ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

24

Б.Г.Конопельченко, В.Г.Мохначев

О МОДИФИКАЦИИ СХЕМЫ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ПРЕПРИНТ ИЯФ 79-35

Новосибирск

О МОДИФИКАЦИИ СХЕМЫ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б.Г.Конопельченко, В.Г.Мохначев

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что возможно последовательно сформулировать схему группового анализа дифференциальных уравнений таким образом, чтобы не рассматривать преобразований независимых переменных. Обсуждают вопросы, связанные с законами сохранения. Дается обобщение теоремы Нетер.

I. ВВЕДЕНИЕ

Основная задача группового анализа дифференциальных уравнений состоит в отыскании группы преобразований зависимых (полей) и независимых(координат) переменных, допускаемой уравнением и действующей на его решениях [I] .

Открытие нового класса симметрий-симметрий Ли-Бэклунда[2] дает возможность построить схему группового анализа таким образом, чтобы не рассматривать преобразований координат. Такая формулировка позволяет с одной стороны, единообразно трактовать различные типы групп симметрии [3] , с другой - автоматически исключать бессодержательные симметрии. (Бессодержательными мы будем называть симметрии присущие любому дифференциальному уравнению и потому никак не отражающие свойств конкретного уравнения). Следствием такого подхода является и упрощение ряда формул. Например, стандартные формулы продолжений [I] в этой схеме являются не более, чем известным фактом перестановочности вариаций формы поля с операцией дифференцирования по координатам.

Во втором разделе излагается классификация возможных симметрий дифференциальных уравнений.

Схема группового анализа, в которой координаты вообще не преобразуются строится в третьем разделе.

В четвертом разделе дается обобщение теоремы Э.Нетер.Показано,что действие всегда инвариантно относительно"координатной части" группы преобразований и поэтому существенна инвариантность действия только относительно группы преобразований <u>формы поля.</u>

В пятом разделе обсуждается ряд вопросов о связи симметрии с законами сохранения для нелагранжевых уравнений. Приводятся примеры нелокальных сохраняющихся величин.

П. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВОЗМОЖНЫЕ КЛАССЫ ИХ СИММЕТРИЙ

I. О продолжениях преобразований.

Пусть x^i ($i = 1,2,\dots, N$) - независимые переменные, а $u^k(x)$($k = 1,2,\dots ,M$) - набор функций от x^i . Предположим, что переменные x^i и функции $u^k(x)$ имеют следующие законы преобразований (достаточной гладкости по ϵ):

$$\begin{aligned} x^i &\to \tilde{x}^i(\epsilon) \\ u^k &\to \tilde{u}^k(\tilde{x};\epsilon) \end{aligned} \qquad (I)$$

здесь $\epsilon=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_\kappa)$ – групповой параметр. Преобразования (I) произвольны и потому всегда образуют группу. Удобно переписать (I) в инфинитезимальной форме:

$$\begin{aligned} x^i &\to \tilde{x}^i(\epsilon) = x^i + \epsilon\xi^i \\ u^k(x) &\to \tilde{u}^k(\tilde{x};\epsilon) = u^k(x) + \epsilon\eta^k \end{aligned} \qquad (2)$$

здесь, по предположению, $x^i = x^i(0)$, $u^k(x) = \tilde{u}^k(\tilde{x};0)$. Придерживаясь терминологии принятой в теории поля будем называть $\epsilon\xi^i$ и $\epsilon\eta^k$ <u>полными</u> вариациями соответствующих переменных. Преобразования (2) однозначно определяют закон преобразования и любой функции $\omega(x^i, u^k(x))$:

$$\omega(x^i, u^k(x)) \to \tilde{\omega}(\tilde{x}^i(\epsilon), \tilde{u}^k(\tilde{x};\epsilon)) = \omega(x^i, u^k(x)) + \epsilon\xi^{\omega} \qquad (3)$$

Другими словами, полные вариации $\epsilon\xi^i$ величин ω определяются через ξ^i и η^k. Преобразования (3) называют продолжением преобразований (2) на величины ω. Продолженные преобразования (3) определяются лишь требованием непротиворечивости их с преобразованиями (2). Подчеркнем, что совокупность всевозможных преобразований (2) и (3) <u>всегда</u> образует группу.

