

3.63

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ АН СССР 7

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

Н.И.Зиневич, М.М.Карлигер

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ

СИСТЕМЫ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

ПРЕПРИНТ 80-21



Новосибирск

Н.И.Зиневич, М.М.Карлинер

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ СИСТЕМЫ
ОСЦИЛЛЯТОРОВ

А Н Н О Т А Ц И Я

Приводится анализ стохастического охлаждения в модели, представляющей собой множество одномерных осцилляторов, находящихся в однородном силовом поле обратной связи. Входным сигналом для цепи обратной связи служит координата центра тяжести осцилляторов.

С помощью введенного в работе понятия генератора флуктуаций получено уравнение диффузии, описывающее при определенных условиях стохастическое охлаждение системы осцилляторов. Вычислен декремент затухания. Анализ может быть распространен на реальные системы стохастического охлаждения продольного и поперечного импульсов в накопителях тяжелых частиц.

Введение

Простейшая теория стохастического охлаждения пучков тяжелых частиц, не обладающих радиационным затуханием, была дана в первоначальной работе Ван-дер-Меера [1]. При анализе Ван-дер-Меер предполагал наличие полного перемешивания за один оборот, отсутствие перемешивания между пикапом и дефлектором, а также не учитывал шумы усилителя обратной связи. В развитой позднее Хирвурдом теории [2] были учтены шумы усилителя и показана возможность стохастического охлаждения в условиях, когда шумы усилителя превышают сигнал от пучка. Однако Хирвурд по-прежнему исходил из полного перемешивания за один оборот, которое в реальных условиях далеко не всегда имеет место.

Дербенев и Хейфец, решая более общую задачу о стохастическом охлаждении при неполном перемешивании [3], находят декремент стохастического охлаждения как разность между "одно-частичным" декрементом (то есть декрементом затухания колебаний одной частицы) и инкрементом "нагрева" данной частицы колебаниями других частиц при взаимодействии через цепь обратной связи. Так как при наличии обратной связи колебания частиц оказываются коррелированными между собой, то для расчета нагрева авторы вводят в кинетическое уравнение "столкновительный" член, учитывающий двухчастичные корреляции. Но при учете лишь двухчастичных корреляций результаты расчета, строго говоря, справедливы лишь при одночастичных декрементах, меньших $\frac{\Delta\omega}{N}$ - среднего расстояния по частоте между соседними частицами ($\Delta\omega$ - разброс частот, N - число частиц в пучке). Это ограничение не позволяет исследовать зависимость декремента стохастического охлаждения от коэффициента усиления в цепи обратной связи во всем диапазоне возможных значений последнего. В работе [4] приведена формула для декремента стохастического охлаждения при неполном перемешивании, полученная из первоначальной формулы Хирвурда путем пропорционального увеличения "нагревающего" члена. Так как при этом не учитываются действие обратной связи на уровень флуктуаций пучка и междучастичные корреляции, то эта формула вызывает сомнения.

В данной работе показано, как может быть получено более общее решение задачи о стохастическом охлаждении, без ограничения двухчастичными корреляциями. Рассматривается модель, представляющая собой множество одномерных осцилляторов, находящихся в силовом поле, которое может быть создано, в частности, цепью обратной связи. Входным сигналом для цепи обратной связи служит положение центра тяжести системы осцилляторов. Такая модель может быть представлена уравнением Власова для одночастичной функции плотности, которая, однако, описывает множество осцилляторов в приближении непрерывной среды и, следовательно, не учитывает флуктуаций. Для получения решения необходимо адекватным образом включить в уравнение Власова флуктуации. С этой целью в работе введено понятие генератора флуктуаций (флуктуатора). Показано, что с помощью флуктуатора удается получить уравнение диффузии, причем коэффициент диффузии при определенных условиях оказывается отрицательным, что соответствует стохастическому охлаждению.

Для более ясного изложения принципиальной стороны вопроса из рассмотрения исключены технические особенности, связанные с реализацией конкретных систем стохастического охлаждения продольного импульса в накопителях тяжелых частиц. Эти особенности могут быть учтены общепринятыми способами. Анализ конкретных систем стохастического охлаждения на основе предлагаемой методики будет дан в последующих работах.

1. Модель и ее свойства

Как уже упоминалось во введении, исследуемая модель представляет собой множество одномерных нелинейных осцилляторов без затухания, колеблющихся относительно начала координат. Осцилляторы находятся в однородном силовом поле, которое может на них воздействовать с частотой, близкой к резонансу, и таким образом изменять амплитуду колебаний осцилляторов. В дальнейшем предполагается, что задача может решаться в квазилинейном приближении, что нелинейность осцилляторов проявляется лишь в зависимости их собственной частоты от амплитуды колебаний, а форму колебаний с достаточной точностью можно считать синусоидальной.

Предполагается также, что силовое поле создается цепью обратной связи, для которой входным сигналом является положение центра тяжести множества осцилляторов. Кольцо обратной связи

замыкается, таким образом, через центр тяжести осцилляторов. В отсутствие обратной связи вследствие разброса частот центр тяжести совершает флуктуационное движение. При включении обратной связи на осцилляторы и, следовательно, на их центр тяжести воздействует сила, коррелированная с флуктуациями центра тяжести. При правильно выбранных фазовых соотношениях в цепи обратной связи осцилляторы, в среднем, совершают работу, передавая свою энергию силовому полю, что вызывает уменьшение средней энергии осцилляторов. Это явление и представляет собой стохастическое охлаждение.

