

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР 8
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

В.М.Катков, В.М.Страховенко

УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И
СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ
СТОЛКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ПРЕПРИНТ 80 - 22



Новосибирск

Работа поступила - II декабря 1979 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 18.I-1980г. МН 06549
Усл. 0,6 печ.л., 0,5 учетно-изд.л.
Тираж 150 экз. Бесплатно
Заказ № 23.

Отпечатано на ротапинтере ИЯФ СО АН СССР

В.М.Катков, В.М.Страховенко

УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ
СТОЛКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

АННОТАЦИЯ

Получено спектрально-угловое распределение тормозного излучения при столкновении электронов высокой энергии в магнитном поле. Обсуждается вид спектра, который под влиянием поля заметно меняется во всей области излучаемых частот.

$$dN = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Omega}{\sin^2 \theta} \frac{d\nu}{\nu} \left(\frac{1 - \beta^2}{1 - \beta \cos \theta} \right)^2 \left[\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) - \frac{1}{2} \right]$$

где Ω — угол отсчета, β — скорость электрона, ν — частота излучения, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, $\nu_0 = \frac{1}{2} \nu (1 + \beta \cos \theta) + \frac{1}{2} \nu (1 - \beta \cos \theta)$.
На рисунке изображены спектры излучения для различных значений β и θ .
Для $\beta = 0$ получаем [1] спектр излучения свободных электронов.

$$dN = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Omega}{\sin^2 \theta} \frac{d\nu}{\nu} \left(\frac{1 - \beta^2}{1 - \beta \cos \theta} \right)^2 \left[\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) - \frac{1}{2} \right]$$
$$dN = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Omega}{\sin^2 \theta} \frac{d\nu}{\nu} \left(\frac{1 - \beta^2}{1 - \beta \cos \theta} \right)^2 \left[\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) - \frac{1}{2} \right]$$

1) См. [1] — формула (1) для спектра излучения свободных электронов.
2) В формуле (1) для $\beta = 0$ получаем [1] спектр излучения свободных электронов.

I. При столкновении электронов в магнитном поле, например, в случае, когда встреча пучков происходит внутри магнитного детектора, нельзя пренебречь воздействием поля на процессы, идущие с малой передачей импульса. К таким процессам относятся и однократное тормозное излучение. В работе [1] авторы учли влияние магнитного* поля на спектр тормозных фотонов. В настоящей работе получено распределение, дифференциальное как по частоте, так и по углу вылета фотона, кроме того, формулы для спектра приведены в виде, удобном для практических применений.

2. Сечение тормозного излучения было представлено в [1] в виде суммы: $d\sigma = d\sigma_0 + d\sigma_H$, где $d\sigma_0$ - соответствующее сечение в отсутствии поля, $d\sigma_H$ - поправка, обусловленная наличием поля и отвечающая вкладу виртуальных фотонов. В магнитном поле вклад в тормозное излучение дают и реальные промежуточные фотоны (РПФ). Это фотоны, излучаемые встречным пучком магнито-тормозным образом, которые затем испытывают комптоновское рассеяние. Выражение для $d\sigma_0/d\omega$ хорошо известно:

$$d\sigma_0 = 4\alpha^2 z_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon}\right) \left(\nu - \frac{2}{3}\right) \left[\ln \left(4\gamma^2 \left(\frac{\varepsilon}{\omega} - 1\right)\right) - \frac{1}{2} \right] \quad (1)$$

где ω - частота фотона, ε - энергия электрона, m - его масса, $\gamma = \frac{\varepsilon}{m} \gg 1$, $\nu = \left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon}\right) + \left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon}\right)^{-1}$, z_0 - классический радиус электрона.

Мы рассматриваем область значений ω для которой выполняются условия $\varepsilon - \omega \gg m$, $\omega \gg x\varepsilon$ ($x = \gamma \frac{H}{H_0}$, H - напряженность магнитного поля, $H_0 = m^2/e \approx 4.41 \cdot 10^{12}$ Гс).