Совершенно аналогична ситуация с продолжением преобразований (2) на величины $u^k_{i_1\dots i_n}(x)$ $(n=1,2,\dots)$, если мы определяем их как частные производные от функций $u^k(x)$ по x^i. Преобразования производных однозначно определяются требованием непротиворечивости преобразований (2) и алгоритма вычисления производной:

$$u^k_{i_1\dots i_n}(x) \to \tilde{u}^k_{i_1\dots i_n}(\tilde{x};\epsilon) = u^k_{i_1\dots i_n}(x) + \epsilon\eta^k_{i_1\dots i_n}$$

Полные вариации производных $\epsilon\eta^k_{i_1\dots i_n}$ выражаются через ξ^i и η^k по известным формулам продолжений преобразований [I].

Понятно, что преобразования (2) однозначно определяют и, например, преобразование величин типа

$$u^{k s_1\dots s_m}_{i_1\dots i_n} \equiv \int u^k_{i_1\dots i_n}\, dx^{s_1}\dots dx^{s_m} \qquad [5]$$

Для кратности будем называть переменные x^i функции u^k и всевозможные вновь введенные величины, закон преобразования которых однозначно определяется непротиворечивостью алгоритма их построения и преобразований (2) просто <u>переменными</u>. Преобразования всех этих переменных всегда образуют группу. В дальнейшем будем ссылаться на эту группу как на группу преобразований (I), т.к. последние преобразования определяют и преобразование остальных переменных.

2. Классификация симметрий дифференциальных уравнений.

Под максимально широкой группой преобразований, допускаемой дифференциальным уравнением

$$\omega(x^i, u^k(x), u^k_i(x), \dots) = 0 \qquad (4)$$

следует понимать, по-видимому, ту <u>подгруппу</u> группы преобразований (I) в результате действия которой левая часть уравнения (4) переходит в некоторое выражение обращающееся в нуль на решениях исходного уравнения.

Очевидно, что широта искомой группы симметрии уравнения (4) определяется тем, зависимость от каких переменных в ξ^i и η^k мы допускаем (кроме, конечно, свойств самого дифференциального уравнения).

Исторически первой изучалась возможность: $\xi^i = \xi^i(x, u(x))$, $\eta^k = \eta^k(x, u(x))$. Этот класс симметрии будем называть <u>симметриями Ли–Овсянникова</u>.

Симметрии типа $\xi^i = \xi^i(x, u(x), u_i(x), \ldots)$, $\eta^k = \eta^k(x, u(x), u_i(x), \ldots)$ принято называть симметриями Ли-Бэклунда. (При M = I существует промежуточный класс-группы касательных преобразований С.Ли [I]).

Наиболее общая ситуация соответствует случаю, когда ξ^i и η^k могут зависеть от любых переменных, о которых упоминалось выше. Например, если ξ^i и η^k зависят и от нелокальных переменных типа $\int f(x, u, u_i, \ldots) dx^{s_1} \ldots dx^{s_m}$, то такие группы будем называть группами нелокальных преобразований [4] .

3. О "дифференциальных уравнениях".

С.Ли был предложен конструктивный метод отыскания возможных групп симметрии дифференциальных уравнений. Смысл его состоит в следующем. Снабдим переменные непротиворечивыми законами преобразований (индуцированными преобразованиями (2)), после чего объявляем все переменные независимыми. Генератор группы преобразований (I) обозначим через $\hat{X}$, т.е.

$$\hat{X} = \frac{d}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}$$

Условие инвариантности уравнения (4) относительно искомой группы преобразований дается соотношением:

$$\hat{X}\omega \doteq 0$$

где значок $\doteq$ здесь и в дальнейшем означает равенство на решениях уравнения $\omega = 0$.