В работе [5] показано, что центр тяжести множества осцилляторов ведет себя как нелинейный осциллятор с затуханием, которое определяется разбросом частот осцилляторов. Флуктуации положения центра тяжести также определяются разбросом частот.

Так как именно движение центра тяжести входит в цепь обратной связи, остановимся более подробно на свойствах центра тяжести.

Уравнения колебаний отдельных осцилляторов запишем в виде:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{p}_x = eE - \varphi(x), \quad (1)$$

где x , p_x — координата и импульс, m — масса, $\varphi(x)$ — нелинейная восстанавливающая сила, $E = E(t)$ — электрическое поле, действующее на осциллятор (не зависящее, по предположению, от x). Уравнения (1) являются каноническими с гамильтонианом

$$H = H_0(x, p_x) - \int eE dx,$$

где $H_0(x, p_x)$ — невозмущенный гамильтониан. При переходе к каноническим переменным "действие-угол" ψ, J невозмущенный гамильтониан зависит лишь от J . Уравнения движения в этих переменных имеют вид [6]:

$$\dot{J} = eE \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = \Omega(J) - eE \frac{\partial x}{\partial J}, \quad (2)$$

где $\Omega(J) = \frac{\partial H_0}{\partial J}$ — частота нелинейных колебаний. Формулы перехода в квазилинейном приближении имеют вид:

$$x = \sqrt{\frac{2J}{m\Omega}} \sin \psi, \quad p_x = \sqrt{2m\Omega J} \cos \psi. \quad (3)$$

Дальнейшее изложение следует работе [5]. Множество осцилляторов будем описывать одночастичной функцией распределения $f(\psi, J, t)$ с нормировкой

$$\int f(\psi, J, t) d\psi dJ = 1. \quad (4)$$

Периодическая по ψ функция распределения может быть представлена в виде разложения

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(\bar{c}, t) \cdot e^{in\psi}. \quad (5)$$

Координата центра тяжести определяется интегралом

$$x_c = \int x \cdot f(\psi, J, t) d\psi dJ. \quad (6)$$

Подставляя сюда разложение (5) и пользуясь выражением (3) для χ , получим

$$x_c = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2J}{m\Omega}} \cdot (f_1 - f_{-1}) dJ. \quad (7)$$

Как показано в [5], предполагая возмущение малым и осцилляторы не взаимодействующими непосредственно между собой (то есть, помимо цепи обратной связи), с помощью уравнения Власова можно получить следующую замкнутую систему дифференциальных уравнений для f_0, f_1, f_{-1} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{eE}{\sqrt{2m\Omega}} \frac{\partial}{\partial J} [\sqrt{J}(f_1 + f_{-1})] &= 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + i\Omega f_1 + \frac{1}{2} eE \sqrt{\frac{2J}{m\Omega}} \frac{\partial f_0}{\partial J} &= 0, \\ \frac{\partial f_{-1}}{\partial t} - i\Omega f_{-1} + \frac{1}{2} eE \sqrt{\frac{2J}{m\Omega}} \frac{\partial f_0}{\partial J} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Как видно из уравнений (8), функции $f_{\pm 1}$ являются малыми того же порядка, что и возмущение E , в то время, как скорость изменения f_0 - второго порядка малости относительно возмущения. Поэтому во втором и третьем уравнениях $\frac{\partial f_0}{\partial J}$ при вычислении $f_{\pm 1}$ можно считать не зависящей от времени. Решения для $f_{\pm 1}$, тождественно равные нулю при $t = 0$, имеют вид

$$f_{\pm 1}(J, t) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2J}{m\Omega}} \int_0^t e \cdot E(t-\tau) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J} \cdot e^{\mp i\Omega\tau} d\tau. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получим

$$x_c = -\frac{2\pi e}{m\Omega} \int_0^{\infty} J \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J} \int_0^t E(t-\tau) \cdot \sin\Omega\tau \cdot d\tau. \quad (10)$$

Подвергнув преобразованию Лапласа (10), найдем, пользуясь теоремой о преобразовании Лапласа свертки [7]:

$$x_c(s) = -\frac{2\pi e}{m} \cdot E(s) \int_0^{\infty} J \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J} \cdot \frac{dJ}{s^2 + \Omega^2} \quad (11)$$

Этот результат может быть записан в виде

$$x_c(s) = e \cdot \eta(s) \cdot E(s), \quad (12)$$

где

$$\eta(s) = -\frac{2\pi}{m} \int_0^{\infty} J \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J} \cdot \frac{dJ}{s^2 + \Omega^2} \quad (13)$$

- восприимчивость центра тяжести.

