tag{3.6}$$

$$R(x,t,\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} R^{(n)}(x,t)$$

получаем рекуррентные соотношения

$$- i[A,R^{(1)}] = iP + \chi^{(0)}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial R^{(n)}}{\partial x} - i[A,R^{(n+1)}] - \chi^{(n)} - \sum_{p=1}^{n} R^{(p)} \chi^{(n-p)} - iPR^{(n)} = 0, \quad (n=1,2,\dots,)$$

Из (3.7) находим

$$\chi^{(0)} = -iP_{0(A)}, \chi^{(n)} = -i(PR^{(n)})_{0(A)}, \quad n=1,2,3,\dots \tag{3.8}$$

где $R^{(n)}$ определяются из рекуррентных соотношений

$$[A,R^{(1)}] = -P_{F(A)},$$

$$\frac{\partial R^{(n)}}{\partial x} - i[A,R^{(n+1)}] + i\sum_{p=1}^{n-1} R^{(p)}(PR^{(n-p)})_{0(A)} - \tag{3.9}$$

$$- i(PR^{(n)})_{F(A)} + iR^{(n)}P_{0(A)} = 0, \quad (n=1,2,\dots)$$

Формулы (3.8) и (3.9) позволяют вычислить интегралы $C^{(n)}$, которые в силу (3.1), (3.2), (3.4) и (3.6) есть

$$C^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \chi^{(n)}(y,t) \quad (n=0,1,2,\dots,) \tag{3.10}$$

Ясно, что число независимых бесконечных серий интегралов движения (3.10) равно $\dim g_{0(A)} - 1 = N - 1$ (т.к. $\det S = 1$).

1У. УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ $\Omega_\alpha(\lambda,t)$.

Для целых функций $\Omega_\alpha(\lambda,t)$ явный вид интегрируемых уравнений находится прямыми вычислениями. В том случае, когда $\Omega_\alpha(\lambda,t)$ имеют полюса, уравнения (2.20) можно переписать в виде (2.19), где функции $f(\lambda,t)$ и $\Omega_\alpha(\lambda,t)$ также являются целыми.

Здесь мы применим другой метод отыскания явного вида уравнений (2.20) с сингулярными Ω_α, предложенный при $N = 2$ и диагональной матрице A в работе [14] (при произвольном N см. [13]).

Рассмотрим уравнения (2.20) с

$$\Omega_\alpha(\lambda,t) = \sum_{\beta=1}^{\infty} \omega_\beta^\alpha(t)(\lambda+\lambda_{0\beta})^{-\beta} \qquad \alpha=1,\dots,r_A \tag{4.1}$$

<u>Лемма 2.</u> В калибровке $P_{0(A)} = 0$ для оператора L^+ имеет место соотношение

$$(L_A^+ + \lambda)[A,\Pi_\alpha(x,t,\lambda)] = [H_\alpha, P(x,t)], \tag{4.2}$$

где

$$\Pi_\alpha(x,t,\lambda) = F^+(S_{0(A)})^{-1} H_\alpha F^{-1} \tag{4.3}$$

<u>Доказательство.</u> Выписывая для величины $\bar{\Phi}^{+(in)}_{ke} = (F^-)^{-1}_{ie}(F^+)_{kn}$ уравнения типа (2.10), (2.11), нетрудно убедиться, что

$$L^+ \bar{\Phi}^{+(in)}_{F(A)} = -\lambda[A, \bar{\Phi}^{+(in)}_{F(A)}] + [\bar{\Phi}^{+(in)}_{0(A)}(-\infty), P(x,t)] \tag{4.4}$$

где $\bar{\Phi}^{+(in)}_{me}(-\infty) = \delta_{ie} S_{mn}$. Отсюда

$$(L_A^+ + \lambda)\left[A, \left(\bar{\Phi}^{+\,(O(A))}_{F(A)}\right)^{(in)}\right] = \tag{4.5}$$

$$= \left[\left(\bar{\Phi}^{+\,(O(A))}_{O(A)}(-\infty)\right)^{(in)}, P(x,t)\right],$$

где $\left(\Phi^{O(A)}_{O(A)}(-\infty)\right)^{(in)}_{me} = \delta_{ie}\left(S^{-1\,O(A)}\right)_{mn}$. Умножая левую и правую части (4.5) на $\left(S^{-1}_{O(A)} H_\alpha\right)_{ni}$ и суммируя по n,i приходим к (4.2), т.к.