После объявления всех переменных независимыми генератор $\hat{X}$ удобно записывать в виде:

$$\hat{X} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k} + \eta^k_i \frac{\partial}{\partial u^k_i} + \cdots$$

В случае групп нелокальных преобразований его можно представить в форме [4] :

$$\hat{X} = \int df\, \xi^f\, \partial_f\, (\quad)$$

Оператор полного дифференцирования, соответственно, имеют вид:

$$\mathcal{D}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u^k_i \frac{\partial}{\partial u^k} + u^k_{ij} \frac{\partial}{\partial u^k_j} + \ldots$$

и

$$\mathcal{D}_i = \int df\, f_i\, \partial_f\, (\quad)$$

В результате объявления всех переменных независимыми дифференциальное уравнение трактуется как алгебраическое уравнение, заданное в соответствующем образом продолженном пространстве [I] . Однако, для того чтобы не сузить при этом возможного класса симметрий возникает необходимость учитывать и всевозможные следствия исходного уравнения, рассматриваемые, конечно, также как алгебраические. Итак, в схеме Андерсона-Ибрагимова [5] "дифференциальное уравнение" есть бесконечная система:

$$\Omega = \begin{cases} \omega = 0 \\ \mathcal{D}_{i_1} \cdots \mathcal{D}_{i_n} \omega = 0 \end{cases}$$

$(n = 1, 2, \ldots ;\ i_1, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, N)$

В случае групп нелокальных преобразований:

$$\Omega = \begin{cases} \omega = 0 \\ \int \psi_{i_1 \ldots i_m} \mathcal{D}_{i_1} \cdots \mathcal{D}_{i_n} \omega\, dx^{s_1} \cdots dx^{s_m} = 0 \end{cases}$$

$(n, m = 1, 2, \ldots ;\ i_1, \ldots i_n, s_1, \ldots, s_m = 1, 2, \ldots, N)$

здесь $\psi_{i_1 \ldots i_m}$ - произвольные функции.

Условие инвариантности уравнения (4) относительно группы симметрии с генератором $\hat{X}$ можно тогда записать в виде:

$$\hat{X}\omega \Big|_{\Omega} = 0 \qquad (6)$$

Соотношение (6) означает, что равенство выполняется в силу всей системы Ω , что, конечно, эквивалентно условию (5) (при сужении на этот класс симметрий).

Понятно, что подмногообразие характеризующее дифференциальное уравнение в соответствующем образом продолженном пространстве задается всей системой Ω , а не только первой её строкой – самим дифференциальным уравнением.

III. МОДИФИЦИРОВАННАЯ СХЕМА ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. Схема группового анализа.

В работе [6] указано, что симметрии с генератором $\hat{X}_{(1)} = \xi^i \mathcal{D}_i$ существуют для любого дифференциального уравнения в классе симметрий Ли-Бэклунда. К бессодержательным симметриям относятся и симметрии с тензорными генераторами $\hat{X}_{(n)} = \xi^{i_1 \dots i_n} \mathcal{D}_{i_1} \cdots \mathcal{D}_{i_n}$. Построим схему группового анализа уравнений в которой симметрии этого вида автоматически отсутствуют.

Воспользуемся некоторыми результатами работы [4]. Имеет место формула:

$$\tilde{\mathcal{D}}_i = \mathcal{D}_i - \epsilon \xi^j_i \mathcal{D}_j \qquad (7)$$

здесь $\tilde{\mathcal{D}}_i$ – оператор полного дифференцирования по $\tilde{x}^i$, а $\xi^j_i \equiv \mathcal{D}_i \xi^j$. Как это принято в теории поля будем обозначать вариацию переменных $u^k(x)$ за счет формы (математически – за счет явной зависимости $\tilde{u}^k(\tilde{x};\epsilon)$ в соотношениях (I) от параметра ϵ) через $\epsilon \bar{\delta} u^k$. Вариацию переменных $u^k(x)$ за счет аргумента (математически – за счет зависимости $\tilde{u}^k(\tilde{x};\epsilon)$ от ϵ через посредство переменных $\tilde{x}^i$) обозначим через $\epsilon \bar{\bar{\delta}} u^k$ *). Другими словами:

$$\eta^k = \bar{\delta} u^k + \bar{\bar{\delta}} u^k \qquad (8)$$

Используя (7) и (8) вычислим $\tilde{\mathcal{D}}_i \tilde{u}^k$:

