57

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Я.С.Гринберг, В.Г.Зелевинский

О ВИХРЕВЫХ РЕШЕНИЯХ В КВАНТОВОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

ПРЕПРИНТ ИЯФ 79-75

Новосибирск

О ВИХРЕВЫХ РЕШЕНИЯХ В КВАНТОВОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Я.С.Гринберг, В.Г.Зелевинский

А Н Н О Т А Ц И Я

Построен класс решений уравнений квантовой гидродинамики, описывающих поля скорости $v(x)$ и плотности $n(x)$, связанные соотношением $\mathrm{rot}\, v = n\Delta$, Δ – постоянный классический вектор. Найден спектр фононных возбуждений над таким основным состоянием, обладающий энергетической щелью и представляющий собой обобщение боголюбовского спектра бозе-жидкости.

О ВИХРЕВЫХ РЕШЕНИЯХ В КВАНТОВОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Я.С.Гринберг, В.Г.Зелевинский

Уравнения квантовой гидродинамики были сформулированы Л.Д.Ландау /I/ в терминах полевых операторов плотности $\rho(x) = mn(x)$ (m – масса частиц) и скорости $v(x)$. Квантование осуществляется с помощью перестановочных соотношений[I)]

$$[v_i(x), n(x')] = -\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(x-x') \qquad (I)$$

$$[v_i(x), v_j(x')] = \frac{i\hbar}{m}\varepsilon_{ijk}\frac{\mathrm{rot}_k v(x)}{n(x)}\delta(x-x') \qquad (2)$$

которые можно просто постулировать либо вывести через операторы, относящиеся к частицам жидкости, в конфигурационном пространстве /I/ или в представлении вторичного квантования /2/. В правой части (2) порядок операторов $\mathrm{rot}\, v$ и n не играет роли, поскольку в силу (I) они коммутируют; кроме того, $[n(x), n(x')] = 0$

В ряде работ (например, /3,4/) высказывались утверждения о внутренней противоречивости квантовой гидродинамики. Действительно, формально манипулируя равенствами (I), (2), можно построить состояния, на которых среднее значение $n(x)$ отрицательно и достигает сколь угодно большой величины. Однако эта трудность не является физической. В применении к реальной жидкости следует вспомнить, что гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{m}{2}\int d\vec{x}\, v(x)\, n(x)\, v(x) + W\{n\} \qquad (3)$$

I) В работе /I/ правая часть (I) приведена с неправильным знаком.

где функционал W зависит от плотности и ее пространственных производных. Так как жидкость состоит из частиц, W содержит квантовый член W_{kl},

$$W = W_{kl} + \overline{W} \qquad W_{kl} = \frac{\hbar^2}{8m}\int dx \frac{(\nabla n)^2}{n} \tag{4}$$

Слагаемое W_{kl}, аналогично центробежному барьеру в обычном радиальном уравнении Шредингера, не пускает систему в область $n(x)<0$. "Падение на центр" возможно лишь, если $\overline{W}$ обладает при $n \to 0$ более сильной сингулярностью. Таким образом, рост квантовых флуктуаций при $n \to 0$ предотвращает переход в нефизические состояния.

Интересуясь низколежащими возбуждениями в сверхтекучем ^4He (фононы и ротоны), Л.Д.Ландау рассматривал в /I/ лишь безвихревые движения, отмечая, что возможны и состояния вихревого типа, которые должны быть отделены щелью от основного состояния. Б.Т.Гейликман /2/, линеаризуя уравнения движения для слабых возбуждений над однородным фоном ($\vartheta^{(0)} = 0$, $n^{(0)} = const$), нашел боголюбовский фононный спектр /5/ и показал, что $rot\,\vartheta \neq 0$ возникает лишь в высших приближениях как результат ангармоничности фононов. Ниже мы построим определенный класс решений, для которых отличны от нуля как классическая (C - числовая), так и операторная части $rot\,\vartheta$.