Для $d\sigma_H$ в [1] был получен следующий результат**):

$$d\sigma_H = -2\alpha^2 z_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon}\right) \int_1^{\infty} \frac{dz}{z^2} u(z) Q(h) \quad (2)$$

где $h = 2z/3c$, $a = 4\gamma^2 x \left(\frac{\varepsilon}{\omega} - 1\right)$, $u(z) = \nu - 4\left(1 - \frac{1}{z}\right)/z$, $Q(h)$

** Влияние электромагнитного поля встречного пучка на спектр фотонов при однократном тормозном излучении рассмотрено авторами в работе [2].

* В формулу (2.21) работы [1] вкралась опечатка: под знаком интеграла пропущен фактор $1/z^2$.

имеет вид:

$$Q(h) = 1 + \int_0^\infty du \left\{ \frac{1}{3} \left[(J_{1/3}(u) + J_{-1/3}(u)) \cdot L_1 + \right. \right. \quad (3)$$

$$\left. \left. + \frac{\sqrt{3}}{\pi} K_{1/3}(u) \cdot L_2 \right] + \frac{1}{2} u^{1/3} h^{2/3} \left[(J_{2/3}(u) - J_{-2/3}(u)) \cdot L_1 + \frac{\sqrt{3}}{\pi} K_{2/3}(u) \cdot L_2 \right] \right\}$$

здесь $L_1 = \ln \left[1 + \left(\frac{u}{h} \right)^{2/3} \right]$, $L_2 = \ln \left| 1 - \left(\frac{u}{h} \right)^{2/3} \right|$

При больших и малых значениях аргумента вид функции $Q(h)$ значительно упрощается:

$$Q(h) \approx \frac{2}{3} \left(\ln \frac{2}{h} - C \right) + 1 - \ln 3 - \frac{3}{4} \left(\frac{h}{2} \right)^{4/3} \cdot \Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \quad h \ll 1 \quad (4)$$

$$Q(h) \approx -\frac{32}{27} h^{-2} + O(h^{-4}), \quad h \gg 1$$

Проводя в (2) интегрирование по \mathbb{Z} , получаем представление величины $d\sigma_H/d\omega$ в виде однократного интеграла:

$$d\sigma_H = -\frac{2}{3} \alpha^2 z_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon} \right) \int_0^\infty du \left[(J_{1/3}(u) + J_{-1/3}(u)) \cdot S_1 + \right. \quad (5)$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{\pi} K_{1/3}(u) \cdot S_2 \right]$$

$$S_1 = \left(\nu - \frac{2}{3} \right) \ln(1+t^2) + \frac{\nu}{t^3} \left(\arctg t - t + \frac{t^3}{3} \right) + \frac{4}{t^6} \left[\ln(1+t^2) - \right. \quad (6)$$

$$\left. - t^2 + \frac{1}{2} t^4 - \frac{1}{3} t^6 \right] - \frac{28}{3} \frac{1}{t^9} \left[\arctg t - \sum_{k=0}^4 (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]$$

$$S_2 = \left(\nu - \frac{2}{3} \right) \ln|1-t^2| + \frac{\nu}{t^3} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + t + \frac{t^3}{3} \right) - \frac{4}{t^6} \left[\ln|1-t^2| + \right. \quad (7)$$

$$\left. + t^2 + \frac{1}{2} t^4 + \frac{1}{3} t^6 \right] + \frac{28}{3} \frac{1}{t^9} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + \sum_{k=0}^4 \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right],$$

$$t = (3au/2)^{1/3}$$

Заметим, что если $S_1 \equiv f(t)$, то $S_2 = \text{Re}[f(it)]$.

Для вклада РПФ роль сечения играет величина $l_c \cdot d\Sigma$ (см. формулу (3.4) работы [1]), которую мы обозначим как $d\sigma_P$. Для нее также можно получить представление в виде однократного интеграла

$$d\sigma_P = \frac{4\alpha^2 z_0^2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\delta l_c}{R} \frac{d\omega}{\omega} \left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon} \right) \frac{1}{a^2} \int_1^\infty dx \left[\nu \ln x - 2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 \right] K_{5/3} \left(\frac{2x}{3a} \right) \quad (7)$$

здесь l_c - эффективная толщина, которую проходит в пучке реальный фотон; она определяется в основном геометрическими факторами: размерами и формой пучка и радиусом кривизны траектории R .