$$\tilde{\mathcal{D}}_i \tilde{u}^k = (\mathcal{D}_i - \epsilon \xi^j_i \mathcal{D}_j)(u^k + \epsilon \bar{\delta} u^k + \epsilon \bar{\bar{\delta}} u^k) =$$

$$= u^k_i + \epsilon \xi^j u^k_{ij} + \epsilon \mathcal{D}_i \bar{\delta} u^k$$

Но $\bar{\bar{\delta}} u^k_i = \xi^j u^k_{ij}$, а $\tilde{u}^k_i = u^k_i + \epsilon \bar{\delta} u^k_i + \epsilon \bar{\bar{\delta}} u^k_i$ отсюда получаем $\bar{\delta} u^k_i = \mathcal{D}_i \bar{\delta} u^k$. Совершенно аналогично получаем и:

*) Групповой параметр ϵ для наглядности выделен явно.

$$\bar{\delta} u^k_{i_1 \dots i_n} = \mathcal{D}_{i_1} \cdots \mathcal{D}_{i_n} \bar{\delta} u^k \qquad (9)$$

Пусть теперь переменные x^i не преобразуются, т.е. $\xi^i = 0$. Поскольку генератор преобразований $x^i \to \tilde{x}^i = x^i + \epsilon \xi^i$ есть $\hat{X}_{(1)} = \xi^i \mathcal{D}_i$, то положив $\xi^i = 0$ мы отбросим бессодержательную симметрию, связанную с этими преобразованиями. Более того, т.к. тензорное поле $\hat{X}_{(n)} = \xi^{i_1 \dots i_n} \mathcal{D}_{i_1} \cdots \mathcal{D}_{i_n}$ индуцировано векторным $\hat{X}_{(1)}$ в том смысле, что при $\xi^i = 0$ оператор $\mathcal{D}_i$ – нулевой, а поэтому и $\xi^{i_1 \dots i_n} \mathcal{D}_{i_1} \cdots \mathcal{D}_{i_n}$ тоже, то этим самым мы отбрасываем весь этот класс бессодержательных симметрий. При $\xi^i = 0$ имеем, очевидно, $\bar{\bar{\delta}} u^k_{i_1 \dots i_n} = 0$. В этом случае соотношения (9) являются аналогом известных формул продолжений, которые теперь очевидны и отражают факт перестановочности дифференцирований по x^i с вариацией формы функций $u^k(x)$.

2. "Генератор формы".

В произвольном генераторе $\hat{X}$ можно выделить три разные по смыслу составляющие

1) $\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ – генератор явных преобразований x^i,

2) $\bar{\bar{\delta}}$ – генератор изменения переменных $u^k_{i_1 \dots i_n}(x)$ за счет их зависимости от x^i,

3) $\hat{\bar{\delta}}$ – "генератор формы":

$$\hat{X} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \hat{\bar{\bar{\delta}}} + \hat{\bar{\delta}}$$

Легко понять, что $\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \hat{\bar{\bar{\delta}}} = \xi^i \mathcal{D}_i$ – "координатная" (бессодержательная) часть генератора $\hat{X}$.

"Генератор формы" $\hat{\bar{\delta}}$ представляет главную (содержательную) часть полного генератора $\hat{X}$ и имеет вид:

$$\hat{\bar{\delta}} = \bar{\delta} u^k \frac{\partial}{\partial u^k} + \bar{\delta} u^k_i \frac{\partial}{\partial u^k_i} + \dots \qquad (10)$$

Понятно, что $\hat{\bar{\delta}} x^i = 0$.

Задача отыскания содержательных симметрий – эта задача на совместимость возможных вариаций формы поля с уравнением:

$$\begin{cases} \hat{\delta}\,\omega = 0 \\ \Omega = 0 \end{cases}$$

3. Применение к нелокальным группам.

Построенный формализм переносится и на случай нелокальных групп преобразований. Именно, перестановочность интегрирования с вариацией формы поля приводит к следующим формулам продолжений:

$$\bar{\delta}\int u^k_{i_1\dots i_n}\,dx^{s_1}\dots dx^{s_m} = \int(\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n}\bar{\delta}u^k)\,dx^{s_1}\dots dx^{s_m} \qquad (\text{II})$$

Генератор группы симметрии имеет вид:

$$\hat{\bar{\delta}} = \int df\,\bar{\delta}f\,\partial_f(\quad) \qquad (\text{I2})$$

Формы (II) и (I2), по-существу, решают задачу, т.к. они позволяют найти продолжение преобразований (2) на любую нелокальную переменную [4].