Восприимчивость центра тяжести к гармоническому полю с частотой ω может быть найдена, если в (13) заменить s на $i\omega + \epsilon$ и перейти к пределу $\epsilon \rightarrow +0$ [5]:

$$\eta(i\omega) = \frac{2\pi}{m} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{J \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J}}{\omega^2 - \Omega^2} dJ + \frac{i\pi\omega}{|\omega|} \int_0^{\infty} J \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J} \cdot \delta(\omega^2 - \Omega^2) dJ \right\}. \quad (14)$$

Если приближенно

$$\Omega^2 \cong \Omega_0^2 (1 + \xi J), \quad (15)$$

то восприимчивость может быть записана также в следующем виде

$$\eta(i\omega) = \frac{2\pi}{m} \left\{ \frac{1}{\xi} \int_0^{\infty} \frac{J \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J}}{J_\omega - J} dJ + i\pi \frac{\omega}{|\omega|} \frac{\varepsilon(J_\omega)}{|\xi|} \cdot J_\omega \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J} \Big|_{J=J_\omega} \right\}. \quad (16)$$

Здесь

$$J_\omega = \frac{\omega^2 - \Omega_0^2}{\xi \Omega_0^2} \quad (17)$$

а $\varepsilon(x)$ - функция Хевисайда:

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Как следует из (14) или (16), восприимчивость центра тяжести содержит не равную нулю мнимую часть, ответственную за диссипацию. Диссипация имеет место благодаря резонансным частицам, изменяющим свою энергию при воздействии гармонического поля.

2. Флуктуации центра тяжести множества осцилляторов

Флуктуации положения центра тяжести играют определяющую роль в явлении стохастического охлаждения. Поэтому в данном разделе мы рассмотрим свойства этих флуктуаций.

Координата центра тяжести определяется простым соотношением

$$x_c = \frac{1}{N} \sum_i x_i. \quad (18)$$

В предположении отсутствия непосредственного взаимодействия и при выключенном силовом поле колебания отдельных осцилляторов независимы. Найдем при этих условиях спектральную плотность флуктуаций координаты центра тяжести. Для этого вычислим вна-

чале ее автокорреляционную функцию

$$\langle x_c(t) \cdot x_c(t+\tau) \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{i,k} \langle x_i(t) \cdot x_k(t+\tau) \rangle. \quad (19)$$

Переходя к переменным "действие-угол" J, ψ , получим

$$\langle x_c(t) \cdot x_c(t+\tau) \rangle = \frac{2}{mN^2} \sum_{i,k} \sqrt{\frac{J_i J_k}{\Omega_i \Omega_k}} \langle \sin \psi_i \cdot \sin(\psi_k + \Omega_k \tau) \rangle.$$

Вследствие независимости фаз отдельных осцилляторов

$$\langle \sin \psi_i \cdot \sin(\psi_k + \Omega_k \tau) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos \Omega_i \tau & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Поэтому

$$\langle x_c(t) \cdot x_c(t+\tau) \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_i \frac{J_i}{m \Omega_i} \cos \Omega_i \tau.$$

Заменяя суммирование интегрированием с учетом функции распределения $f_0(J)$, получим

$$\langle x_c(t) \cdot x_c(t+\tau) \rangle = \frac{2\pi}{Nm} \int_0^{\infty} \frac{J}{\Omega} \cdot f_0(J) \cdot \cos \Omega \tau \cdot dJ \quad (20)$$

Теперь можно найти спектральную плотность

$$S_c(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \langle x_c(t) \cdot x_c(t+\tau) \rangle \cos \omega \tau \cdot d\tau. \quad (21)$$

Подставляя сюда выражение для автокорреляционной функции (20) и учитывая, что [7]:

$$\int_0^{\infty} \cos \omega \tau \cdot \cos \Omega \tau \cdot d\tau = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)],$$

найдем

$$S_c(\omega) = \frac{\pi}{Nm\omega} \left[J \cdot f_0(J) \right]_{\Omega=\omega} \cdot \left| \frac{dJ}{d\Omega} \right|_{\Omega=\omega}. \quad (22)$$

Пусть, например, зависимость Ω от J выражается соотношением (15). Тогда для спектральной плотности получим

$$S_c(\omega) = \frac{2\pi}{Nm} \cdot \frac{\omega^2 - \Omega_0^2}{\xi \cdot |\xi| \Omega_0^4} \cdot f_0\left(\frac{\omega^2 - \Omega_0^2}{\xi \Omega_0^2}\right). \quad (23)$$

причем подразумевается, что $f_0 \equiv 0$ при отрицательном аргументе.

Рассмотренные выше флуктуации центра тяжести являются следствием дискретности множества осцилляторов, и поэтому они пока никак не связаны с уравнениями (8), описывающими изменение функции распределения. Тем не менее, флуктуации можно ввести в уравнения (8), если воспользоваться соотношениями (9) и (10).

С этой целью введем фиктивное случайное поле $E_F(t)$ такое,

чтобы его действие вызывало движение центра тяжести, эквивалентное флуктуационному движению. Соотношения (9) и (10) позволяют рассчитать характеристики флуктуаций по известному случайному полю $E_F(t)$. Возможен и обратный расчет характеристик поля

$E_F(t)$ по найденным выше характеристикам флуктуаций центра тяжести. Назовем фиктивное случайное поле $E_F(t)$, определяемое как указано выше, генератором флуктуаций или, для краткости, флуктуатором. Мы не будем строго доказывать существование флуктуатора. Заметим лишь, что аналогичным приемом введения генератора флуктуаций с успехом пользуются в радиотехнике (см., например, [8]).