Введем коммутирующий с $n(x)$ векторный оператор $\Delta(x)$ положив

$$rot\,\vartheta(x) = n(x)\Delta(x) \tag{5}$$

Используя (I) и (2), можно получить перестановочные соотношения операторов Δ_i со скоростями ϑ_j и между собой. Простейшие нетривиальные решения, совместимые с соотношениями (I,2,5), отвечают состояниям "вмороженного" вращения, когда Δ - постоянный C - числовой вектор, а величины ϑ и n не зависят от координаты z (ось z выбрана вдоль Δ).

Рассмотрим задачу о плоском движении в круговом цилиндре радиуса a с продольной осью z, когда $\vartheta_z(r)=0$

и

$$\left[\vartheta_x(r), \vartheta_y(r')\right] = \frac{i\hbar}{m}\Delta\,\delta(r-r') \tag{6}$$

где $r = (r, \varphi)$ - координаты в поперечной плоскости. На выбранном классе состояний операторные уравнения движения имеют вид ($i = x, y$)

$$\left[\vartheta_i(r), H\right] = -\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{m\vartheta^2(r)}{2} + \frac{\delta W}{\delta n(r)}\right\} + i\hbar\Delta\,\varepsilon_{ijz}\frac{1}{2}\left[n(r), \vartheta_j(r)\right]_+ \tag{7}$$

где $[\dots,\dots]_+$ означает антикоммутатор, а $n(r)$ следует выразить через $\vartheta(r)$ согласно (5).

Будем искать решения системы (6,7) типа малых колебаний около основного состояния, характеризующегося классическими полями скорости $\vartheta^0(r)$ и плотности $n^0(r) \equiv \Delta^{-1} rot\,\vartheta^0(r)$. Ограничиваясь аксиально симметричными полями $\vartheta^0_\varphi(r) \equiv u(r)$, $\vartheta^0_r(r) = 0$, $n^0(r) \equiv \nu(r)$, получаем из (7) уравнения для средних, выражающее баланс сил.

$$\frac{mu^2}{r} = \frac{d}{dr}\left(\frac{\delta W}{\delta n}\right)_{n=\nu(r)} \tag{8}$$

причем в данной геометрии

$$\frac{du}{dr} = -\frac{u}{r} + \Delta\,\nu(r) \tag{9}$$

Из уравнения (9) вытекает общий вид поля скоростей ($K = const$)

$$u(r) = \frac{1}{r}\left[K + \Delta\int_0^r dr' r' \nu(r')\right] = \frac{1}{r}\left[K + \frac{\Delta}{2\pi}N(r)\right] \tag{10}$$

$N(r)$ - число частиц [2] внутри радиуса r, $0 < r \leq a$

---

2) Здесь и далее макроскопические величины берутся на единицу длины сосуда.

Выражение (9) представляет собой наложение поля вихревой линии с интенсивностью K и "твердотельного" вращения слоев с локальной угловой скоростью $\Omega(r) = \Delta\nu(r)/2$. Полный момент жидкости равен

$$L_z = m\int dr\, r\,\nu(r)\,u(r) \tag{II}$$

Исключая ν с помощью (9), можно выразить L_z через значение $u(a)$ скорости на границе сосуда

$$L_z = \pi a^2 m u^2(a)\Delta^{-1} = \frac{\pi m}{\Delta}\left(K + \frac{\Delta N}{2\pi}\right)^2, \quad \Delta \neq 0 \tag{I2}$$

$N = N(a)$ – полное число частиц. При $\Delta = 0$ из (I0) и (II) следует обычный результат $L_z = mKN$. Квантование момента согласно $L_z = N\hbar\ell$, где ℓ – целое число [3)], определяет возможные значения $K = K_\ell(\Delta)$ (в отсутствие Δ $K_\ell = \frac{\hbar}{m}\ell$).