$$\sum_{n,i}\left(S^{-1}_{O(A)} H_\alpha\right)_{ni}\left(\bar{\Phi}^{+\,(O(A))}_{F(A)}\right)^{(in)}_{ke} = \tag{4.6}$$

$$= \left(\Pi_\alpha(x,t,\lambda)\right)_{ke}.$$

Из (4.2) вытекает, что

$$(L_A^+ + \lambda_{0\beta})^{-\beta}\left[H_\alpha, P(x,t)\right] =$$

$$= \frac{(-1)^{\beta-1}}{(\beta-1)!}\left[A, \frac{\partial^{\beta-1}\Pi_\alpha(x,t,\lambda)}{\partial\lambda^{\beta-1}}\right]\Bigg|_{\lambda=-\lambda_{0\beta}}.$$

Тем самым, уравнение (2.20) с Ω_α типа (4.1) можно переписать в следующей форме

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + i\left[A, \sum_{\alpha=1}^{\tau_A}\sum_{\beta=1}^{\infty}\omega_\beta^\alpha(t)\frac{(-1)^{\beta-1}}{(\beta-1)!}\,\frac{\partial^{\beta-1}\Pi_\alpha(x,t,\lambda)}{\partial\lambda^{\beta-1}}\Bigg|_{\lambda=-\lambda_{0\beta}}\right] =$$

$$= 0 \tag{4.7}$$

Уравнение, которому удовлетворяет $\Pi_\alpha(x,t,\lambda)$ легко находится из определения (4.3) и (1.1). Оно имеет вид

$$\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x} = i\lambda\left[A, \Pi_\alpha\right] + i\left[P, \Pi_\alpha\right] \tag{4.8}$$

Отметим, что для сингулярных Ω_α в силу

$$\frac{dS_{F(A)}}{dt} = i\sum_{\alpha=1}^{\tau_A}\sum_{\beta=1}^{\infty}\omega_\beta^\alpha(t)(\lambda+\lambda_{0\beta})^{-\beta}\left[H_\alpha, S_{F(A)}(\lambda,t)\right]$$

при $\operatorname{Im}\lambda_{0\beta} = 0$ необходимо, чтобы $S_{F(A)}(\lambda=-\lambda_{0\beta}) = 0$ (при $N = 2$ см. [14]).

В результате

$$\Pi_\alpha(x,t,-\lambda_{0\beta}) = F^-(x,t,-\lambda_{0\beta})H_\alpha F^{-1}(x,t,-\lambda_{0\beta}). \tag{4.10}$$

Рассмотрим более подробно случай $\Omega_\alpha = \omega_\alpha\lambda^{-1}$.

Имеем

$$\frac{\partial P}{\partial t} + i\left[A, \Pi(x,t,o)\right] = 0 \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial \Pi(x,t,o)}{\partial x} = i\left[P(x,t), \Pi(x,t,o)\right], \tag{4.12}$$

где $\Pi(x,t,o) = \sum_{\alpha=1}^{\tau_A}\omega_\alpha\Pi_\alpha(x,t,o)$.

В силу (4.10) $(Y = \sum_\alpha \omega_\alpha H_\alpha)$

$$\Pi(x,t,o) = F^-(x,t,o)YF^{-1}(x,t,o), \tag{4.13}$$

а из (1.1)

$$P(x,t) = iF^-(x,t,o)\frac{\partial F^{-1}(x,t,o)}{\partial x} \tag{4.14}$$

Уравнение (4.12) удовлетворяется в силу (4.13) и (4.14) тождественно, а уравнение (4.11) имеет вид $(U(x,t) = F^{-1}(x,t,o))$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial x}\right]_{F(A)} + \left[A, U^{-1}YU\right] = 0, \tag{4.15}$$

Уравнение (4.15) явно инвариантно относительно преобразований Лоренца $x \to x' = \rho x$, $t \to t' = \rho^{-1}t$ (x,t – характеристические переменные). Оно имеет также инвариантный групповой смысл, где $U(x,t) \in$ локальной группе $GL(N,C)$, а

$$P = iU^{-1}\frac{\partial U}{\partial x} \in$$

локальной алгебре $gl(N,C)$. Напомним, что уравнение (4.15) написано в калибровке $P_{0(A)} = 0$.