Для определения спектральной плотности флуктуатора можно воспользоваться известным свойством линейного преобразования случайных процессов [7], согласно которому

$$S_c(\omega) = e^2 \cdot |\eta_0(i\omega)|^2 \cdot S_F(\omega)$$

где $S_c(\omega)$ — спектральная плотность флуктуаций центра тяжести, определяемая (23), $S_F(\omega)$ — спектральная плотность флуктуатора,

$\eta_0(i\omega)$ — восприимчивость центра тяжести (14) при отсутствии взаимодействия между осцилляторами. Из этого соотношения находится спектральная плотность флуктуатора

$$S_F(\omega) = \frac{S_c(\omega)}{e^2 \cdot |\eta_0(i\omega)|^2}. \quad (24)$$

Теперь мы можем рассматривать произвольное движение центра тяжести множества осцилляторов как результат совместного действия флуктуатора и внешнего силового поля, то есть будем полагать

$$f_{\pm 1}(J, t) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2J}{m\Omega}} \cdot \int_0^t e^{[E(t-\tau) + E_F(t-\tau)]} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J} e^{\mp \Omega \tau} d\tau, \quad (25)$$

$$x_c = -\frac{2\pi e}{m\Omega} \int_0^{\infty} J \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J} dJ \int_0^t [E(t-\tau) + E_F(t-\tau)] \sin \Omega \tau d\tau. \quad (26)$$

В качестве примера применения понятия флуктуатора вычислим спектральную плотность флуктуаций центра тяжести при включенной цепи обратной связи.

Обращаясь к формуле (12) и включая в нее флуктуатор, получим

$$x_c(s) = e \cdot \eta(s) \cdot [E_{oc}(s) + E_F(s)], \quad (27)$$

где $E_{oc}(s)$ — поле, создаваемое цепью обратной связи. Пусть обратная связь описывается соотношением

$$E_{oc}(s) = e \cdot K(s) \cdot X_c(s). \quad (28)$$

Комбинируя (27) с (28), легко получить соотношения:

$$E_{oc}(s) = \frac{e^2 \cdot K(s) \cdot \eta(s)}{1 - e^2 \cdot \eta(s) \cdot K(s)} \cdot E_F(s), \quad (29)$$

$$E_{oc}(s) + E_F(s) = \frac{E_F(s)}{1 - e^2 \cdot \eta(s) \cdot K(s)}$$

и

$$X_c(s) = \frac{e \cdot \eta(s)}{1 - e^2 \cdot \eta(s) \cdot K(s)} \cdot E_F(s). \quad (30)$$

Пользуясь опять свойством линейного преобразования случайных процессов [7], находим

$$S_c(\omega) = \frac{e^2 \cdot |\eta(i\omega)|^2}{|1 - e^2 \cdot \eta(i\omega) \cdot K(i\omega)|^2} \cdot S_F(\omega). \quad (31)$$

Заметим, что функция восприимчивости $\eta(s)$, входящая в соотношение (27), не обязательно должна быть вычислена в предположении отсутствия непосредственного взаимодействия между осцилляторами. В ней может быть учтено коллективное взаимодействие осцилляторов, определяемое усредненной силой (как в уравнении Власова). В отличие от этого, в выражение (24) для спектральной плотности флуктуатора входят обязательно $S_c(\omega)$ и $\eta_0(i\omega)$, вычисленные при отсутствии взаимодействия между осцилляторами, так как флуктуатор определяется лишь дискретностью множества осцилляторов, без учета силового взаимодействия между ними.

Отсюда, в частности, следует возможность решения с использованием понятия флуктуатора задач о преобразовании шумов Шоттки вследствие коллективного взаимодействия между частицами.

3. Диффузия при наличии обратной связи с учетом флуктуаций. Стохастическое охлаждение

Для вывода уравнения, описывающего эволюцию функции распределения $f_0(J, t)$, будем исходить из первого уравнения (8). Следует прежде сделать некоторые замечания. Поле $E(t)$, входящее в первое из уравнений (8), есть внешнее поле, в котором находятся осцилляторы. Поле генератора флуктуаций в это поле

не входит. Функции же f_1 и f_{-1} должны включать в себя флуктуации центра тяжести. Поэтому они должны быть выражены согласно (25) через внешнее поле и флуктуатор. Подставляя (25) в первое из уравнений (8), получим следующее уравнение, предполагая, что внешнее поле создается цепью обратной связи

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{e^2}{m\Omega_0} \cdot E_{oc}(t) \cdot \frac{\partial}{\partial J} \left\{ J \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J} \int_0^t [E_{oc}(t-\tau) + E_F(t-\tau)] \cdot \cos \Omega \tau d\tau \right\} = 0. \quad (32)$$

Внося $E_{oc}(t)$ под знак интеграла и усредняя по ансамблю, получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{e^2}{m\Omega_0} \cdot \frac{\partial}{\partial J} \left\{ J \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J} \int_0^t [R_{oc}(\tau) + R_{Foc}(\tau)] \cos \Omega \tau d\tau \right\} = 0, \quad (33)$$

где

$$R_{oc}(\tau) = \langle E_{oc}(t) \cdot E_{oc}(t-\tau) \rangle \quad (34)$$

— автокорреляционная функция внешнего поля,

$$R_{Foc}(\tau) = \langle E_F(t-\tau) \cdot E_{oc}(t) \rangle \quad (35)$$

— взаимная корреляционная функция поля флуктуатора и внешнего поля. Функции $R_{oc}(\tau)$ и $R_{Foc}(\tau)$ убывают до нуля при $\tau > \frac{1}{\Delta\Omega}$. Так как функция $f_0(J, t)$ изменяется весьма медленно, то нас интересуют времена t существенно большие $1/\Delta\Omega$. Поэтому верхний предел интеграла в (33) может быть сделан бесконечным. Из полученного уравнения (33) видно, что если внешнее поле не зависит от флуктуатора (например, создается независимым генератором шума), то второе слагаемое под интегралом (33) исчезает, и эволюция $f_0(J, t)$ определяется только внешним полем.