Предположим для простоты, что функционал $\overline{W}\{n\}$ не содержит градиентов $n(r)$ и может быть разложен по степеням отклонений $n(r)$ от невозмущенной плотности n_0

$$\overline{W} = \overline{W}\{n_0\} + \frac{1}{2}m^2 g\int dr\,[n(r) - n_0]^2 \tag{I3}$$

Тогда уравнение (8) приобретает вид

$$\frac{mu^2}{r} = m^2 g\frac{d\nu}{dr} + \frac{\hbar^2}{8m}\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{\nu^2}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 - \frac{2}{\nu r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\nu}{dr}\right)\right\} \tag{I4}$$

Сжимаемость g определяет скорость звука $c = \sqrt{mgn_0}$. Удобно перейти к безразмерным переменным, выражая скорости в единицах c, энергии в единицах mc^2, расстояния в единицах $r_0 = \hbar/mc$, а плотности в единицах n_0. При этом в задаче остается лишь один параметр Δ (в обычных единицах $\Delta \to \frac{\hbar\Delta n_0}{mc^2}$). Для известных квантовых жидкостей масштабная

3) Мы считаем, что частицы жидкости – бозоны. Хотя формально алгебра (I,2) справедлива для любой статистики, в нормальной (несверхтекучей) ферми-жидкости из динамики нельзя исключить одночастичные возбуждения, подчиняющиеся принципу Паули.

единица r_0 отвечает атомным расстояниям, так что в макроскопическом капилляре $a \gg 1$. В то же время при разумных значениях угловых скоростей вращение является дозвуковым, $\Delta a < 1$ т.е. $\Delta \ll 1$.

В соответствии с (I0) уравнение (I4) допускает два типа решений с регулярным поведением плотности $\nu(r)$ на оси $r \to 0$. Для решения типа вихревой линии $K \neq 0$, при $r \to 0$ скорость $u \simeq K/r$, а плотность обращается в нуль $\nu(r) \to r^{2|K|} + O(r^{4|K|+2})$, причем ее поведение определяется квантовым членом (4). Поскольку Δ влияет лишь на высшие члены разложения плотности $\nu(r)$, радиус ствола вихря фактически не зависит от Δ и имеет величину порядка единицы (расстояние, на котором сравниваются вклады в энергию от сжимаемости и квантовых эффектов). Эти результаты для квантованных вихрей хорошо известны /6,7/; только на больших расстояниях они модифицируются вращением.

Далее нас будут интересовать решения второго типа, для которых вихревая особенность отсутствует, $K = 0$. В этом случае плотность и скорость, удовлетворяющие уравнениям (I4) и (I0), даются хорошо сходящимися рядами по степеням параметра $x = \nu_0\Delta^2 a^2$,

$$\nu(r) = \nu_0\left(1 + \frac{x}{8}\frac{r^2}{a^2} + \frac{x^2}{128}\frac{r^4}{a^4} + \dots\right), \tag{I5}$$

$$u(r) = \frac{1}{2}\nu_0\Delta r\left(1 + \frac{x}{16}\frac{r^2}{a^2} + \frac{x^2}{384}\frac{r^4}{a^4} + \dots\right)$$

Центральная плотность $\nu(0) \equiv \nu_0$ определяется сохранением числа частиц и связана с невозмущенным значением $\nu_a = \frac{2u(a)}{a\Delta} = 1$ посредством аналогичного ряда

$$\nu_0^{-1} = 1 + \frac{x}{16} + \frac{x^2}{384} + \dots \tag{I6}$$

Легко видеть, что для такого состояния вклады в энергию (на одну частицу) от кинетического члена и от сжимаемости имеют порядки величины $\Delta^2 a^2$ и $\Delta^4 a^4$ соответственно, в то время как квантовый член дает малый вклад $\sim \Delta^2$. Момент (I2) состояния равен $L_z = N\hbar\ell$, где $\ell \approx \Delta a^2/4$, т.е. $\ell \gg 1$ при $\Delta \sim 1/a$. При внешнем вращении сосуда с угловой скоростью Ω состояние с определенным значением Δ становится энергетически выгодным при критическом значении $\Omega_c(\Delta) = \frac{E(\Delta)-E(0)}{L_z(\Delta)} \approx \frac{\Delta}{4}$. Заметим, что для минимального значения $\Delta_{min} = \Delta(\ell=1) \approx 4/a^2$ имеем $\Omega_c^{min} \approx a^{-2}$, т.е. данный тип вращения квантовой жидкости может реализоваться при меньших (в $\ln a$ раз) угловых скоростях, чем рождение обычных квантованных вихрей. Однако вероятность возбуждения (например, случайными неоднородностями стенок /8/) здесь может быть существенно меньше, а наблюдение при $\Delta a \ll 1$ затруднено.