IУ. О СВЯЗИ СИММЕТРИЙ С ЗАКОНАМИ СОХРАНЕНИЯ

I. Теорема Э.Нетер и её обобщения.

Теорема Э.Нетер, как известно [7], утверждает, что наличие группы преобразований, оставляющей действие инвариантным приводит к существованию сохраняющихся величин по числу параметров этой группы. Более того, при известной группе преобразований теоремой дается и рецепт построения этих сохраняющихся величин. Э.Нетер рассматривала следующее условие инвариантности действия:

$$\hat{X}L + \xi^i_{\,i}L = 0$$

В работе [8] было предложено обобщение теоремы Э.Нетер, смысл которого состоит в переходе на пространство решений уравнения (экстремалей соответствующей вариационной задачи):

$$\hat{X}L + \xi^i_{\,i}L \doteq 0$$

Дальнейшее обобщение теоремы Нетер было дано в работах [6,9]. В несколько модифицированной форме суть обобщения состоит в следующем. Пусть $L_{(0)}$ – лагранжиан для дифференциального уравнения $\omega = 0$, т.е. $\frac{\delta L_{(0)}}{\delta u} = f_0\,\omega$. По обычной теореме Э.Нетер "высших" сохраняющихся величин не получить. Пусть, однако, известны "высшие" лагранжианы $L_{(k)}$ $(k = 1, 2, \dots)$ такие, что

$$\frac{\delta L_{(k)}}{\delta u} = f_0\,\omega + \sum_{i=1}^{N} f_i\,\omega_i + \dots + \sum_{i_1\dots i_k=1}^{N} f_{i_1\dots i_k}\,\omega_{i_1\dots i_k}$$

где $f_0, f_i, \dots, f_{i_1\dots i_k}$ – некоторые функции и $\omega_{i_1\dots i_m}$ – дифференциальные следствия левой части уравнения $\omega = 0$. Требование инвариантности действий с этими $L_{(k)}$ как лагранжианами относительно группы Ли-Бэклунда приводит к стандартному выражению для сохраняющихся величин:

$$A^i_{(k)} = \bar{\delta}u^k\,\frac{\delta L_{(k)}}{\delta u^k_i} + \sum_{s=1}^{\infty}\bar{\delta}u^k_{i_1\dots i_s}\,\frac{\delta L_{(k)}}{\delta u^k_{i i_1\dots i_s}} - \xi^i L_{(k)} \qquad (\text{I3})$$

Величины $A^i_{(k)}$ при $k \geq 1$ и будут высшими интегралами движения для уравнения $\frac{\delta L_{(0)}}{\delta u} = 0$.

Заметим, что заменив требование инвариантности действия в этой теореме относительно группы Ли-Бэклунда на требование инвариантности относительно группы нелокальных преобразований мы, вообще говоря, увеличиваем свободу на функции $f_0, f_i, \dots, f_{i_1\dots i_k}$, что может привести к появлению дополнительных сохраняющихся величин (возможно и локальных!).

2. Обобщение теоремы Э.Нетер.

Допустим, что сам лагранжиан изменяется при групповых преобразованиях за счет формы:

$$x^i \to \tilde{x}^i(\epsilon)$$
$$u^k \to \tilde{u}^k(\tilde{x};\epsilon)$$
$$u^k_i \to \tilde{u}^k_i(\tilde{x};\epsilon)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_{(k)} \to \tilde{L}_{(k)}(\tilde{x}, \tilde{u}(\tilde{x};\epsilon), \ldots; \epsilon)$$