Заметим, что

$$\int_0^{\infty} R_{oc}(\tau) \cdot \cos \Omega \tau d\tau = \pi \cdot S_{oc}(\Omega), \quad (36)$$

где $S_{oc}(\omega)$ — спектральная плотность внешнего поля. Можно показать, что

$$\int_0^{\infty} R_{Foc}(\tau) \cdot \cos \Omega \tau d\tau = \pi \cdot \operatorname{Re} S_{Foc}(i\Omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} S_{Foc}(i\omega)}{\Omega - \omega} d\omega, \quad (37)$$

где

$$S_{Foc}(i\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{Foc}(\tau) \cdot e^{-i\Omega\tau} d\tau \quad (38)$$

— взаимная спектральная плотность поля флуктуатора $E_F(t)$ и внешнего поля $E_{oc}(t)$. Подставляя (36) и (37) в (33), получаем уравнение

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{\pi e^2}{m\Omega_0} \cdot \frac{\partial}{\partial J} \left[J \cdot \frac{\partial f_0}{\partial J} \cdot S(\Omega) \right] = 0, \quad (39)$$

причем

$$S(\Omega) = S_{oc}(\Omega) + \operatorname{Re} S_{Foc}(i\Omega) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} S_{Foc}(i\omega)}{\Omega - \omega} d\omega, \quad (40)$$

причем $\Omega = \Omega(J)$ — функция J .

Уравнение (40) является уравнением типа Фоккера-Планка, аналогичное полученному в [5] для диффузии под действием ВЧ шумов. Оно описывает неоднородную диффузию с коэффициентом диффузии

$$\frac{\pi e^2}{m\Omega} \cdot S(\Omega). \quad (41)$$

Отличие от [5] состоит в том, что при определенных условиях коэффициент диффузии (41) может быть отрицательной величиной. В этом случае имеет место отрицательная диффузия, то есть сжатие распределения. Это явление и есть стохастическое охлаждение. Прежде, чем перейти к анализу полученных соотношений, отметим, что в случае независимой внешней силы коэффициент диффузии всегда положителен, так как в этом случае

$S_{Foc} \equiv 0$, а $S_{oc} > 0$, и лишь корреляция внешней силы с флуктуатором позволяет получить стохастическое охлаждение.

Если внешнее поле создается целью обратной связи, определяемой соотношением (28), то спектральная плотность поля обратной связи определяется с помощью (29):

$$S_{oc}(\omega) = \frac{e^2 \cdot |K(i\omega) \cdot \eta(i\omega)|^2}{|1 - e^2 \cdot \eta(i\omega) \cdot K(i\omega)|^2} \cdot S_F(\omega). \quad (42)$$

Взаимная спектральная плотность флуктуатора и поля обратной связи, связанных линейным соотношением (29), согласно [7] равна

$$S_{Foc}(i\omega) = \frac{e^2 \cdot K(i\omega) \cdot \eta(i\omega)}{1 - e^2 \cdot \eta(i\omega) \cdot K(i\omega)} \cdot S_F(\omega). \quad (43)$$

Подставляя (42) и (43) в (40), находим

$$S(\Omega) = \frac{e^2 \cdot \operatorname{Re}(\eta \cdot K)}{|1 - e^2 \cdot \eta \cdot K|^2} S_F + \frac{e^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(\eta K)}{|1 - e^2 \cdot \eta \cdot K|^2} \cdot \frac{S_F}{\Omega - \omega} d\omega. \quad (44)$$

Здесь η , K и S_F под интегралом — функции переменной интегрирования ω , а вне интеграла — функции частоты $\Omega = \Omega(J)$.

С помощью соотношения, полученного в [5], уравнения (39) и формулы (44) можно найти декремент затухания. Однако декремент может быть найден также и независимо от уравнения (39) более простым и физически наглядным способом.

С этой целью необходимо вычислить среднюю мощность, затрачиваемую полем обратной связи при воздействии на множество осцилляторов

$$P = \left\langle N \cdot e \cdot E_{oc} \cdot \frac{dx_c}{dt} \right\rangle. \quad (45)$$

Тогда нужный нам декремент может быть выражен через эту мощность

$$\delta = - \frac{1}{2\langle J \rangle} \cdot \frac{d\langle J \rangle}{dt} = - \frac{1}{2\langle J \rangle} \cdot \frac{P}{N\Omega_0}. \quad (46)$$

Учитывая, что

$$\langle J \rangle = m\Omega_0 \langle x^2 \rangle,$$

получаем из (45) и (46)

$$\delta = - \frac{e}{2m\Omega_0^2 \langle x^2 \rangle} \cdot \left\langle E_{oc} \cdot \frac{dx_c}{dt} \right\rangle. \quad (47)$$

Для вычисления среднего значения произведения поля обратной связи на скорость центра тяжести воспользуемся формулой (Н. 10) Приложения. Учитывая соотношения (29), а также то, что

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dx_c}{dt} \right\} = s \cdot x_c(s),$$

найдем декремент

$$\delta = - \frac{e^4}{m\Omega_0^2 \langle x^2 \rangle} \cdot \int_0^{\infty} \omega \cdot S_F(\omega) \cdot \frac{\operatorname{Im} K \cdot |\eta|^2}{|1 - e^2 \cdot \eta \cdot K|^2} d\omega. \quad (48)$$

В случае, когда непосредственным взаимодействием осцилляторов можно пренебречь, соотношение (24) позволяет упростить выражение для декремента

$$\delta = - \frac{e^2}{m\Omega_0^2 \langle x^2 \rangle} \int_0^{\infty} \omega \cdot S_c(\omega) \cdot \frac{\operatorname{Im} K}{|1 - e^2 \cdot \eta \cdot K|^2} d\omega. \quad (49)$$

Полученные выражения (48) и (49) для декремента затухания дают возможность сделать некоторые выводы относительно оптимальных условий стохастического охлаждения.

Прежде всего, знак декремента определяется знаком $\operatorname{Im} K(i\omega)$. Если $\operatorname{Im} K(i\omega) < 0$ во всей области частот, где $S_c(\omega) \neq 0$,

то декремент положителен, то-есть имеет место затухание. Условие $\text{Im} K(\omega) < 0$ обеспечивает, кстати, также когерентную устойчивость при монотонной функции распределения и $\frac{\partial f_0}{\partial J} < 0$.

При малом значении возвратного отношения

$$e^2 |\eta(i\omega) \cdot K(i\omega)|^2 \ll 1 \quad (50)$$

и при условии, что $K = \text{const}$ в области частот, где $S_c(\omega) \neq 0$, декремент (49) может быть вычислен приближенно

$$\delta \approx - \frac{e^2 \text{Im} K}{m \Omega_0^2 \langle x^2 \rangle} \cdot \int_0^\infty S_c(\omega) \cdot \omega \cdot d\omega.$$

Подставляя сюда выражение (23) для $S_c(\omega)$ и совершая обратную замену переменной $J = \frac{\omega^2 - \Omega_0^2}{\xi \Omega_0^2}$, получим

$$\delta = - \frac{e^2 \langle J \rangle}{2 N m^2 \Omega_0^2 \langle x^2 \rangle} \cdot \text{Im} K$$

и учитывая, что

$$\langle J \rangle = m \Omega_0^2 \langle x^2 \rangle,$$

окончательно получаем

$$\delta = - \frac{e^2}{2 N m \Omega_0} \cdot \text{Im} K. \quad (51)$$

Величина K пропорциональна числу осцилляторов N и коэффициенту передачи усилителя в цепи обратной связи. Поэтому декремент затухания (51) в приближении (50) не зависит от числа осцилляторов при прочих постоянных условиях.

Из (48) или (49) можно также сделать вывод о том, что наличие ненулевой вещественной части K сравнительно слабо влияет на величину декремента до тех пор, пока вещественная часть не превышает существенно мнимую часть K . Влияние вещественной части K в этом случае может сказываться в перераспределении коэффициента диффузии (44) по спектру частот. Если же вещественная часть K значительно больше мнимой, то это приводит к уменьшению декремента, как это следует из (48) или (49). Физической причиной этого является когерентный сдвиг частоты, препятствующий перемешиванию.

Из (48) и (49) можно еще усмотреть, что с ростом абсолютной величины $\text{Im} K$ имеет место максимум декремента затухания при некотором значении этой величины. Это следует из того, что $\text{Im} K$ входит в числитель линейно, а в знаменатель квадратично.

Анализ выражения (49) с помощью теории подобия показывает, что оптимальное значение $\text{Im} K$, так же, как и значение декремента, достигаемое при оптимуме, пропорционально нелинейному разбросу частот.

Оптимальное значение $\text{Im} K$ не зависит от числа осцилляторов N . Поэтому максимальное значение декремента затухания (49) обратно пропорционально числу осцилляторов, как это следует из выражения (23) для $S_c(\omega)$. Обратим внимание еще на то, что с увеличением N коэффициент передачи усилителя для достижения оптимума следует уменьшать.

Указанная зависимость декремента от разброса частот и числа осцилляторов, вообще говоря, имеет место лишь при отсутствии непосредственного взаимодействия осцилляторов между собой, когда справедливо упрощенное выражение (49) для декремента стохастического охлаждения.

Для определения условий затухания колебаний осцилляторов по всему спектру частот следует обратиться к анализу выражения (40) для коэффициента диффузии с учетом (42) и (43). Ввиду сложности этого анализа ограничимся лишь следующими нестрогими соображениями. Так как $S_c(\omega)$ и $|\eta|^2$ спадают к краям спектра, то из (24) можно сделать вывод, что $S_F(\omega)$ сравнительно мало меняется по спектру частот осцилляторов. Полагая в (42) и (43) $S_F(\omega) = \text{const}$, мы превращаем $S_{\text{Foc}}(i\omega)$ в причинную функцию, для которой справедливо соотношение [9]

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} S_{\text{Foc}}(i\omega)}{\Omega - \omega} d\omega = \text{Re} S_{\text{Foc}}(i\Omega). \quad (52)$$

Подставляя (52) в (40) и учитывая (42) и (43), находим

$$S(\Omega) = \frac{e^2 [2 \text{Re}(\eta K) - e^2 |\eta K|^2]}{|1 - e^2 \eta \cdot K|^2} S_F. \quad (53)$$

Если положить теперь $\text{Re} K \neq 0$, то

$$S(\Omega) = - \frac{e^2 [2 \text{Im} \eta \cdot \text{Im} K + e^2 |\eta K|^2]}{|1 - e^2 \eta \cdot K|^2} S_F. \quad (54)$$

Из (16) следует, что при монотонно убывающей функции $f_0(J)$ имеем $\text{Im} \eta < 0$,

поэтому условие $\text{Im} K < 0$ оказывается в этом случае достаточным и необходимым условием выполнения неравенства

$$S(\Omega) < 0 \quad (55)$$

по всему спектру частот. Итак, условия
 $\operatorname{Re} K = 0, \quad \operatorname{Im} K < 0$

обеспечивают затухание в каждой точке спектра частот осцилляторов.

4. Влияние шумов в цепи обратной связи

Учтем теперь шумы усилителя в цепи обратной связи. Эти шумы мы будем считать включенными на входе усилителя.

Напряженность поля обратной связи и координата центра тяжести вместо (29) будут выражаться теперь следующим образом

$$E_{oc}(s) = \frac{e^2 \eta(s) \cdot K(s)}{1 - e^2 \eta(s) \cdot K(s)} \cdot E_F(s) + \frac{K_{yc}(s)}{1 - e^2 \eta(s) \cdot K(s)} \cdot E_{ш}(s), \quad (56)$$

$$x_c(s) = \frac{e \cdot \eta(s)}{1 - e^2 \eta(s) \cdot K(s)} \cdot E_F(s) + \frac{e \cdot \eta(s) \cdot K_{yc}(s)}{1 - e^2 \eta(s) \cdot K(s)} \cdot E_{ш}(s),$$

где $E_{ш}(s)$ — шумовое поле, отнесенное ко входу усилителя, $K_{yc}(s)$ — коэффициент усиления усилителя обратной связи.

Декремент затухания по-прежнему может быть вычислен по формуле (47) с учетом того, что поле флукуатора E_F и шумовое поле $E_{ш}$ не коррелированы между собой. Пользуясь вновь соотношением (П.10) Приложения и (56) получим для декремента

$$\delta = \frac{e^2}{m\Omega_0^2 \langle x^2 \rangle} \int_0^\infty \frac{-S_c \cdot \operatorname{Im} K + S_{ш} \cdot \operatorname{Im} \eta \cdot |K_{yc}|^2}{|1 - e^2 \eta \cdot K|^2} d\omega, \quad (57)$$

где $S_{ш}(\omega)$ — спектральная плотность шумов.

Если функция распределения $f_0(j)$ — монотонно убывающая, то $\operatorname{Im} \eta(i\omega) < 0$ и добавка к декременту за счет шумов уменьшает декремент, как и следовало ожидать. Эта добавка зависит от коэффициента усиления K_{yc} квадратично, в отличие от основного члена, который зависит от усиления линейно. Поэтому, уменьшая усиление в цепи обратной связи, всегда можно сделать декремент положительным, как было показано еще в [2]. Максимальное значение декремента в этом случае будет, естественно, меньше, чем при отсутствии шумов. С ростом числа осцилляторов оптимальная величина усиления уменьшается, поэтому уменьшается и

действие шумов.

С учетом шумов усилителя выражение (54) приобретает шумовую добавку

$$S(\Omega) = \frac{-e^2 [2 \operatorname{Im} \eta \cdot \operatorname{Im} K + e^2 |\eta K|^2] S_F + |K_{yc}|^2 \cdot S_{ш}}{|1 - e^2 \eta \cdot K|^2}. \quad (58)$$

Так как шумовая добавка зависит от K_{yc} квадратично, а первое слагаемое — линейно, то уменьшением K_{yc} функцию $S(\Omega)$ можно сделать отрицательной во всем спектре частот и при наличии шумов (с потерей скорости затухания).

З а к л ю ч е н и е

Основное упрощение, принятое в предлагаемой работе при анализе стохастического охлаждения, состоит в предположении, что осцилляторы взаимодействуют с полем обратной связи непрерывно. В реальных системах стохастического охлаждения продольного и поперечного импульсов в накопителях тяжелых частиц взаимодействие происходит лишь в выделенных пространственных областях, где располагаются пикап-электроды и устройства силового воздействия на пучок. Вследствие этого появляется возможность взаимодействия не только на основной частоте колебаний, но и на комбинационных частотах. При анализе в формулах появляются разложения по азимутальным гармоникам, через которые выражаются основные результаты. Соответствующий математический аппарат хорошо известен (см., например, [6]), и анализ сравнительно просто может быть доведен до результата.

Заметим еще, что в данной работе рассматривается обратная связь лишь по координате центра тяжести, хотя легко было бы распространить анализ на случай обратной связи по скорости центра тяжести, а также по линейной комбинации координаты центра тяжести и его скорости.