Если A – регулярный элемент $gl(N,C)$, то из (2.22) соответственно находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial x}\right]_{F(A)} - \left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial x}, \int_{-\infty}^{x} dy\, \frac{\partial}{\partial t}\left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial y}\right]_{0(A)}\right] + \left[A, U^{-1}YU\right] = 0 \qquad (4.16)$$

При $N = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P_{11} = P_{22} = 0$, $P_{21} = -P_{12}$ уравнение (4.15) – это уравнение синус-Гордона [6,14]. При $N \geq 3$ оно представляет собой обобщение этого уравнения на группу $GL(N,C)$ и при диагональной матрице A впервые было рассмотрено в работах [19–21]. В форме (4.16) (A – диагональная и N – произвольное) оно выведено в [13].

Повторяя рассуждения работ [20,21] легко показать что уравнения (4.16) калибровочно эквивалентны уравнениям главного кирального поля на пространстве флагов $GL(N,C)/G_{g0(A)}$. Таким образом, среди уравнений, интегрируемых при помощи спектральной задачи (1.1), содержится широкий класс релятивистски-инвариантных уравнений (4.15), (4.16). Законы сохранения для этих уравнений даются формулами (3.8)–(3.10) с $P = iU^{-1}\frac{\partial U}{\partial x}$.

У. ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

Роль переменных $P_{0(A)}$ и $P_{F(A)}$ в динамических системах, интегрируемых с помощью (1.1), существенно различна. Действительно при калибровочном преобразовании $\Psi \to \Psi' = G_{g0(A)}(x,t)\,\Psi$ имеем $P_{F(A)} \to P'_{F(A)} = G_{g0(A)} P_{F(A)} G^{-1}_{g0(A)}$, $P_{0(A)} \to P'_{0(A)} = G_{g0(A)} P_{0(A)} G^{-1}_{g0(A)} - i\frac{\partial G_{g0(A)}}{\partial x} G^{-1}_{g0(A)}$.

Выбирая $G_{g0(A)}$ подходящим образом, всегда можно добиться, чтобы $P'_{0(A)} = 0$. Тем самым, $P_{0(A)}$ имеет чисто калибровочный характер $\left(P_{0(A)} = iG^{-1}\frac{\partial G}{\partial x}\right)$.

Далее матрица перехода $S_{in} = \mathrm{tr}\, \overset{-+}{\Phi}{}^{(in)}$, а при калибровочных преобразованиях $\overset{-+}{\Phi}{}^{(in)} \to \overset{-+}{\Phi}{}^{(in)\prime} = G_{g0(A)} \overset{-+}{\Phi}{}^{(in)} G^{-1}_{g0(A)}$. Исключим, поэтому из $P(x,t)$ чисто калибровочные степени свободы. Калибровку $P_{0(A)} = 0$ естественно называть гамильтоновой.

<u>Теорема 2.</u> Уравнения (2.20), где A регулярный элемент $gl(N,C)$, являются гамильтоновыми. Скобка Пуассона имеет вид

$$\left\{I(P), H(P)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{tr}\left(\frac{\delta I}{\delta P}\left[A, \frac{\delta H}{\delta P}\right]\right), \qquad (5.1)$$

а гамильтониан H равен а) при $\Omega_\alpha(\lambda,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\omega_n^\alpha(t)\lambda^n$ ($\omega_n^\alpha(t)$ – произвольные функции)

$$H = \sum_{\alpha=1}^{N-1}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n^\alpha(t)(-1)^n \mathrm{tr}(H_\alpha C^{(n+1)}), \qquad (5.2)$$

где $C^{(n)}$ – интегралы движения (3.10), б) при $\Omega_\alpha(\lambda,t) = \sum_{n=1}^{\alpha}\omega_n^\alpha(t)(\lambda+\lambda_{0n})^{-n}$

$$H = \sum_{\alpha=1}^{N-1}\sum_{n=1}^{\alpha}\omega_n^\alpha(t)\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial\lambda^{n-1}}\mathrm{tr}\left(H_\alpha \ln S_{g0(A)}(\lambda)\right)\right)_{\lambda=-\lambda_{0n}}. \qquad (5.3)$$

Доказательство основано на фундаментальном соотношении (2.2). Из него вытекает

$$\delta S_{in} = -i\int_{-\infty}^{+\infty} dx \sum_{k,\ell}\delta P_{k\ell}\,\overset{-+}{\Phi}{}^{(in)}_{\ell k} \qquad (5.4)$$

где δS и δP – произвольные вариации, совместные с (1.1). Тем самым

$$\overset{-+}{\Phi}{}^{(in)}_{k\ell} = i\frac{\delta S_{in}}{\delta P_{\ell k}}. \qquad (5.5)$$