или в инфинитезимальной записи:

$$x^i \to \tilde{x}^i = x^i + \epsilon \xi^i$$
$$u^k \to \tilde{u}^k = u^k + \epsilon \bar{\delta} u^k + \epsilon \bar{\bar{\delta}} u^k$$
$$u^k_i \to \tilde{u}^k_i = u^k_i + \epsilon \bar{\delta} u^k_i + \epsilon \bar{\bar{\delta}} u^k_i \qquad (17)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_{(k)} \to \tilde{L}_{(k)} = L_{(k)} + \epsilon \bar{\Delta} L_{(k)} + \epsilon \bar{\bar{\Delta}} L_{(k)}$$

здесь $\bar{\bar{\Delta}} L_{(k)} = \hat{X} L_{(k)}$ – вариация лагранжиана за счет переменных от которых он зависит: $x^i, u^k, u^k_i, \ldots$; $\bar{\Delta} L_{(k)}$ – вариация формы лагранжиана.

Требование инвариантности действия относительно преобразований (17) приводит к условию:

$$\hat{X} L_{(k)} + \xi^i_{,i} L_{(k)} \doteq -\bar{\Delta} L_{(k)} \qquad (18)$$

Вариацию формы лагранжиана удобно представить в виде:

$$\bar{\Delta} L_{(k)} = \mathcal{D}_i B^i_{(k)} + \Phi_{(k)}$$

Имеем следующее обобщение теоремы Э.Нетер: Пусть известен набор лагранжианов $L_{(k)}$ (при $k \geq 1$ – "высшие" лагранжианы). Требование инвариантности действий с этими лагранжианами относительно группы нелокальных преобразований (17) и при условии, что $\Phi_k \doteq 0$ приводит к набору сохраняющихся величин по числу

параметров группы инвариантности действий. Компоненты сохраняющихся векторов находятся по стандартной формуле:

$$A^i_{(k)} = \bar{\delta} u^k \frac{\delta L_{(k)}}{\delta u^k} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{\delta} u^k_{i_1\ldots i_s} \frac{\delta L_{(k)}}{\delta u^k_{i i_1 \ldots i_s}} - B^i_{(k)} - \xi^i L_{(k)} \qquad (19)$$

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от стандартного.

Отметим, что соотношение (19) можно тождественно преобразовать к виду:

$$A^i_{(k)} = \bar{\delta} u^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{D}_{i_1} \cdots \mathcal{D}_{i_n} \frac{\delta L_{(k)}}{\delta u^k_{i i_1 \ldots i_n}} - B^i_{(k)} -$$
$$- \xi^i L_{(k)} + \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{D}_{k_1} \cdots \mathcal{D}_{k_s} \left[\bar{\delta} u^k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{D}_{j_1} \cdots \mathcal{D}_{j_n} \frac{\delta L_{(k)}}{\delta u^k_{i k_1 \ldots k_s j_1 \ldots j_n}} \right] \qquad (20)$$

3. Теорема Э.Нетер в безкоординатной интерпретации.

Покажем, что условие инвариантности действия в форме (18) позволяет вообще не рассматривать преобразований переменных x^i. Преобразуем соотношение (18) с учетом того, что $\hat{X} = \xi^i \mathcal{D}_i + \hat{\bar{\delta}}$. Имеем:

$$\xi^i \mathcal{D}_i L_{(k)} + \xi^i_{,i} L_{(k)} + \hat{\delta} L_{(k)} \doteq -\mathcal{D}_i B^i_{(k)} - \Phi_{(k)}$$

Обозначив $\tilde{B}^i_{(k)} = B^i_{(k)} + \xi^i L_{(k)}$, получаем

$$\hat{\delta} L_{(k)} \doteq -\mathcal{D}_i \tilde{B}^i_{(k)} - \Phi_{(k)} \qquad (21)$$

Соотношение (21) позволяет положить $\xi^i = 0$.

Обобщенную теорему Э.Нетер можно сформулировать поэтому следующим образом:

Если условие инвариантности действий (21) с "высшими" лагранжианами выполняется относительно группы нелокальных преобразований формы поля, причем $\Phi_{(k)} \doteq 0$, то по числу параметров группы инвариантности действий имеем набор сохраняющихся (вообще говоря, нелокальных) величин. Компоненты сохраняющихся векторов вычисляются при этом по формуле:

$$A^i_{(k)} = \bar\delta u^k \frac{\delta L_{(k)}}{\delta u^k_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar\delta u^k_{i_1\dots i_n} \frac{\delta L_{(k)}}{\delta u^k_{i_1\dots i_n i}} + \tilde{B}^i_{(k)} \qquad (22)$$

Замечательной особенностью лагранжевых уравнений, как легко видеть, является то, что после выделения из оператора $\hat{\bar\delta}$ выражения в виде дивергенции оставшаяся часть пропорциональна самому уравнению.