Построим теперь низколежащие возбужденные состояния, отвечающие малым колебаниям поперечных скоростей и плотности около классического решения (I5). Линеаризация исходных уравнений движения (7) в модели (I3) дает для операторов возбуждений $\hat{\vartheta}(r), \hat{n}(r)$ $(\hat{\vartheta} \equiv \vartheta - u,\ \hat{n} \equiv n - \nu)$

$$[\hat{\vartheta}, H] = -i\nabla(u\hat{\vartheta} + \hat{P}) + i(u\hat{n} + \hat{\vartheta}\nu)\times\Delta \tag{I7}$$

или в цилиндрических координатах

$$[\hat{\vartheta}_r, H] = -i\frac{\partial}{\partial r}(u\hat{\vartheta}_\varphi + \hat{P}) + i\Delta(\hat{\vartheta}_\varphi\nu + u\hat{n}) \tag{I8}$$

$$[\hat{\vartheta}_\varphi, H] = -\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(u\hat{\vartheta}_\varphi + \hat{P}) - i\Delta\hat{\vartheta}_r\nu$$

где введен оператор

$$\hat{P} = \hat{n} - \frac{1}{4}\left\{\nabla^2\left(\frac{\hat{n}}{\nu}\right) - \frac{\nabla\nu}{\nu}\cdot\nabla\left(\frac{\hat{n}}{\nu}\right)\right\} \tag{I9}$$

и, согласно (5),

$$\Delta\hat{n} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\hat{\vartheta}_\varphi) - \frac{\partial\hat{\vartheta}_r}{\partial\varphi}\right\} \tag{20}$$

Из этой системы следует уравнение непрерывности

$$[\hat{n}, H] = -i\frac{u}{r}\frac{\partial\hat{n}}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\nu\hat{\vartheta}_r) + i\nu\frac{\partial\hat{\vartheta}_\varphi}{\partial\varphi}\right\} \tag{2I}$$

Используя соотношение (9), нетрудно записать уравнения (I8) в симметричном виде

$$[\hat{\vartheta}_r, H] + i\frac{u}{r}\frac{\partial\hat{\vartheta}_r}{\partial\varphi} - 2i\frac{u}{r}\hat{\vartheta}_\varphi = -i\frac{\partial\hat{P}}{\partial r}$$

$$[\hat{\vartheta}_\varphi, H] + i\frac{u}{r}\frac{\partial\hat{\vartheta}_\varphi}{\partial\varphi} + i\Delta\nu\hat{\vartheta}_r = -\frac{i}{r}\frac{\partial\hat{P}}{\partial\varphi} \tag{22}$$

Вследствие азимутальной симметрии основного состояния элементарные бозе-возбуждения, являющиеся решением системы (20-22), должны обладать определенным моментом $L_z = \hbar\ell$. Раскладывая по операторам рождения и уничтожения $\hat{A}^+, \hat{A}$ имеем

$$\hat{\vartheta}_r(r) = \sum_\ell \frac{e^{i\ell\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\hat{\vartheta}_r^\ell(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sum_{\ell n} e^{i\ell\varphi}\left\{R_{\ell n}(r)\hat{A}_{\ell n} + R^*_{-\ell n}(r)\hat{A}^+_{-\ell n}\right\}$$

$$\hat{\vartheta}_\varphi(r) = \sum_\ell \frac{e^{i\ell\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\hat{\vartheta}_\varphi^\ell(r) = \frac{i}{\sqrt{4\pi}}\sum_{\ell n} e^{i\ell\varphi}\left\{\Phi_{\ell n}(r)\hat{A}_{\ell n} - \Phi^*_{-\ell n}(r)\hat{A}^+_{-\ell n}\right\} \tag{23}$$

$$\hat{n}(r) = \sum_\ell \frac{e^{i\ell\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\hat{n}^\ell(r) = \frac{i}{\sqrt{4\pi}}\sum_{\ell n} e^{i\ell\varphi}\left\{F_{\ell n}(r)\hat{A}_{\ell n} - F^*_{-\ell n}\hat{A}^+_{-\ell n}\right\}$$