Вычисление корреляции двух случайных процессов

Пусть x, y - случайные процессы, связанные с случайным процессом z линейными соотношениями, так что для изображений по Лапласу

$$x(s) = K_x(s) \cdot z(s), \quad y(s) = K_y(s) \cdot z(s). \quad (\text{П.1})$$

Вычислим $\langle xy \rangle$ - взаимную корреляцию процессов x и y . С этой целью обозначим

$$\varphi_x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K_x(s)\}, \quad \varphi_y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K_y(s)\} \quad (\text{П.2})$$

- реакции x и y - систем на импульс в виде дельта-функции.

Тогда

$$x(t) = \int_0^t z(t-\tau_1) \cdot \varphi_x(\tau_1) d\tau_1; \quad y(t) = \int_0^t z(t-\tau_2) \cdot \varphi_y(\tau_2) d\tau_2 \quad (\text{П.3})$$

и

$$xy = \int_0^t \int_0^t z(t-\tau_1) \cdot z(t-\tau_2) \cdot \varphi_x(\tau_1) \cdot \varphi_y(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (\text{П.4})$$

Усреднение (по ансамблю) дает

$$\langle xy \rangle = \int_0^t \int_0^t \langle z(t-\tau_1) \cdot z(t-\tau_2) \rangle \varphi_x(\tau_1) \cdot \varphi_y(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (\text{П.5})$$

Пусть z - стационарный случайный процесс.

Тогда

$$\langle z(t-\tau_1) \cdot z(t-\tau_2) \rangle = R_z(\tau_1 - \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) \cdot e^{i\omega(\tau_1 - \tau_2)} d\omega, \quad (\text{П.6})$$

где $R_z(\tau_1 - \tau_2)$ - автокорреляционная функция случайного процесса z , а $S_z(\omega)$ - его спектральная плотность.

Подставляя (П.6) в (П.5), получим

$$\langle xy \rangle = \int_0^t \int_0^t R_z(\tau_1 - \tau_2) \cdot \varphi_x(\tau_1) \cdot \varphi_y(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (\text{П.7})$$

Предположим теперь, что системы x и y таковы, что функции $\varphi_x(t)$ и $\varphi_y(t)$, определенные равенствами (П.2), практически затухают за ограниченное время T . Тогда для моментов времени $t > T$ верхние пределы интегралов в (П.7) могут быть сделаны бесконечными.

Подставляя в (П.7) выражение автокорреляционной функции

$R_z(\tau_1 - \tau_2)$ через спектральную плотность (П.6), получим

$$\langle xy \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) d\omega \int_0^{\infty} \varphi_x(\tau_1) \cdot e^{i\omega\tau_1} d\tau_1 \cdot \int_0^{\infty} \varphi_y(\tau_2) e^{-i\omega\tau_2} d\tau_2. \quad (\text{П.8.})$$

Учитывая, что $K_x(s)$ и $K_y(s)$ - изображения функций $\varphi_x(t)$ и $\varphi_y(t)$, имеем

$$\int_0^{\infty} \varphi_x(\tau_1) \cdot e^{i\omega\tau_1} d\tau_1 = K_x(-i\omega), \quad \int_0^{\infty} \varphi_y(\tau_2) e^{-i\omega\tau_2} d\tau_2 = K_y(i\omega). \quad (\text{П.9.})$$

В результате искомая корреляция равна

$$\langle xy \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) \cdot K_x(-i\omega) \cdot K_y(i\omega) d\omega. \quad (\text{П.10})$$

Заменяя в (П.10) ω на $-\omega$, получим, учитывая четность функции $S_z(\omega)$,

$$\langle xy \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(\omega) \cdot K_x(i\omega) \cdot K_y(-i\omega) d\omega. \quad (\text{П.11.})$$

Л и т е р а т у р а

1. S. Van der Meer. Stochastic damping of betatron oscillations in the ISR, CERN/ISR-PO/72-31, Geneva, 1972.
2. H.G. Hereward. Statistical phenomena-theory. Erice lectures, CERN 77-13, Geneva, 1977.
3. Я.С. Дербенев, С.А. Хейфец. К теории стохастического охлаждения. ИЯФ 77-88, Новосибирск, 1977.
4. F. Sacherer. Stochastic cooling-theory. CERN-ISR-TH/78-11, Geneva, 1978.
5. Н.И. Зиневич, М.М. Карлинер. Расплывание сгустка протонов в накопительном кольце под действием ВЧ шумов. ИЯФ 79-76. Новосибирск, 1979.
6. М.М. Карлинер. Когерентные неустойчивости пучка в электронных накопителях вследствие электромагнитного взаимодействия с окружающей структурой. ИЯФ 74-105, ИЯФ 74-106, ИЯФ 74 - - 107, Новосибирск, 1974.
7. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. Наука, М., 1968.
8. А. Ван дер Зил. Шум: источники, описание, измерение. Советское радио., М., 1973.
9. Х.М. Нуссенцвейг. Причинность и дисперсионные соотношения. Мир, М., 1976.

Работа поступила - 17 декабря 1979 г.

Ответственный за выпуск - С.Г. ПОПОВ
Подписано к печати 16.1-1980г. МН 06037
Усл. 1,4 печ.л., 1,0 учетно-изд.л.
Тираж 180 экз. Бесплатно
Заказ № 21.

Отпечатано на ротапинтере ИЯФ СО АН СССР