При $a \gg 1$ удобно воспользоваться асимптотическим разложением величин $d\sigma_P$, $d\sigma_H$. Из формулы (7) получаем в этом пределе

$$d\sigma_P \approx 3\sqrt{3} \alpha^2 z_0^2 \frac{\delta l_c}{R} \frac{d\omega}{\omega} \left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon} \right) \left\{ \left(\nu - \frac{3}{5} \right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) (3a)^{-1/3} - \right. \quad (8)$$

$$\left. - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}a} \left[\nu (\ln a - 3 - C - \frac{1}{2} \ln 3) - 2 \right] - \frac{16\pi}{45a^2} - \right.$$

$$\left. - 3 \left(\frac{\nu}{8} - 3 \right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) (3a)^{-2/3} - \frac{8\pi}{9\sqrt{3}a^3} \right\}$$

Проведенный численный расчет показывает, что фактически асимптотика (8) хорошо аппроксимирует выражение (7) вплоть до значений $a \sim 3$. Для $d\sigma_H$ аналогичная асимптотика была получена в [1].

$$d\sigma_H \approx -\frac{4}{3} \alpha^2 z_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon} \right) \left[\left(\nu - \frac{2}{3} \right) (\ln a - \right. \quad (9)$$

$$\left. - C + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 3) - \frac{1}{9} + \frac{28}{8} \left(\nu + \frac{6}{5} \right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) (3a)^{-4/3} \right]$$

$a \gg 1$, $C \approx 0,577$ - постоянная Эйлера.

На рисунках 1,2 приведены кривые спектрального распределения $(\varepsilon/4\alpha^2 z_0^2) (d\sigma/d\omega)$ для $d\sigma_0$ (кривая 1), $-d\sigma_H$ (кривая 2) и $d\sigma_P$ (кривая 3) при $\varepsilon = 3,5$ ГэВ, $N = 10^4$ Гс. Величина l_c , входящая в $d\sigma_P$ выбрана равной 5 см, что отвечает указанным значениям ε , N и поперечному размеру пучка 0,1 см. Видно, что для достаточно малых значений ω/ε можно пренебречь вкладом РПФ ($d\sigma_P$), при этом относительный вклад $-d\sigma_H/d\sigma_0$ составляет 17% при $\omega/\varepsilon = 10^{-4}$ и 14% при $\omega/\varepsilon = 10^{-2}$, напомним, что эта поправка уменьшает сечение. С ростом величины ω/ε растет относительный вклад РПФ

* Как указывалось в [1], вычисление l_c требует учета конкретной экспериментальной ситуации, однако, поскольку l_c входит в (7) множителем, пересчет $d\sigma_P$ для разных значений l_c является тривиальным.

и при $\omega/\varepsilon \approx 1$ $d\sigma_p$ оказывается сравнимым с $d\sigma_0$. При $\omega/\varepsilon \approx 0,98$ ($a \approx 6.7$) кривая 3 имеет максимум; поведение ее в районе максимума изображено на рис.2 отдельно. При дальнейшем росте ω/ε кривая 3 резко падает. Дело в том, что таким значениям ω отвечают частоты магнито-тормозного излучения, превышающие характерную частоту $\sim \chi\varepsilon$. Хорошо известно, что вероятность магнито-тормозного излучения для таких частот сильно подавлена.

Таким образом поправки, обусловленные влиянием магнитного поля имеют заметную величину, практически во всей области изменения частоты.

3. Переходя к вопросу об угловом распределении тормозных фотонов заметим, что величина z , фигурирующая в (2) непосредственно связана с угловой переменной. Действительно, возводя в квадрат обе части равенства $p_2 - k = p_4 - q$, описывающего закон сохранения 4-х импульса вдоль линии (на диаграмме) излучающей частицы, получаем

$$2\omega\varepsilon(1 - \vec{n}\vec{v}) = 2q_0\varepsilon_4 - 2\vec{q}\vec{p}_4 + q^2 \quad (10)$$

здесь $\vec{v} = \vec{p}_2/\varepsilon$. В области основного вклада в сечение $d\sigma_n$, $q_0 \approx q_{||}$, так что $q^2 \ll q_0\varepsilon$ и можно опустить q^2 в формуле (10). Далее, поскольку в правой части соотношения (10) нет компенсации, можно заменить $\vec{q}\vec{p}_4$ на $-q_{||}\varepsilon_4$ (напомним, что $q_{||} = -\vec{q}\vec{v}/|\vec{q}||\vec{v}|$) и положить $\varepsilon_4 \approx \varepsilon - \omega$, так как $q_0 \ll \omega$. Пусть ϑ - угол вылета фотона (угол между \vec{n} и \vec{v}), тогда с релятивистской точностью имеем

$$1 + (\chi\vartheta)^2 \approx q_{||} \frac{4\varepsilon(\varepsilon - \omega)}{m^2\omega} \equiv \frac{q_{||}}{q'_0} \equiv z \quad (11)$$

Последнее равенство в (11) следует из определения величин z , q'_0 данного в [1]. Поскольку при выводе формулы (2.21) работы [1] (выражение (2) настоящей работы) не проводилось никаких преобразований, например, интегрирования по частям, затрагивающих переменную z , то из (2) непосредственно находим распределение по ω , z , а согласно (11) и по ω , ϑ

$$d\sigma_n = -2\alpha^2 z_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{dz}{z^2} \left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon}\right) u(z) Q\left(\frac{2z}{3a}\right) \quad (12)$$

величины Q , $u(z)$ определены в (2), (3). Приведем также выражение для $d\sigma_0/d\omega dz$

$$d\sigma_0 = 4\alpha^2 z_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{dz}{z^2} \left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon}\right) \left\{ u(z) \left[\ln\left(4\chi^2\left(\frac{\varepsilon}{\omega} - 1\right)\right) - \frac{1}{2} \right] + \frac{6}{z} \left(1 - \frac{1}{z}\right) - 1 \right\} \quad (13)$$

Аналогичное распределение для вклада РИФ имеет вид

$$d\sigma_p = \frac{4\alpha^2 z_0^2}{3\sqrt{3}a^2} \frac{\chi l_c}{R} \frac{d\omega}{\omega} dz \left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon}\right) u(z) \int_1^\infty dx K_{5/3}\left(\frac{2xz}{3a}\right) \quad (14)$$

С ростом угла ϑ (ростом z) сечение $d\sigma_0$ (13) и обусловленные полем поправки к нему быстро падают, так что при $a \gg 1$ основной интерес представляет область углов ϑ , для которых $z \ll a$. В этой области для $Q(2z/3a)$ в формуле (12) можно воспользоваться асимптотическим выражением (4) при $h = 2z/3a \ll 1$, а вместо (14) использовать приближенную формулу

$$d\sigma_p \approx 2\sqrt{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \alpha^2 z_0^2 \frac{\chi l_c}{R} \frac{d\omega}{\omega} \frac{dz}{z^2} \left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon}\right) u(z) \cdot \left(\frac{z}{3a}\right)^{1/3} \left[1 - \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{z}{3a}\right)^{2/3} + \frac{3}{4} \left(\frac{z}{3a}\right)^2 - \frac{2z}{80} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)} \left(\frac{z}{3a}\right)^{10/3} + \frac{9}{20} \left(\frac{z}{3a}\right)^4 \right] \quad (15)$$

На рисунке 3 изображена зависимость величин $\frac{\varepsilon}{4\alpha^2 z_0^2} \frac{d\sigma}{d\omega dz}$ от $\chi\vartheta$ ($z = 1 + (\chi\vartheta)^2$; $dz = 2\chi^2\vartheta d\vartheta = \chi^2 d\Omega/\pi$) для $d\sigma_0$ (1), $-d\sigma_n$ (2) и $d\sigma_p$ (3) при указанных выше значениях ε , H , l_c и $\omega/\varepsilon = 10^{-4}$. На рисунке 4 эта же зависимость построена при $\omega/\varepsilon = 10^{-2}$. Относительный вклад $-d\sigma_n/d\sigma_0$ при $\chi\vartheta$ равном нулю, 5 и 10 для $\omega/\varepsilon = 10^{-4}$ составляет 19, 15 и 13%, а для $\omega/\varepsilon = 10^{-2}$ соответственно 16, 11 и 9%. Заметим, что с ростом $\chi\vartheta$ относительный вклад РИФ увеличивается.

Л и т е р а т у р а :

1. В.М.Катков, В.М.Страховенко. ЯФ, 25, 1245, 1977.
2. В.М.Катков, В.М.Страховенко. ДАН СССР, 231, 582, 1976.