Неизвестные радиальные матричные элементы $R_{\ell n}, \Phi_{\ell n}, F_{\ell n}$ удовлетворяют системе линейных уравнений ($E_{\ell n} > 0$ – энергия перехода с уничтожением кванта ℓn)

$$\left(E_{\ell n} - \ell\frac{u}{r}\right)R_{\ell n} + 2\frac{u}{r}\Phi_{\ell n} = \frac{dP_{\ell n}}{dr}$$

$$\left(E_{\ell n} - \ell\frac{u}{r}\right)\Phi_{\ell n} + \Delta\nu R_{\ell n} = \frac{\ell}{r}P_{\ell n} \tag{24}$$

$$\Delta F_{\ell n} = \frac{d\Phi_{\ell n}}{dr} + \frac{\Phi_{\ell n}}{r} - \frac{\ell}{r}R_{\ell n}$$

Величины $P_{\ell n}$ связаны с матричными элементами плотности:

$$P_{\ell n}(r) = F_{\ell n} - \frac{1}{4}\left\{\nabla_\ell^2\left(\frac{F_{\ell n}}{\nu}\right) - \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{dr}\frac{d}{dr}\left(\frac{F_{\ell n}}{\nu}\right)\right\} \tag{25}$$

$$\nabla_\ell^2 \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\ell^2}{r^2} \tag{26}$$

Таким образом, матричные элементы скоростей можно записать в виде

$$R_{\ell n}(r) = D^{-1}_{\ell n}\left(\mathcal{E}_{\ell n}\frac{dP_{\ell n}}{dr} - 2\frac{u}{r}\frac{\ell}{r}P_{\ell n}\right), \quad \Phi_{\ell n}(r) = D^{-1}_{\ell n}\left(\mathcal{E}_{\ell n}\frac{\ell}{r}P_{\ell n} - \Delta\nu\frac{dP_{\ell n}}{dr}\right) \qquad (27)$$

где $D_{\ell n}(r) = \mathcal{E}^2_{\ell n} - 2\Delta\nu\frac{u}{r}$, а $\mathcal{E}^{(r)}_{\ell n} = E_{\ell n} - \ell\frac{u}{r}$ имеет смысл энергии возбуждения в системе координат, вращающейся вместе со слоем $r = const$. Возвращаясь к определению F через R и Φ (см.(20)), получим дифференциальное уравнение для $F_{\ell n}(r)$

$$D_{\ell n}F_{\ell n} + \nu\nabla^2_\ell P_{\ell n} = -\frac{\ell^2}{r^2}\left(\nu - \frac{2u}{r\Delta}\right)P_{\ell n} + \mathcal{E}'_{\ell n}\frac{\ell}{r\Delta}P_{\ell n}$$
$$- \nu' P'_{\ell n} - \frac{D'_{\ell n}}{D_{\ell n}}\left(\mathcal{E}_{\ell n}\frac{\ell}{r}P_{\ell n} - \nu P'_{\ell n}\right); \qquad (28)$$

штрихом здесь и далее обозначена производная по r. Согласно (25), правая часть (28) представляет собой действующий на $F_{\ell n}$ дифференциальный оператор третьего порядка с коэффициентами, содержащими лишь малые члены рядов (I5). Поэтому можно решать (28) последовательными приближениями.

Ниже мы ограничимся нулевым порядком, в котором $\nu \simeq \nu_0 \approx 1$, $u/r \simeq \frac{\Delta}{2}$, $\mathcal{E}_{\ell n} \simeq E_{\ell n} - \frac{\ell\Delta}{2} = const$, и уравнение (28) сводится к

$$\left(\mathcal{E}^2_{\ell n} - \Delta^2 + \nabla^2_\ell - \frac{1}{4}\nabla^4_\ell\right)F^{(0)}_{\ell n} = 0 \qquad (29)$$

Решением (29), регулярным в начале координат, является суперпозиция цилиндрических функций

$$F^{(0)}_{\ell n}(r) = b^{(+)}_{\ell n} J_\ell(K^{(+)}_{\ell n}r) + b^{(-)}_{\ell n} I_\ell(K^{(-)}_{\ell n}r), \qquad (30)$$

где волновые числа $K^{(\pm)}_{\ell n}$ связаны с энергией $E_{\ell n}$ соотношением

$$\mathcal{E}^2_{\ell n} = \Delta^2 \pm K^{(\pm)2}_{\ell n} + \frac{1}{4}K^{(\pm)4}_{\ell n}, \qquad (3I)$$

или, отбирая нужные корни,

$$K^{(\pm)2}_{\ell n} = 2\left[\sqrt{1 + \mathcal{E}^2_{\ell n} - \Delta^2} \mp 1\right] \qquad (3I')$$

В этом же приближении, согласно (30), (3I) и (25),

$$P^{(0)}_{\ell n}(r) = \frac{1}{4}\left[b^{(+)}_{\ell n}K^{(-)2}_{\ell n}J_\ell(K^{(+)}_{\ell n}r) - b^{(-)}_{\ell n}K^{(+)2}_{\ell n}I_\ell(K^{(-)}_{\ell n}r)\right] \qquad (32)$$

Как видно из (3I), мы получили прямое обобщение боголюбовского спектра на случай (5) вмороженного вихревого движения. В фононном спектре поперечных колебаний появилась теперь малая щель, определяемая величиной $rot\,\vartheta$.

Коэффициенты $b^{(\pm)}_{\ell n}$ суперпозиции (30), а также спектр собственных значений $\mathcal{E}_{\ell n}$ определяются нормировкой решений и условиями на границе $r = a$. Естественными условиями для задачи о колебаниях на фоне классического решения с почти постоянной плотностью являются в нашем приближении условия равенства нулю на границе нормальных компонент скорости $R_{\ell n}$ и градиента плотности $F'_{\ell n}$ (более подробно граничные условия обсуждаются в работе /9/). Используя (25), (30) и (32), легко находим

$$b^{(+)}_{\ell n} = I'_\ell(K^{(-)}_{\ell n}a)\,C_{\ell n}, \quad b^{(-)}_{\ell n} = -J'_\ell(K^{(+)}_{\ell n}a)\,C_{\ell n} \qquad (33)$$

где $C_{\ell n}$ – нормировочная константа, а уравнение для квантованных значений энергии имеет вид

$$J'_\ell(K^{(+)}_{\ell n}a)I'_\ell(K^{(-)}_{\ell n}a)\left[K^{(+)2}_{\ell n} + K^{(-)2}_{\ell n}\right] -$$
$$- \Delta\frac{\ell}{a}\left[K^{(-)2}_{\ell n}J_\ell(K^{(+)}_{\ell n}a)I'_\ell(K^{(-)}_{\ell n}a) + K^{(+)2}_{\ell n}I_\ell(K^{(-)}_{\ell n}a)J'_\ell(K^{(+)}_{\ell n}a)\right] = 0 \qquad (34)$$

Поскольку из (3I') следует, что $K^{(-)2} - K^{(+)2} = 4$, то $K^{(-)} \geq 1$. Поэтому для макроскопического сосуда ($a \gg 1$) и $\ell < a$ можно в равенстве (34) заменить функции I_ℓ, I'_ℓ их асимптотикой, что дает

$$\mathcal{E}_{\ell n}K^{(-)}_{\ell n}\left[K^{(+)2}_{\ell n} + K^{(-)2}_{\ell n}\right]J'_\ell - \Delta\frac{\ell}{a}\left[K^{(-)3}_{\ell n}J_\ell + K^{(+)2}_{\ell n}J'_\ell\right] = 0 \qquad (35)$$

где функции $J'_\ell(z)$ и $J_\ell(z)$ берутся при значении аргумента $z = K^{(+)}_{\ell n}a$. В безвихревом случае ($\Delta = 0$) или для возбуждений с $\ell = 0$ дисперсионное уравнение (35) определяет обычный гидродинамический спектр $z = z^0_{ln}$, где $J_l'(z^0_{ln})=0$. Считая сдвиг δz_{ln} собственных значений малым, легко найти

$$\frac{\delta z_{ln}}{z^0_{ln}} \approx \frac{4a^2+(z^0_{ln})^2}{4a^2+2(z^0_{ln})^2}\left[\frac{x}{x+(z^0_{ln})^2+(z^0_{ln})^4/4a^2}\right]^{1/2}\frac{l}{l^2+(z^0_{ln})^2} \qquad (36)$$

где $x = \Delta^2 a^2$ – параметр, введенный ранее (см.(I5)). Это выражение справедливо в коротковолновой области, где $k^{(+)}k^{(-)} \sim 1$ $z^0 \sim a \sim l$ и $\delta z/z^0 \sim \Delta/l \ll 1$, а также в длинноволновом пределе $k^{(+)} \ll 1$, если l достаточно велико, $1 \ll l \sim k^{(+)}a \ll a$, тогда даже при $x \sim (z^0)^2$ $\delta z/z^0 \sim l^{-1} \ll 1$. Однако для возбуждений с малыми значениями квантовых чисел $l, n \sim 1$ и $\Delta \sim a^{-1}$ сдвиг корней велик, так что необходимо вернуться к общей формуле (34). При этом $\Delta \sim k^{(+)}$ и щель в спектре (3I) существенна.

Вычисление нормировочных констант удобнее всего провести с помощью вытекающих из (24) соотношений ортогональности,

$$\int_0^a r\,dr\left\{R^{(0)}_{ln'}R^{(0)}_{\pm ln} \pm \Phi^{(0)}_{ln'}\Phi^{(0)}_{\pm ln} \pm F^{(0)}_{ln'}P^{(0)}_{\pm ln}\right\} = \frac{1\pm 1}{2}\theta_{ln}\delta_{nn'} \qquad (37)$$

где величины θ_{ln} можно после несложных преобразований, использующих уравнения и граничные условия, выразить в виде

$$\theta_{ln} = -\frac{\Delta l}{D_{ln}\mathcal{E}_{ln}}\left[P^{(0)}_{ln}(a)\right]^2 + \frac{2\mathcal{E}^2_{ln}}{D_{ln}}\int_0^a r\,dr\,F^{(0)}_{ln}P^{(0)}_{ln} \qquad (38)$$

С другой стороны, из соотношений (37) и операторных разложений (23) следует, что

$$\hat{A}_{ln} = \frac{\sqrt{2}}{\theta_{ln}}\int_0^a r\,dr\left\{R^{(0)}_{ln}\hat{\upsilon}^l_r - i\,\Phi^{(0)}_{ln}\hat{\upsilon}^l_\varphi - i\,P^{(0)}_{ln}\hat{n}^l\right\} \qquad (39)$$

Требуя выполнения бозевских правил комутации $[\hat{A}_{ln}, \hat{A}^+_{l'n'}] = \delta_{ll'}\delta_{nn'}$ и пользуясь соотношениями (I), (6), получим в рассматриваемом приближении

$$\frac{4}{\theta^2_{ln}}\int_0^a r\,dr\left\{\Delta R^{(0)}_{ln}\Phi^{(0)}_{ln} + \mathcal{E}_{ln}\left[(R^{(0)}_{ln})^2 + (\Phi^{(0)}_{ln})^2\right]\right\} = 1 \qquad (40)$$

Наконец, явное вычисление интеграла в левой части (40) и сравнение с (38) дает условие нормировки

$$\theta_{ln} = 2\mathcal{E}_{ln} \qquad (4I)$$

(этот же результат можно получить и прямой диагонализацией линеаризованного гамильтониана).

Мы не будем полностью выписывать громоздкое выражение для C_{ln}, получающееся из (38) и (4I) после подстановки решений (30), (32). Приведем лишь результат для чисто гидродинамического спектра, точный при $l=0$. Здесь $b^{(-)}_{ln} \to 0$

$$\left(b^{(+)}_{ln}\right)^2 \approx 8D_{ln}\left\{k^{(-)2}_{ln}J^2_l(k^{(+)}_{ln}a)\left[\mathcal{E}_{ln}a^2\left(1-\frac{l^2}{k^{(+)2}_{ln}a^2}\right) - \frac{\Delta l\,k^{(+)2}_{ln}}{4\mathcal{E}^2_{ln}}\right]\right\}^{-1} \qquad (42)$$

Заметим, что, несмотря на наличие щели в спектре (3I), при переходе к бесконечной системе $(a \to \infty)$ мы получаем, как и должно быть из общих соображений, исчезновение взаимодействия с длинно-волновыми $(k^{(+)} \to 0)$ фононами: согласно (42), $b^{(+)}_{ln} \sim \sqrt{D_{ln}} \sim k^{(+)}_{ln}$. Как легко видеть, недиагональные матричные элементы плотности малы; при $\Delta \sim k^{(+)} \sim a^{-1}$

$$\langle ln|\hat{n}(r)|0\rangle \sim \left(\frac{k^{(+)}_{ln}}{N}\right)^{1/2}\frac{J_l(k^{(+)}_{ln}r)}{J_l(k^{(+)}_{ln}a)} \qquad (43)$$

что оправдывает сделанную линеаризацию.

Как видно из (3I), для фононных моментов $l>2$ формально допустимы возбуждения двух типов с энергиями $E^{\pm}_{ln} = \frac{l\Delta}{2} \pm \sqrt{\Delta^2 + k^{(+)2}_{ln} + \frac{1}{4}k^{(+)4}_{ln}}$. Это означает, что кориолисово взаимодействие $-l\Omega$ фонона настолько велико, что рождение такого фонона становится энергетически выгодным. Однако для этого угловая скорость должна быть достаточно большой, а именно, $\Delta > 2\left[\left(k^{(+)2}_{ln} + \frac{1}{4}k^{(+)4}_{ln}\right)/(l^2-4)\right]^{1/2}$. Легко видеть, что это отвечает сверхзвуковым скоростям вращения границы, $\Delta a/2 > 1$ а тогда использованное нами приближение несправедливо и пространственная неоднородность существенна. Ограничиваясь нулевым приближением, мы должны учитывать лишь ветвь спектра E^{+}_{ln}.

Вопрос об экспериментальных проявлениях такого "твердотельного" вращения квантовой жидкости требует особого рассмотрения. В частности, можно указать на возможную связь этого явления с эффектами /IO/, возникающими при течении $He\,\overline{II}$ в пористых стеклах с размерами пор $IO^{-6} - IO^{-7}$ см.

Авторы благодарны С.Т.Беляеву и А.И.Вайнштейну за полезные дискуссии.

Литература:

I. Л.Д.Ландау. ЖЭТФ, II, (I94I) 542.

2. Б.Т.Гейликман. ДАН СССР, 94, (I954) I99.

3. H. Fröhlich Physica, 34 (1967) 47

4. J.C. Garrison, H.L. Morrison, J. Wong Journ. Math. Phys. 11 (1970) 630

5. Н.Н.Боголюбов. Изв. АН СССР, сер. физ. II, (I947), 77.

6. В.Л.Гинзбург, Л.П.Питаевский. ЖЭТФ, 34, (I958) I24I.

7. E.L. Andronikashvili, Yu. G. Mamaladze Rev. Mod. Phys. 38 (1966) 567

8. S.J. Putterman, M. Kac, G.E. Uhlenbeck Phys. Rev. Lett. 29 (1972) 546

9. R.M. Ziff, G.E. Uhlenbeck, M. Kac. Phys. Rep. 32C (1977) 169

IO. K. Mendelson Phys. Soc. Cambr. Conf. Rep. (1947) p.35