В результате для $\Pi_\alpha(x,t,\lambda)$ имеем (учитывая (4.6) и коммутативность $g_{0(A)}$)

$$\Pi_\alpha(x,t,\lambda)=i\,\frac{\delta}{\delta P^T(x,t)}\,(H_\alpha \ln S_{g0(A)}(\lambda)) \quad . \tag{5.6}$$

Рассмотрим случай а). Перепишем равенство (4.2) в виде

$$[A,\Pi_\alpha]=(L_A^+ + \lambda)^{-1}[H_\alpha,P(x,t)] \quad . \tag{5.7}$$

Разлагая левую и правую часть (5.7) в асимптотический ряд по λ^{-1} получаем

$$(L_A^+)^n[H_\alpha,P(x,t)]=(-1)^n[A,\Pi_\alpha^{(n+1)}(x,t)] \tag{5.8}$$

где $\Pi_\alpha(x,t,\lambda)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n}\Pi_\alpha^{(n)}(x,t)$. Из (5.6) и (3.2) находим

$$\Pi_\alpha^{(n)}(x,t)=i\,\frac{\delta tr(H_\alpha C^{(n+1)})}{\delta P^T(x,t)} \quad . \tag{5.9}$$

Из соотношений (5.8), (5.9) вытекает, что уравнение (2.20) с $\Omega_\alpha=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\omega_n^\alpha(t)\lambda^n$ имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\left[A,\frac{\partial H}{\partial P^T}\right] \tag{5.10}$$

где

$$H=\sum_{\alpha=1}^{N-1}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n^\alpha(t)(-1)^n tr(H_\alpha C^{(n+1)})=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{N-1}\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n^\alpha(t)\,\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\left[\frac{\partial^{n+1}}{\partial\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n+1}}tr(H_\alpha \ln S_{g0(A)}(\lambda))\right]_{\lambda=\infty}$$

Легко видеть, что уравнение (5.10) можно записать в форме $\frac{\partial P}{\partial t}=\{P,H\}$ со скобкой Пуассона $\{\ ,\ \}$, заданной равенством (5.1), и гамильтонианом H (5.2).

В случае б) преобразуем уравнение (2.20) к виду (4.7).

Подставляя в (4.7) $\Pi_\alpha(x,t,\lambda)$ из (5.6) получаем следующую форму уравнения (2.20)

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\left[A,\frac{\partial H}{\partial P^T}\right] \tag{5.11}$$

где

$$I=\sum_{\alpha=1}^{N-1}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^\alpha(t)\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial\lambda^{n-1}}tr(H_\alpha \ln S_{g0(A)}(\lambda))\right)_{\lambda=-\lambda_{on}} . \tag{5.12}$$

Гамильтоновость (5.11) очевидна.

В частности, гамильтоновы релятивистски-инвариантные уравнения (4.15). Соответствующий гамильтониан равен $H=tr(Y \ln S_{g0(A)}(0))$, где $Y=\sum\limits_\alpha \omega_\alpha H_\alpha$.

<u>Замечание 1.</u> Очевидно, что в общем случае, когда функции $\Omega_\alpha(\lambda,t)$ содержат и регулярные и сингулярные части, уравнения (2.20) также являются гамильтоновыми, а гамильтонианы суть комбинации выражений типа (5.2), (5.3).

<u>Замечание 2.</u> Скобка Пуассона (5.1) – это частный случай общей скобки Гельфанда-Дикого, вычисленной в работе [4].

<u>Замечание 3.</u> В случае, когда A не есть регулярный элемент $gl(N,C)$, уравнения (2.20) являются гамильтоновыми, если а) $Y=\sum\limits_\alpha \omega_\alpha H_\alpha \in$ подалгебре Картана, содержащей A или б) A – регулярный элемент некоторой подалгебры $gl(N,C)$. Эти случаи будут рассмотрены в отдельной работе.

Скобка Пуассона (5.1) не единственная скобка, соответствующая уравнению (2.20). Подобно случаю N = 2 [22, 23] с уравнениями (2.20) связана бесконечная серия симплектических структур. Действительно, рассмотрим следующую скобку Пуассона

$$\{I,H\}_n=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\ tr\left[\frac{\delta I}{\delta P}(L_A^+)^n\left[A,\frac{\delta H}{\delta P}\right]\right] \quad . \tag{5.13}$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (2.20), например, с $\Omega_\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m^\alpha(t)\lambda^m$ может быть записано следующим образом

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left\{P, H_{-n}\right\}_n \qquad (5.14)$$

где

$$H_{-n} = \sum_{\alpha=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m^\alpha(t)(-1)^m \operatorname{tr}(H_\alpha C^{(m+1-n)}) ,$$

а n – произвольное целое число. В частности H_0 равен гамильтониану (5.2), а $\{\ ,\ \}_0 = \{\ ,\ \}$ (5.1).