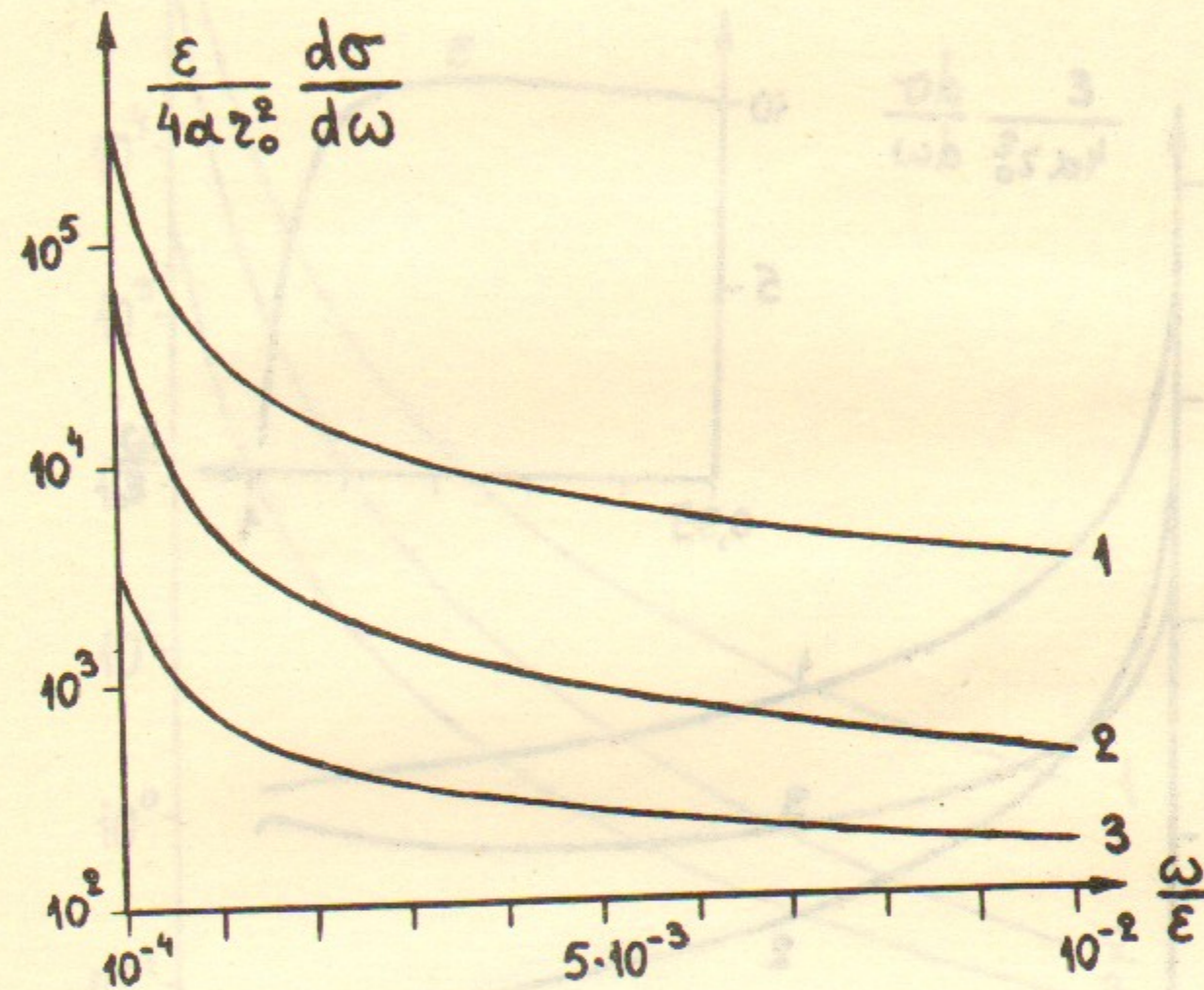


Рис.1. Зависимость спектральных распределений $(\frac{\epsilon}{4\alpha z_0^2}) \cdot (d\sigma/d\omega)$ от отношения ω/ϵ (ω - частота фотона, ϵ - энергия электрона) для $d\sigma_0$ (1), $-d\sigma_H$ (2) и $d\sigma_P$ (3) при $\epsilon = 3,5$ ГэВ., $H = 10^4$ Гс., $l_c = 5$ см.

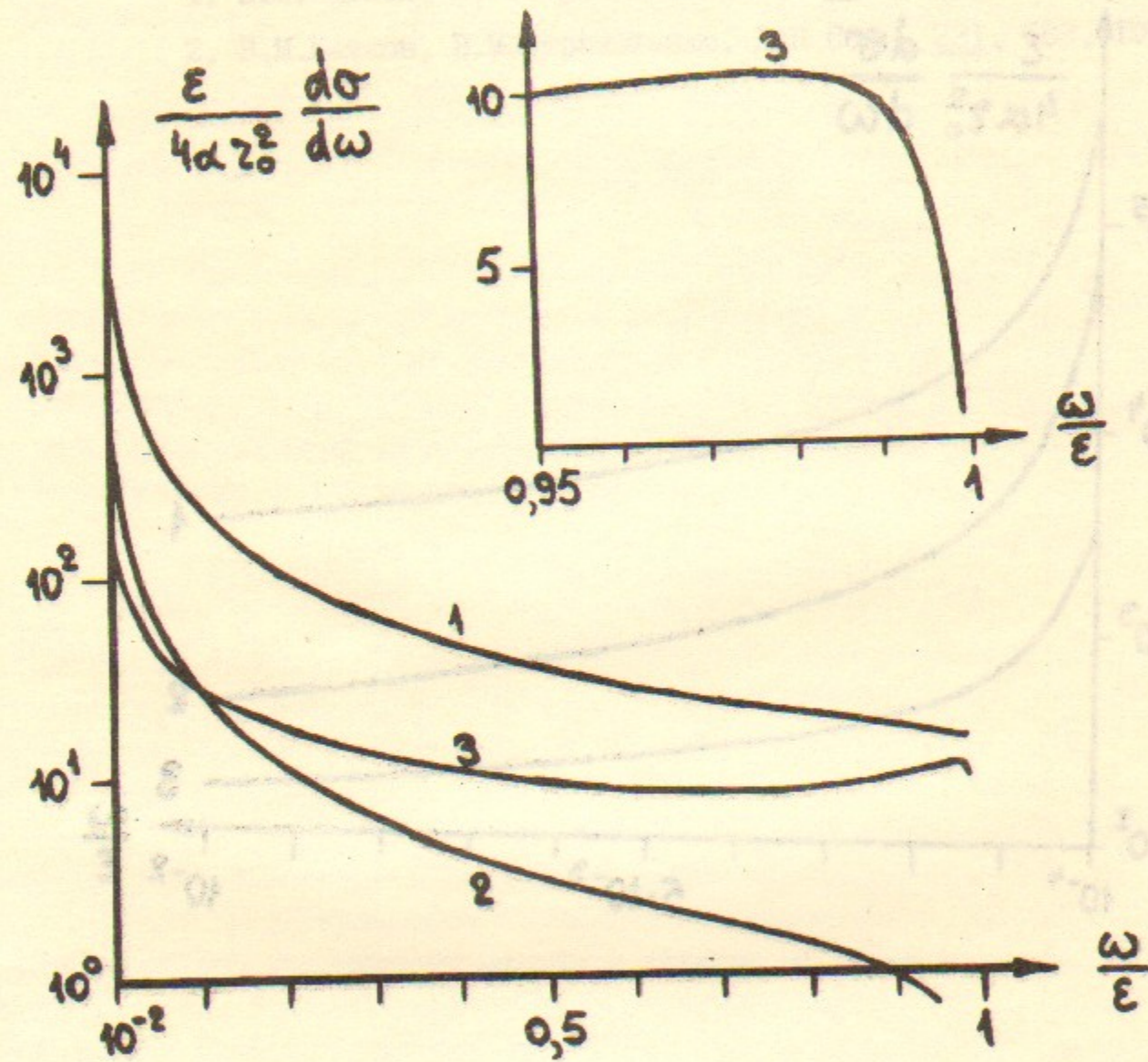


Рис.2. То же, что на рисунке I для значений ω/ϵ в интервале $0,01+1$.

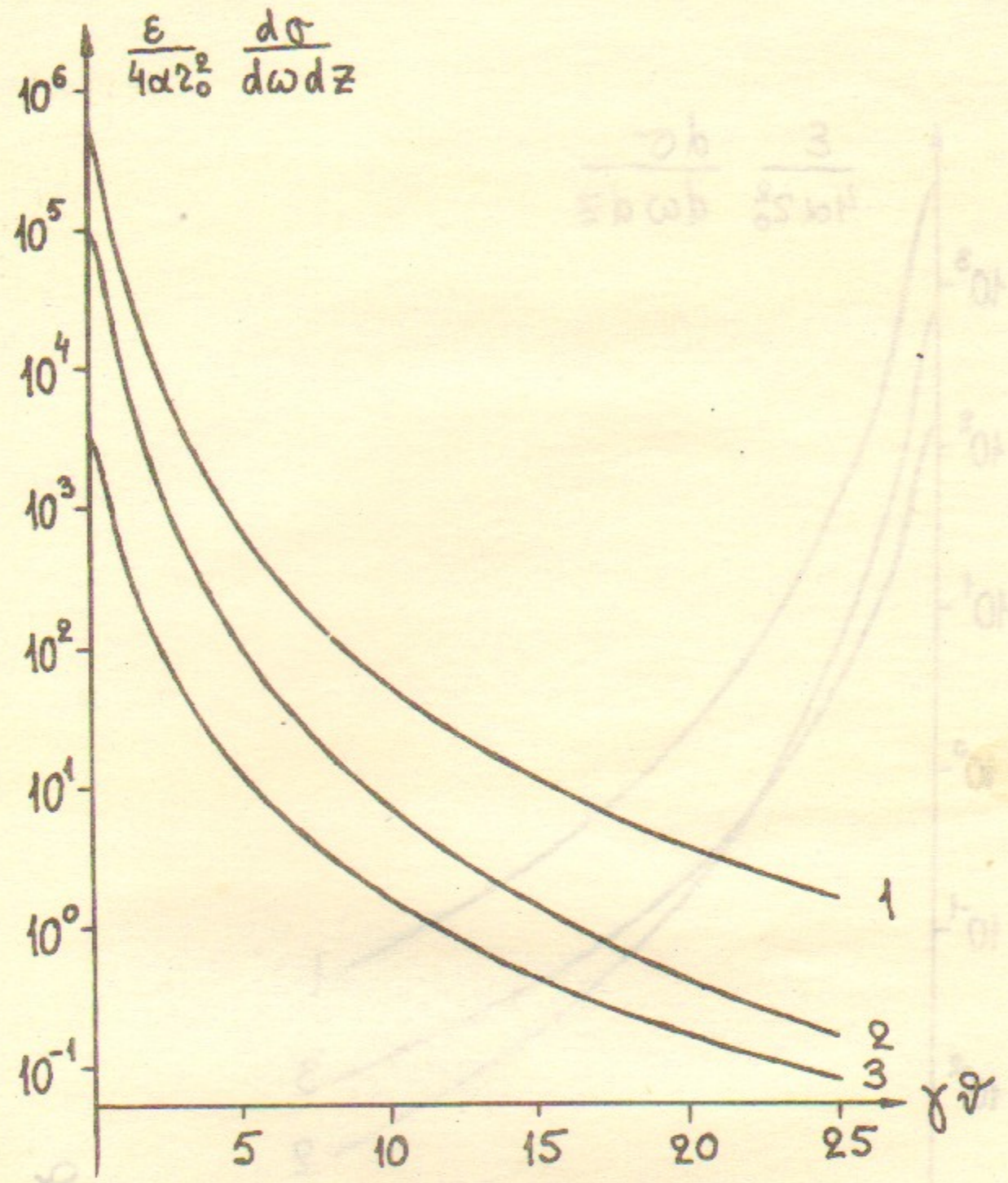


Рис.3. Зависимость распределений $(\epsilon/4\alpha z_0^2)(d\sigma/d\omega dz)$ от переменной $\gamma\bar{v}$ (\bar{v} - угол вылета фотона, $\gamma = \epsilon/m$, $\bar{v} = 1 + (\gamma\bar{v})^2$) для $d\sigma_0$ (1), $-d\sigma_n$ (2) и $d\sigma_p$ (3) при $\epsilon = 3,5$ ГэВ., $H = 10^4$ Гс., $l_c = 5$ см., $\frac{\omega}{\epsilon} = 10^{-4}$.

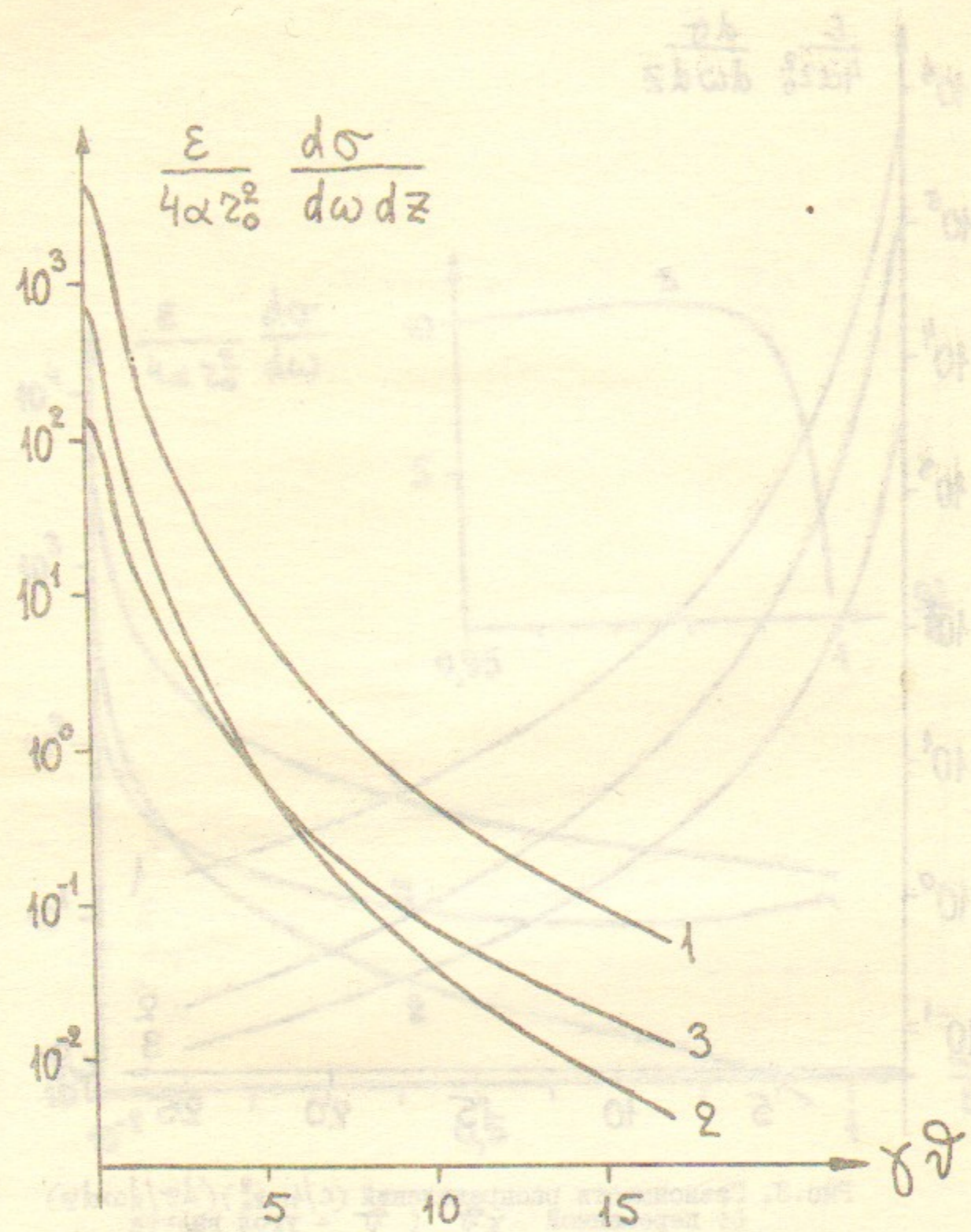


Рис.4. То же, что на рисунке 3 для $\omega/\varepsilon = 10^{-2}$.