У. О КОНСТРУИРОВАНИИ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ

I. Аналог теоремы Э.Нетер для нелагранжевых уравнений.

Известно, что для некоторых уравнений существуют лагранжианы пропорциональные самому уравнению: $L_{(o)} = f_o \omega$. С другой стороны, симметрии уравнений $\omega = 0$ и $f_o\omega = 0$, конечно, совпадают, т.е. из $\hat{X}\omega \doteq 0$ следует и $\hat{X}(f_o\omega) = (\hat{X} f_o)\omega + f_o \hat{X}\omega \doteq 0$, или $\hat{X}(f_o\omega) \doteq 0$. Эти два замечания позволяют усмотреть в соотношении (2I) возможность его обобщения на нелагранжевы уравнения, а именно

$$\hat{\bar\delta}\omega \doteq \Upsilon \mathcal{D}_i B^i + \Phi \qquad (23)$$

Равенство(23), по-видимому, наиболее общее соотношение устанавливающее связь симметрии с законами сохранения. И не опирающееся на вариационные принципы. При преобразованиях симметрии имеем:

$$\hat{\bar\delta}\omega = \dots + f_{-i}\int \psi_i \,\omega\, dx^i + f_o\omega + f_i\,\omega_i + \dots$$

и, если $\Phi \doteq 0$, но $\Upsilon \not\doteq 0$ тогда имеем $\mathcal{D}_i B^i \doteq 0$, т.е. B^i - компоненты сохраняющегося вектора. В отличие от лагранжевых уравнений использование соотношения (23) связано с подбором функций Φ и Υ. Тем не менее мы покажем, что формула (23) все же не бесполезна.

2. Рассмотрим в качестве примера уравнение $u_{xt} + u = 0$ ж). Легко видеть, что $\hat{\bar\delta}$ с $\bar\delta u = u, u_x, u_{xx}, \dots$ будет генератором симметрии (переход к дифференциальным следствием уравнения, но содержательная симметрия!). Соответствующие ненулевые локальные сохраняющиеся величины получаем из следующих соотношений:

I) $\bar\delta u = u$: $\hat{\bar\delta}(u_{xt} + u) = \frac{1}{2u_x}\left[\partial_t(u_x^2) + \partial_x(u^2)\right]$

2) $\bar\delta u = u_x$: $\hat{\bar\delta}(u_{xt} + u) = \frac{1}{2u_{xx}}\left[\partial_t(u_{xx}^2) + \partial_x(u_x^2)\right]$

и т.д.

Пусть теперь $\bar\delta u = \int u\,dx$, $\iint u\,dx\,dx, \dots$ Получим:

I) $\hat{\bar\delta}(u_{xt} + u) = \frac{1}{2u}\left[\partial_t(u^2) + \partial_x\left(\int u\,dx\right)^2\right]$

2) $\hat{\bar\delta}(u_{xt} + u) = \frac{1}{2\int u\,dx}\left[\partial_t\left(\int u\,dx\right)^2 + \partial_x\left(\iint u\,dx\,dx\right)^2\right]$

и т.д.

Отметим, что при $\bar\delta u = \int u\,dx$ имеем нелокальные преобразования, но физически сохраняющаяся величина является локальной. Этот пример подтверждает предположение о том, что переход к нелокальным группам симметрии может дать дополнительные локальные сохраняющиеся величины. В случаях $\bar\delta u = \int u\,dx\,dx$, $\int u\,dx\,dx\,dx, \dots$ получим уже существенно нелокальные величины. Подчеркнем, что $\mathcal{D}_i B^i \doteq 0$ в случаях нелокальных преобразований выполняется в силу интегральных следствий уравнения, например:

$$\frac{1}{2u}\left[\partial_t(u^2) + \partial_x\left(\int u\,dx\right)^2\right] = \int (u_{xt} + u)\,dx \doteq 0$$

ж) Лагранжевость этого уравнения мы нигде не используем.

Интересно отметить, что сохраняющиеся величины для уравнения $u_{xt}+u=0$ (и для любого лагранжевого линейного дифференциального уравнения) как локальные так и нелокальные можно получить по формуле (22). Это возможно потому, что нелокальные лагранжианы устроены весьма специально:

$$L_{(0)}=\frac{1}{2}\left[u_x u_t-u^2\right] \qquad \left(\text{или}\quad L_{(0)}=\frac{1}{2}\left[u u_{xt}+u^2\right]\right)$$

$$L_{(-1)}=\frac{1}{2}\left[u\int u_t\,dx-\left(\int u\,dx\right)^2\right]$$

$$L_{(-2)}=\frac{1}{2}\left[\left(\int u\,dx\right)\left(\int u_t\,dx\,dx\right)-\left(\int u\,dx\,dx\right)^2\right]$$

и т.д.

Легко видеть, что $L_{(-k)}$ зависят только от переменных вида $u^{j_1\ldots j_m}_{i_1\ldots i_n}=\int u_{i_1\ldots i_n}\,dx^{j_1}\ldots dx^{j_m}$, причем, различные переменные входят только в виде произведений. В этом случае можно построить обобщение оператора Эйлер: на случай нелокальных лагранжианов:

$$\frac{\delta L_{(k)}}{\delta u^k}\equiv\sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{\infty}(-1)^{n+m}\int D_{i_1}\ldots D_{i_n}\frac{\partial L_{(k)}}{\partial u^{kj_1\ldots j_m}_{i_1\ldots i_n}}\,dx^{j_1}\ldots dx^{j_m}$$

Здесь, как обычно, переменные $u^{kj_1\ldots j_m}_{i_1\ldots i_n}$ с несовпадающими индексами считаются независимыми.

УI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что возможен такой подход к групповому анализу дифференциальных уравнений и законам сохранения, в котором преобразованием подвергаются только зависимые переменные.

Получено обобщение теоремы Э.Нетер. Сделаем, однако, замечание, что для <u>практического</u> использования приведенной теоремы нужно знание всех $L_{(k)}$ или рекурентной формулы для получения "высших" лагранжианов по известному лагранжиану $L_{(0)}$. Вполне интегрируемые уравнения, по-видимому, выделены среди остальных как раз тем, что они имеют бесконечно много "высших" лагранжианов. Имея ввиду теорему Э.Нетер можно подойти к этому вопросу

следующим образом. Действия с лагранжианами $L_{(k)}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ можно считать интегральными инвариантами. Группа же инвариантности действия (или уравнения) определяется конечнопараметрической "классической" группой G_n. Полная же группа устроена по типу $G_{n\infty}$ [I0]. Возникает задача по известной группе G_n построить полный набор интегральных инвариантов относительно группы $G_{n\infty}$.

Литература

I. Л.В.Овсянников, "Групповой анализ дифференциальных уравнений" Наука, 1978.
2. R.L. Anderson, S. Kumei, C.E. Wulfman, Ph. Rev. Lett. 28, 988 (1972)
3. Б.Г.Конопельченко, ЯФ, 27, 826, (1978).
4. B.G. Konopelchenko, V.G. Mokhnachev preprint ИЯФ 78-96 (1978); ЯФ (в печати)
5. Н.Х.Ибрагимов, Р.Л.Андерсон, ДАН СССР, 227, 539 (1976).
6. Н.Х.Ибрагимов, ДАН СССР, 230, 26, (1976).
7. "Вариационные принципы", ред. Л.С.Полак, М., 1959.
8. Н.Х.Ибрагимов, ТМФ, I, 350 (1969).
9. N.H. Ibragimov, Lett. Math. Ph. 1, 423, (1977)
IO. Б.Г.Конопельченко, ЯФ, 26, 658 (1977).

Работа поступила - IO мая 1979 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати I7.У-1979 г. МН 06302
Усл. I,0 печ.л., 0,9 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 35.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР