

П.24

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР 15

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

М.С.Пеккер

ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНАЯ  
РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ  
ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ  
ФОККЕРА - ПЛАНКА

ПРЕПРИНТ 80-38

БИБЛИОТЕКА  
Института ядерной  
физики СО АН СССР  
ИНВ. № \_\_\_\_\_



Новосибирск

ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА  
ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА

М.С. Пеккер

А Н Н О Т А Ц И Я

Построена полностью консервативная разностная схема для двумерного уравнения Фоккера-Планка. Используется представление уравнения в полностью дивергентном виде и разложение потенциалов Розенблута по полиномам Лежандра.

ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА  
ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА

М.С. Пеккер

В настоящее время актуальной задачей является построение полностью консервативных разностных схем (ПКР схем в смысле Попова Самарского [1]) для уравнения Фоккера-Планка (УФП), описывающего динамику заряженных частиц в термоядерных магнитных ловушках. Это связано в частности с тем, что в предложенных модификациях простого пробкотрона [2] время удержания заряженных частиц много больше времени ион-ионных столкновений и использование для расчетов обычных схем затруднительно и может приводить к физически неверным результатам [3,4].

В открытых магнитных ловушках функция распределения частиц зависит от двух переменных: модуля скорости  $\chi$  и угла  $\theta$  ( $\theta$  - угол между направлением вектора скорости и магнитным полем) и является симметричной относительно плоскости  $\theta = \pi/2$ . При такой симметрии закон сохранения импульса для разностных схем выполняется автоматически и ПКР схема должна обладать разностными аналогами законов сохранения энергии и частиц.

Ранее была предложена ПКР схема для УФП, зависящего от одной переменной - модуля скорости [5]. Для решения двумерных задач в работе [4] рассматривалось приближенное уравнение Фоккера-Планка для которого была написана ПКР схема аналогичная [5]. Схема, приведенная в [4] дает достаточно точные результаты когда время удержания частиц в ловушке много больше кулоновского времени рассеяния.

В данной работе построена ПКР схема для двумерного УФП, которая является точной без каких-либо ограничений на параметры задачи в отличие от работы [4].

1. УФП описывающее временную эволюцию функции распределения частиц в пространстве скоростей имеет вид [6]

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} [A_\alpha F_\alpha + B_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x}] + \frac{1}{x^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [C_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial \theta} + D_\alpha F_\alpha + E_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x}] + S_\alpha \quad (1)$$

здесь  $\alpha$  - сорт частиц,  $F_\alpha$  - функция распределения частиц сорта  $\alpha$ ,  $S_\alpha$  - функция источника,

$$A_\alpha = x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Delta G_\alpha}{2} - H_\alpha \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{2x} \frac{\partial G_\alpha}{\partial \theta} \right) \right],$$

$$B_\alpha = \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x^2},$$

$$C_\alpha = \sin \theta \left( \frac{\partial G_\alpha}{\partial x} \frac{1}{2x} + \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial \theta^2} \frac{1}{2x^2} \right),$$

$$D_\alpha = \sin \theta \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\Delta G_\alpha}{2} - H_\alpha \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{2x} \frac{\partial G_\alpha}{\partial \theta} \right] \right),$$

$$E_\alpha = \sin \theta \left( \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{x} \frac{\partial G_\alpha}{\partial \theta} \right),$$

$$H_\alpha = \Gamma_\alpha \sum_p \ln \Lambda_{\alpha p} \frac{Z_p^2}{Z_\alpha^2} \left( 1 + \frac{m_\alpha}{m_p} \right) h_p, \quad h_p = \int F_p |x-x'|^{-1} d^3 x',$$

$$G_\alpha = \Gamma_\alpha \sum_p \ln \Lambda_{\alpha p} \frac{Z_p^2}{Z_\alpha^2} g_p, \quad g_p = \int F_p |x-x'| d^3 x, \quad \Delta g_p = 2h_p,$$

$\ln \Lambda_{\alpha p}$  - кулоновский логарифм,  $\Delta$  - оператор Лапласа,

$Z_\alpha, m_\alpha$  - заряд и масса частицы сорта  $\alpha$ ,  $\Gamma_\alpha = 4\pi e^4 Z_\alpha^4 / m_\alpha^2$ .

В равновесии потоки частиц и энергии поступающие в плазму из источника  $S_\alpha$  компенсируются потоком уходящих из ловушки

частиц. Математически этот поток обеспечивается граничным условием: функция распределения равна нулю на некоторой поверхности  $\gamma_\alpha$  в пространстве скоростей.

Уравнение (1) записано в виде дивергенции потока частиц, и

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = \int \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} d^3 x = 2\pi \int_{\gamma_\alpha} B_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} \sin \theta d\theta + (E_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} + C_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial \theta}) dx + \int S_\alpha d^3 x \quad (2)$$

Поэтому разностное уравнение, соответствующее (1), обладает только разностным аналогом закона сохранения числа частиц. Остаточный член, получаемый при разностной аппроксимации дифференциальных операторов является источником энергии. Этот дополнительный источник существенно влияет на результаты расчетов если физические источники (стоки) энергии равны нулю или малы. Отметим, что при этом аппроксимация уравнения (1) может быть достаточно хорошей. Если представить уравнение (1) в виде дивергенции потока энергии (см. например [5]), то при разностной аппроксимации возникает дополнительный фиктивный источник частиц. Поэтому для построения разностной схемы желательно представить уравнение в полностью дивергентном виде, т.е. в таком виде, чтобы оно одновременно было записано как в виде дивергенции потока энергии так и дивергенции потока частиц. Для одномерного случая УФП было представлено в таком виде в работе [5].

2. Представим дифференциальное уравнение (1) в полностью дивергентном виде

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x} \frac{\partial W_\alpha}{\partial x} \right) + \frac{1}{x^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [C_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial \theta} + D_\alpha F_\alpha + E_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x}] + S_\alpha \quad (3)$$

где

$$\frac{1}{x} \frac{\partial W_\alpha}{\partial x} = A_\alpha F_\alpha + B_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} \quad (4)$$

Ниже найдем условие которому должен удовлетворять разностный аналог  $W_\alpha$  чтобы разностное уравнение соответствующее (3) являлось полностью дивергентным (полностью консервативным).

Интегрируя (4) получаем

$$W_\alpha = x B_\alpha F_\alpha + \int_0^x (A_\alpha - \frac{\partial(B_\alpha x')}{x' \partial x'}) F_\alpha x' dx'$$

или

$$W_\alpha = \frac{1}{2} F_\alpha x^3 \frac{\partial G_\alpha}{\partial x} - \int_0^x F_\alpha dx' (x'^3 \frac{\partial H_\alpha}{\partial x'} + \frac{x^2}{2} \Delta G_\alpha)$$

Закон сохранения энергии для уравнения (3) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m_\alpha x^2}{2} F_\alpha d^3x = \pi m_\alpha \left[ \int x \frac{\partial W_\alpha}{\partial x} \sin \theta d\theta + x^2 (E_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} + C_\alpha \frac{\partial E_\alpha}{\partial \theta}) dx - \int_0^\pi W_\alpha(\infty, \theta) \sin \theta d\theta \right] + \frac{m_\alpha}{2} \int S_\alpha d^3x \quad (5)$$

Первый член в (5) описывает изменение энергии частиц сорта  $\alpha$  за счет их ухода из области удержания, второй член описывает процесс обмена энергией между различными сортами частиц и третий приток энергии за счет источника  $S_\alpha$ . В отличие от первого второй член имеет вид интеграла по фазовому обмену, поэтому при разностной аппроксимации дифференциальных операторов он может привести к появлению фиктивного объемного источника энергии. Для построения ПКР схемы необходимо преобразовать  $W_\alpha$  к такому виду, чтобы <sup>его</sup> разностный аналог обладал следующим свойством: поток энергии, передаваемый от сорта  $\alpha$  к сорту  $\beta$ , был равен потоку энергии, получаемому сортом  $\beta$  от сорта  $\alpha$  (сюда включается также обмен энергией между частицами сорта  $\alpha$ ). Т.е. разностный аналог выражения

$$2\pi \sum_\alpha \int_0^\pi \frac{m_\alpha}{2} W_\alpha(\infty, \theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad (6)$$

был также равен нулю.

Разложим  $F_\alpha$ ,  $g_\alpha$  и  $h_\alpha$  в ряд по полиномам Лежандра [6].

$$F_\alpha(x, \theta) = \sum_j F_{\alpha j}(x) P_j(\theta); \quad g_\alpha(x, \theta) = \sum_j g_{\alpha j}(x) P_j(\theta); \quad h_\alpha(x, \theta) = \sum_j h_{\alpha j}(x) P_j(\theta)$$

Из симметрии функции распределения относительно  $\theta = \pi/2$  следует, что  $j$  четное число. Введем функционалы

$$M_{\alpha j} = \int_x F_{\alpha j}(x') \cdot x'^{1-j} dx'; \quad N_{\alpha j} = \int_x F_{\alpha j}(x') \cdot x'^{2+j} dx'; \quad (7)$$

$$R_{\alpha j} = \int_x F_{\alpha j}(x') \cdot x'^{3-j} dx'; \quad E_{\alpha j} = \int_x F_{\alpha j}(x') x'^{4+j} dx'$$

Получим

$$h_{\alpha j} = \frac{4\pi}{(2j+1)} [x^{-(1+j)} N_{\alpha j} + x^j M_{\alpha j}] \quad (8)$$

$$g_{\alpha j} = \frac{4\pi}{(2j+1)} \left[ \frac{1}{(2j+3)} (x^{-(j+1)} E_{\alpha j} + x^{(j+2)} M_{\alpha j}) - \frac{1}{(2j-1)} (x^{(1-j)} N_{\alpha j} + x^j R_{\alpha j}) \right]$$

Формулы для  $\partial h_{\alpha j} / \partial x$ ,  $\partial^2 g_{\alpha j} / \partial x^2$  необходимые для вычисления  $W_\alpha$  легко получить дифференцированием (8) ( $\Delta G_\alpha$  вычисляется через  $h_\alpha$ ). После ряда вычислений и простых преобразований  $W_\alpha$  имеет вид

$$W_\alpha = \sum_{\beta j} h_{\alpha \beta} \frac{z_\beta^2}{z_\alpha^2} \frac{4\pi P_j(\theta)}{(2j+1)} \left\{ F_\alpha(x, \theta) T_{\beta j}(x) + \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) \cdot \int_0^x [(j+1) F_\beta(y, \theta) N_{\beta j}(y) - j P_{\beta j}(y) N_\alpha(y, \theta)] y^{1-j} dy - \right. \quad (9)$$

$$\left. - \int_0^x [N_{\beta j}(y) F_\alpha(y, \theta) + P_{\beta j}(y) N_\alpha(y, \theta)] y^{1-j} dy - (1+j) \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_\beta}\right) M_{\beta j} N_\alpha \right\}$$

где

$$N_\alpha(x, \theta) = \int_0^x y^{2+j} F_\alpha(x, \theta) dx$$

$$T_{\beta j}(x) = \frac{(j+1)(j+2)}{2x^j} \int_0^x y^{2j+2} M_{\beta j}(y) dy - \frac{j(j+1)}{2x^{j-2}} \int_0^x y^{2j-2} R_{\beta j}(y) dy$$

Члены пропорциональные  $F_\alpha(x, \theta)$  и  $M_{\beta j}(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  равны нулю, оставшиеся члены описывают обмен энергией

между частицами. Подставляя значение  $W_d$  в (6) получим

$$\pi \sum_d m_d \int_0^\pi W_d \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{Z} \sum_{\alpha \beta} (m_\alpha \Gamma_\alpha \frac{Z_\beta^2}{Z_\alpha^2} + m_\beta \Gamma_\beta \frac{Z_\alpha^2}{Z_\beta^2}) \ln \Lambda_{\alpha\beta} \cdot$$

$$\cdot \sum_j \frac{4\pi}{Z^{j+1}} \int_0^\pi P_j(\theta) \sin \theta d\theta \left\{ \int_0^\infty y^{1-j} [(j+1)(E_\alpha N_{\beta j} + F_\beta N_{\alpha j}) - \right.$$

$$\left. - j(F_{\beta j} N_\alpha + F_{\alpha j} N_\beta) - \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} (N_{\beta j} F_\alpha + F_{\beta j} N_\alpha) - \right.$$

$$\left. - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} (N_{\alpha j} F_\beta + F_{\alpha j} N_\beta) \right] dy \Big\} = 0 \quad (10)$$

3. Для построения разностной схемы уравнения (3) введем равномерную сетку по  $x$  и  $\theta$   $x_i = \delta x \cdot i$ ,  $\theta_k = \delta \theta \cdot k$ . Заменяя дифференциальные операторы на разностные по формулам:

$$\frac{1}{x^2} \left( \frac{W_{dx}}{x} \right)_x = \frac{2}{x_i^2 \delta x^2} \left[ \frac{W_{di+1,k} - W_{di,k}}{x_{i+1} + x_i} - \frac{W_{di,k} - W_{di-1,k}}{x_i + x_{i-1}} \right]$$

$$\frac{1}{x^2 \sin \theta} (C_d F_{d\theta} + D_d F_d + E_d F_{dx})_\theta = \frac{1}{x_i^2 \sin \theta_k \delta \theta^2} \left[ C_{di, k+\frac{1}{2}} \cdot \right.$$

$$\cdot (F_{di, k+1} - F_{di, k}) - C_{di, k-\frac{1}{2}} (F_{di, k} - F_{di, k-1}) + \delta \theta (D_{di, k+\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot F_{di, k+\frac{1}{2}} - D_{di, k-\frac{1}{2}} F_{di, k-\frac{1}{2}}) + E_{di, k+\frac{1}{2}} \frac{\delta \theta}{\delta x} (F_{di+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - F_{di-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}})$$

$$\left. - E_{di-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \frac{\delta \theta}{\delta x} (F_{di+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} - F_{di-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}) \right]$$

получим разностное уравнение

$$(F_d)_t = \frac{1}{x} \left( \frac{W_{dx}}{x} \right)_x + \frac{1}{x^2 \sin \theta} (C_d F_{d\theta} + D_d F_d + E_d F_{dx})_\theta + S_d \quad (11)$$

аппроксимирующее (3) со вторым порядком точности по  $\delta \theta$  и  $\delta x$ . Здесь  $D$ ,  $E$ ,  $C$ ,  $F$  в точках  $i$ ,  $k \pm 1/2$  и  $i \pm 1/2$ ,  $k \pm 1/2$  вычисляются соответственно как полусумма значений в точках

$\theta_k$  и  $\theta_k \pm \delta \theta$  и четверть от суммы значений в точках  $\theta_k, x_i$ ;

$\theta_k \pm \delta \theta, x_i$ ;  $\theta_k, x_i \pm \delta x$ ;  $\theta_k \pm \delta \theta, x_i \pm \delta x$ . Уравнение

(11) будет полностью консервативным если выполняется разностный аналог условия (10)

$$\pi \sum_{\alpha \beta} m_\alpha W_d(\infty, \theta_k) \sin \theta_k \delta \theta = 0 \quad (12)$$

где интегрирование по  $\theta$  заменено суммированием по точкам  $\theta_k$ . Условие (12) выполняется если  $F_{dji}$  определяется формулой

$$F_{dji} = \sum_k P_j(\theta_k) \sin(\theta_k) F_d(x_i, \theta_k) \delta \theta$$

и все интегралы по модулю скорости входящие в (10) вычислены по одной и той же квадратурной формуле.

Для примера, воспользуемся формулой трапеции аппроксимирующей интегралы в (7) и (9) и получим разностное уравнение относительно  $F_{d i, k}$ . При этом точность численного интегрирования порядка  $\delta x^2$  и совпадает с точностью разностной схемы. Например

$$M_{dji} = \sum_{i'=i+1}^{\infty} (\delta x F_{dji'} \cdot x_i^{1-j}) + \frac{\delta x}{2} F_{dji} x_i^{1-j}$$

$$N_{dji} = \sum_{i'=1}^{i-1} \delta x F_{dji'} \cdot x_i^{2+j} + \frac{\delta x}{2} F_{dji} x_i^{2+j}$$

Имеем

$$\frac{1}{x^2} \left( \frac{W_{dx}}{x} \right)_x = \frac{2}{x_i^2 \delta x^2} \left[ (\bar{A}_{di, k} F_{di+1, k} + \bar{B}_{di, k} F_{di, k}) - \right.$$

$$\left. - (\bar{A}_{di-1, k} F_{di, k} + \bar{B}_{di-1, k} F_{di-1, k}) \right] \quad (13)$$

где

$$\bar{A}_{di,k} = \frac{E}{X_i + X_{i+1}} \sum_{p,j} h_{p,j} \frac{z_p^2}{z_j^2} \frac{4\pi P_j(\theta)}{2j+1} \left[ T_{pji+1} + \left\{ \left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) (i+1) - \right. \right. \\ \left. \left. - 1 \right\} X_{i+1}^{1-j} N_{pji+1} - \left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) (i+1) \left( M_{pji+1} X_{i+1}^{2+j} + \frac{\delta x}{2} F_{pji+1} X_{i+1}^3 \right) \right] \frac{\delta x}{2}$$

$$\bar{B}_{di,k} = \frac{E}{X_i + X_{i+1}} \sum_{p,j} h_{p,j} \frac{z_p^2}{z_j^2} \frac{4\pi P_j(\theta)}{2j+1} \left[ -T_{pji} + \frac{\delta x}{2} \left\{ \left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) (i+1) - 1 \right\} \right. \\ \left. \cdot X_i^{1-j} N_{pji} - \left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) (i+1) \left( M_{pji+1} X_i^{2+j} + \frac{\delta x}{2} F_{pji+1} X_i X_{i+1}^{1-j} \right) \right]$$

Подставляя (13) в (11) получаем разностное уравнение относительно  $F_d$ , которое может быть решено методами переменных направлений или стабилизирующей поправки [7]. Коэффициенты  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  вычисляются с предыдущего шага по времени. Легко убедиться, что предложенные разностные схемы являются полностью консервативными.

Отметим, что УФН в цилиндрических переменных имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{v_r} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{v_r} \frac{\partial W_1}{\partial v_r} \right) + \frac{1}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} \left( \frac{1}{v_z} \frac{\partial W_2}{\partial v_z} \right) + S$$

является полностью дивергентным, где  $W_1$  и  $W_2$  функции аналогичные  $W_d$ . Процедура построения ПКР схемы в этом случае остается той же, что и описана выше.

В заключение автор благодарит В.И.Волосова за плодотворные обсуждения.

## Л и т е р а т у р а

1. Ю.П.Попов, А.А.Самарский. Полностью консервативные разностные схемы. Ж. вычисл.матем. и матем.физ., 1969, № 4, 953-958.
2. Г.И.Будкер. Термоядерные реакции в системе с магнитными пробками. К вопросу о непосредственном преобразовании ядерной энергии в энерготехническую. В сб. "Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций", 3, 3-31, М., Издательство АН СССР, 1958.
3. В.И.Волосов, М.С.Пеккер. О точности численных расчетов потерь плазмы из открытых магнитных ловушек. В сб. "Числ. методы механ. сплошной среды", 10, вып.1, Новосибирск, "Наука", 1979, 45-56.
4. В.И.Волосов, М.С.Пеккер. О методах решения двумерной задачи для управления Фоккера-Планка. Ж. вычисл.матем.и матем.физ., в печати.
5. А.В.Бобылев, В.В.Чуянов. О численном решении кинетического уравнения Ландау. Ж. вычисл.матем.физ., 1976, 16, № 2, 407-416.
6. M N Rosenbluth, & M Mac-Donald, P L Sudd. Fokker-Planck Equation for an Inverse-Square Force. Phys Rev, 1957, 107, n1, 1-6.
7. Н.Н.Женко. Метод дробных шагов для решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, "Наука", АН СССР Сиб.Отделение, 1967.