Впервые иерархия скобок Пуассона типа (5.13) рассматривалась П.П.Кулишом (при $N = 2$ см. [23]). Общая теория структур типа (5.13) развита в работе [24] .

VI. РЕДУКЦИИ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ

Число компонент $P(x,t)$ (число зависимых переменных) быстро растет с ростом N. Поэтому возникает проблема редукции общих уравнений – задача уменьшения числа зависимых переменных. Постановка этой задачи и некоторые типы редукций обсуждались в работах [2,3,6,15, 21,25] .

Здесь мы рассмотрим задачу редукции уравнений вида[*]

$$\frac{\partial P}{\partial t} - i\Omega_F(L_A^+)[Y,P] = 0 \qquad (6.1)$$

где A – диагональная матрица, $Y(\lambda) = \Omega(\lambda)Y$ ($\Omega(\lambda)$ произвольная скалярная функция, Y – произвольная постоянная диагональная матрица).

Мы ограничимся линейными редукциями, связанными с линейными связями типа

---

[*]) Уравнение (6.1) частный случай (2.20) с $\Omega_\alpha = \Omega(\lambda) Y_\alpha (\alpha=1,\dots,N)$, $Y = \sum_\alpha Y_\alpha H_\alpha$.

$$\begin{aligned} &\alpha)\ R_\alpha P(x,t) = P(x,t) R_\alpha, \quad \beta)\ R_\beta P(x,t) = -P^T(x,t) R_\beta \\ &\gamma)\ R_\gamma P(x,t) = P^+(x,t) R_\gamma \\ &\delta)\ R_\delta P(x,t) = -P^*(x,t) R_\delta \end{aligned} \qquad (6.2)$$

где R_α , R_β , R_γ , R_δ – постоянные матрицы.

<u>Пример:</u> Уравнение (6.1) с $\Omega(L_A^+) = (L_A^+)^{-1}$ т.е. уравнение (4.15) (Неабелево обобщение уравнения синус-Гордона).

Нетрудно убедиться, учитывая (2.14), что связь (6.2. α) совместна с уравнением (6.1), если

$$R_\alpha A = q A R_\alpha, \quad R_\alpha Y = q^{-1} Y R_\alpha \qquad (q \neq 1) . \qquad (6.3)$$

Поскольку $A_{nm} = a_n \delta_{nm}$ $(a_n \neq a_m)$, $Y_{nm} = Y_n \delta_{nm}$ $(Y_n \neq Y_m)$ $n,m = 1,\dots,N$, то из (6.3 имеем $(R_\alpha)_{nm} \cdot (a_m - q a_n) = 0, (Y)_{nm} \cdot (Y_m - q Y_n) = 0$ Отсюда получаем (с точностью до перестановки диагональных элементов у A и Y)

$$A_{nm} = q^{n-1}\delta_{nm} , \quad Y_{nm} = q^{-(n-1)}\delta_{nm} \qquad (6.4)$$

$$q = e^{2\pi i/N} , \quad (R_\alpha)_{nm} = \delta_{m,n+1} (R_\alpha)_{n,n+1} ,$$

где $\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n=m \ (\mathrm{mod}\ N) \\ 0, & n \neq m \end{cases}$ и $(R_\alpha)_{n,n+1}$ $(n=1,\dots,N)$ – некоторые числа. Используя (6.4), находим, что связь (6.2. α) приводит к следующим соотношениям между элементами матрицы $P(x,t)$.

$$P_{n+1,m+1} = \frac{(R_\alpha)_{m,m+1}}{(R_\alpha)_{n,n+1}} P_{n,m} \qquad (n,m=1,\dots,N) \qquad (6.5)$$

Из (6.5) следует, что все $N^2 - N$ элементов $P(x,t)$ разбиваются на $N-1$ непересекающихся семейств (орбит). Число независимых элементов P равно числу орбит. В качестве независимых можно, например, выбрать $P_{12}, P_{13}, \dots, P_{1N}$.

Таким образом связь (6.2. α) редуцирует уравнение (6.1) с $\Omega(\lambda)=\lambda^{-1}$ в уравнение, содержащее $N-1$ зависимых переменных. В частности, если положить $a_n=2q^{n-1}$

$$P_{nm}(x,t)=\frac{2}{N}\sum_{\ell=1}^{N} q^{\ell(n-m)}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_\ell(x,t),$$

получим систему уравнений $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}=2\exp(2\varphi_{\ell+1}-2\varphi_\ell)-2\exp(2\varphi_\ell-2\varphi_{\ell-1}),\ \ell=1,\dots,N$, рассмотренную в работе [25] [x)].

Нетрудно убедиться, требуя совместности (6.2.α) с (1.1), что $R_\alpha\Psi(x,t,\lambda)=\Psi(x,t,q\lambda)R_\alpha$. Отсюда $R_\alpha S(\lambda,t)=S(q\lambda,t)R_\alpha$. Связь (6.2.$\alpha$),(6.4) совместна также с уравнением (2.4).

Более того из совместности (6.2.α), (6.4) с уравнением (1.1) и следовательно, с равенством $L_{A_1}^{+}\Phi^{+}_{F(A)}= \lambda\,\Phi^{F(A)}_{F(A)}$ (при этом $R_\alpha L_A^+=q^{-1}L_A^+R_\alpha$) вытекает, что для совместности связи (6.2 α) с уравнением (6.1) достаточно совместности этой связи с (2.4). Это утверждение справедливо и для других связей типа (6.2).

Из рассмотренного примера мы видим, что для ответа на вопрос – при каких $\Omega(\lambda)$, A и Y уравнения (6.1) допускают некоторую редукцию достаточно:

1. Из условия совместности соответствующей связи с уравнением (1.1) найти вид A, соотношения на $\Psi(x,t,\lambda)$ и на $S(\lambda,t)$.

2. Найти ТЕ $Y(\lambda)$, при которых данная связь совместна с (2.4).

Опишем подкласс уравнений вида (6.1), допускающих редукцию (6.2.α). Из условия совместности связи (6.2 α) с (1.1) имеем $R_\alpha A=qAR_\alpha$. Отсюда находим R_α и A (см.(6.4)). Далее $R_\alpha S(\lambda,t)=S(q\lambda,t)R_\alpha$, т.е. $S_{n+1,m+1}(\lambda,t)=$

$$=\frac{(R_\alpha)_{m,m+1}}{(R_\alpha)_{n,n+1}}S_{nm}(q\lambda,t),\qquad n,m=1,\dots,N$$

x) В работе [25] впервые рассмотрены редукции типа (6.2.α) (6.4) и (6.2.δ). В этой работе по существу содержится также приведенное здесь выражение для P_{nm}.

Из требования совместности этого условия с (2.4) получаем $R_\alpha Y(\lambda)=Y(q\lambda)R_\alpha$. Т.к. $Y(\lambda)=\Omega(\lambda)Y$ имеем две возможности

1) $R_\alpha Y=qYR_\alpha$, $\Omega(q\lambda)=q\Omega(\lambda)$ т.е. $\Omega(\lambda)=\lambda^{1+kN}$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$, 2) $R_\alpha Y=q^{-1}YR_\alpha$

$$\Omega(q\lambda)=q^{-1}\Omega(\lambda),\ \text{т.е.}\ \Omega(\lambda)=\lambda^{-(1+kN)},\ k=0,\pm1,\pm2,\dots .$$

Таким образом, уравнения (6.1) допускают редукцию (6.2.α) ($a_n=q^{n-1}$, $q=\exp 2\pi i/N$ и $P_{nm}(x,t)$ удовлетворяют (6.5)) в следующих случаях:

$$1)\ \Omega(L_A^+)=(L_A^+)^{1+kN},\ k=0,\pm1,\pm2,\dots,\ Y_n=q^{n-1} \qquad (6.6.1)$$

$$2)\ \Omega(L_A^+)=(L_A^+)^{-(1+kN)},\ k=0,\pm1,\pm2,\dots,\ Y_n=q^{-(n-1)} \qquad (6.6.2)$$

При $N=2$ $q=-1$. Поэтому $\Omega(\lambda)$ – любая нечетная функция и $P_{21}=\alpha P_{12}$ (α – произвольное число). Эта редукция рассматривалась в [6]. Из (6.5) следует, что редукция (6.2.α) к $N-1$ переменным допускают уравнения с $\Omega=\lambda$, описывающие резонансное взаимодействие волн [15].

Рассмотрим связь (6.2 β) [x)]. Из условия ее совместности с (1.1) находим $R_\beta A=AR_\beta$, т.е. R_β – диагональная матрица. Далее, $R_\beta\Psi^{-1}_{-}(x,t,-\lambda)=\Psi^{T}(x,t,\lambda)R_\beta$. Отсюда $R_\beta S(-\lambda,t)=S^{T}(\lambda,t)R_\beta$. Совместность этого соотношения с (2.4) дает $R_\beta Y(-\lambda)=-Y(\lambda)R_\beta$, т.е. $\Omega(-\lambda)=-\Omega(\lambda)$. Таким образом, редукцию (6.2.β) с R_β – диагональной матрицей допускают уравнения (6.1) с антисимметричной функцией $\Omega(L_A^+)$. В частности, при $R_\beta=1$ $P=-P^{T}$. Тем самым, при вещественных $iP(x,t)$, iA, iY и нечетных $\Omega(L_A^+)$ уравнения (6.1) допускают редукцию к алгебре $SO(N,R)$.

x) Для некоторых конкретных уравнений редукции (6.2.β), (6.2.γ) рассматривались в обзоре В.Е.Захарова в [1] и работе [15].

Редукция (6.2, γ) анализируется подобным же образом. Имеем $A^*=A, R_\gamma \Psi^{-1}(\lambda^*)=\Psi^+(\lambda)R_\gamma$, R_γ – диагональная матрица. Отсюда $R_\gamma S^{-1}(\lambda^*,t)=S^+(\lambda,t)R_\gamma$ и из условия совместности с (2.4) получаем $\Omega^*(\lambda^*)=\Omega(\lambda)$ т.е. $\Omega(\lambda)$ – любая вещественная функция λ. В частном случае $R_\gamma=1$ $P^+=P$. Следовательно, при любых вещественных $A, Y, \Omega(\lambda)$ уравнения (6.1) допускает редукцию к алгебре $SU(N,R)$.

Рассмотрим, наконец, случай (6.2. δ). Предположим, что N – нечетное и выполнена редукция (6.2. α) т.е. $a_n=\exp 2\pi i(n-1)/N, (n=1,\dots,N)$, $P_{nm}(x,t)$ удовлетворяют соотношениям (6.5). Из условия совместности (6.2. δ) с (1.1) получаем $R_\delta A^*=AR_\delta$. Отсюда $(R_\delta)_{nm}=\delta_{m,2-n}(R_\delta)_{n,2-n}$. Используя это выражение для R_δ находим следующие соотношения между P_{nm}

$$P^*_{2-n,2-m}=-\frac{(R_\delta)_{m,2-m}}{(R_\delta)_{n,2-n}}P_{n,m}\qquad(n,m=1,\dots,N). \tag{6.7}$$

В частности,

$$P^*_{1,N+2-n}=-\frac{(R_\delta)_{n,2-n}}{(R_\delta)_{11}}P_{1n}\qquad(n=2,\dots,N).$$

Нетрудно видеть, что соотношения (6.7) приводят к связям между различными орбитами множества $\{P_{nm}\}$, возникающими из соотношений (6.5). В результате число независимых орбит связей (6.5) и (6.7) равно $[N/2]$.

Матрица перехода при редукции (6.2. δ) удовлетворяет условию $R_\delta S^*(\lambda,t)=S(-\lambda^*,t)R_\delta$. Отсюда $\Omega(-\lambda^*)=-\Omega^*(\lambda)$.

Тем самым, при нечетных функциях $\Omega(\lambda)$ вида (6.6.1) и (6.6.2) одновременное наложение связей (6.2. α) и (6.2. δ) приводит к редукции общих уравнений (6.1) в систему уравнений на $[N/2]$ зависимых переменных. В частности, при $\Omega=\lambda^{-1}$ и $N=3$, полагая

$$P_{nm}(x,t)=\frac{2}{3}\sum_{\ell=1}^{3} q^{\ell(n-m)}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_\ell(x,t),$$

$$\sum_{\ell}^{3}\varphi_\ell=0,\quad \varphi_1=-\varphi_2=\varphi,$$

получаем уравнение $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}+2\exp 4\varphi-2\exp(-2\varphi)=0$, рассмотренное в [26,25].

В заключение отметим две редукции уравнений (6.1), имеющие место при любых диагональных матрицах A и Y. Это редукции: α) $P=P_+$, β) $P=P_-$, где P_+ и P_- – соответственно верхняя и нижняя треугольные матрицы с нулями на главной диагонали. Уравнения (6.1) при этом (в чем нетрудно убедиться, учитывая, что $[P_\pm,P'_\pm]_\pm=[P_\pm,P'_\pm],[P_\pm,P_{\mathcal{D}}]_\mp=0$) имеют вид

$$\alpha)\quad \frac{\partial P_+}{\partial t}-i\Omega(L^+_{(+)\Lambda})[Y,P_+]=0,$$

$$\beta)\quad \frac{\partial P_-}{\partial t}-i\Omega(L^+_{(-)\Lambda})[Y,P_-]=0, \tag{6.8}$$

где

$$L^+_{(\pm)}\cdot=i\frac{\partial}{\partial x}-[P_\pm(x,t),\cdot\,],$$

и $\Omega(\lambda)$ – произвольные мероморфные функции.

В простейшем случае $N=2$ эти уравнения линейны по $P_+(P_-)$.

Литература

1. "Solitons", Eds.by Bullough, P.Gaudrey, Springer-Verlag 1979.
2. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. 1. Функц.анализ. 8, вып.3 (1974) 43-53.
3. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния П., Функц.анализ., 13, вып.3. (1979), 13-22.
4. И.М.Гельфанд, Л.А.Дикий. Резольвента и гамильтоновы системы. Функц.анализ 11, вып.2 (1977), 11-27.
5. И.М.Гельфанд, Л.А.Дикий. Исчисление струй и нелинейные гамильтоновы системы. Функц.анализ, 12, вып.2(1978) 8-23.
6. M.S.Ablowitz, D.S.Kaup, A.C.Newell, H.Segur, Stud. Appl. Math., 53, (1974), 249-315
7. F.Calogero, A.Degasperis, Nuovo Cimento, 39B (1977), 1-54.
8. A.C.Newell, Proc. Roy. Soc. (Lond.), A365, (1979), 283-311.
9. П.П.Кулиш. Обобщенный анзатц Бете и квантовый метод обратной задачи, препринт ЛОМИ № Р-3-79 (1979).

10. B.G.Konopelchenko, Phys. Lett. A. (in press), preprint Institute of Nuclear Physics N° 79-82 (1979).
11. V.S.Gerdjikov, M.I.Ivanov, P.P.Kulish, JINR E2-12590 (1979).
12. B.G.Konopelchenko, preprint Institute of Nuclear Physics N° 79-135 (1979).
13. B.G.Konopelchenko, preprint Institute of Nuclear Physics N 80-16 (1980).
14. H.Flaschka, A.C.Newell, Lecture notes in Physics, V 38 (1975) 355-440.
15. В.Е.Захаров, С.В.Манаков. К теории резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах. ЖЭТФ, 69, (1975), 1654-1673.
16. А.Б.Шабат. Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений. Функц.анализ. т.9,вып.3 (1975), 75-78.
17. Н.Бурбаки. Группы и алгебры Ли , главы УП,УШ, "Мир", 1978.
18. С.В.Манаков. К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн, ЖЭТФ, 65, (1973), 505-516.
19. А.С.Будагов, Л.А.Тахтаджян. Нелинейная одномерная модель классической теории поля с внутренними степенями свободы. ДАН СССР, т.235 (1977) 805-808.
20. А.С.Будагов. Вполне интегрируемая модель классической теории поля с нетривиальным взаимодействием частиц в двумерном пространстве времени. Записки научных семинаров ЛОМИ, т.77, (1978) 24-56.

21. В.Е.Захаров, А.В.Михайлов. Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи, ЖЭТФ, 74, (1978) 1953-1973.

22. F.Magri, J. Math. Phys. 19, N° 5 (1978), 1156-1162.

23. П.П.Кулиш, А.Г.Рейман, Иерархия симплектических форм для уравнения Шриденгера, Дирака на прямой. Записки научных семинаров ЛОМИ, 77, (1978) 134-147.

24. И.М.Гельфанд, И.Я.Дорфман. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры. Функц. анализ, т.13, вып. 4 (1979), 13-30.

25. А.В.Михайлов. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода. Письма в ЖЭТФ, т.30, (1979) 443-448.

26. А.В.Жибер, А.Б.Шабат. Уравнения Клейна-Гордона с нетривиальной группой, ДАН СССР, 247, с.1103-1107

Работа поступила - 22 января 1980 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 14.Ш.1980г. МН 07070
Усл. 1,9 печ.л., 1,5 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 75

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР