

П.20

д.г. Физ. 8

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СО АН СССР

А.З.Паташинский, Б.И.Шумило

**ТЕОРИЯ РЕЛАКСАЦИИ  
МЕТАСТАБИЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ**

БИБЛИОТЕКА  
Института ядерной  
физики СО АН СССР  
ИНВ. № \_\_\_\_\_

ПРЕПРИНТ ИЯФ 79 - 11

Новосибирск

A THEORY OF THE NUCLEATION

A.Z.Patashinsky, B.I.Shumilo

A b s t r a c t

A theory of relaxation of the metastable state in the neighborhood of the critical point is proposed. The nucleation is described as the order parameter field relaxation. The order parameter field  $\varphi$  relaxes to the equilibrium through quasi-static configurations which are nuclei of a new phase. Solutions (16, 29) obtained for weakly fluctuating systems describe nucleation in cases of the unconserving (2) and conserving (1) field  $\varphi$ , correspondingly. Quantities  $\xi_l$  are spherical harmonics of the effective radius of a nucleus. Their change is a random process due to the random force  $\mathcal{V}$ . It is shown that a strong fluctuating system can be investigated similarly if the field  $\varphi$  is smoothed over short range fluctuations. In this case one must replace the Hamiltonian (3) by the renormalized one. A statistical theory of nucleation is developed on the base of equations (16, 29). Equations for the nuclei distribution function (44) and transition probability (50) are obtained. The statistics of the critical nucleus birth is found. The life time of the metastable state is calculated (55). It depends on the type of the relaxation. Scaling behaviour is discussed. It is shown how nucleus shape fluctuations and its random wandering can be regularly taken into account.

## I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При фазовом переходе первого рода возможно, как известно, получение метастабильного состояния вещества [1]. Такое состояние термодинамически устойчиво относительно малых возмущений. Его релаксация и термодинамически стабильное состояние происходит с образованием критического зародыша новой фазы, что предполагает преодоление энергетического барьера. Классическая теория Зельдовича-Фольмера [2-4] рассматривает релаксацию метастабильного состояния как релаксацию распределения зародышей по размерам. При этом постулируется уравнение для потока зародышей  $J$  вдоль фазовой оси в область больших размеров. Получаемый в Теории результат  $J = J_0 \exp\left(-\frac{\Delta F_c}{T}\right)$  (где  $\Delta F_c$  — минимальная работа образования критического зародыша) с точностью до предэкспоненциального множителя является универсальным и определяется равновесной термодинамикой системы. Величина  $J_0$  различна для систем с различной динамикой релаксации и в рамках теории ЗФ не вычисляется. Динамика нуклеации доступна для наблюдения, в особенности вблизи критических точек систем (например, вблизи критических точек расслоения). Цель нашей работы — исследовать динамику релаксации метастабильного состояния системы вблизи критической точки. Развиваемая ниже теория исходит из уравнения релаксации для поля (полей) параметра порядка системы. При этом отпадает необходимость в дополнительных предположениях относительно свойств зародыша (например, о зависимости энергии зародыша от размера, об условиях на его границе и т.п.) Такие предположения представляются не всегда очевидными, в особенности в системах с большим радиусом корреляции. Метод позволяет регулярным образом учитывать влияние различных эффектов (флуктуаций формы зародыша, процессов слияния и т.п.) на релаксацию метастабильного состояния. Предлагаемая теория носит общий характер. В её рамках может быть получено приближение ЗФ.

Динамика системы вблизи критической точки связана с релаксацией и флуктуациями гидродинамических мод — полей параметра порядка  $\varphi(\vec{x}, t)$ , плотности энергии  $\mathcal{E}(\vec{x}, t)$  и т.п. Медленность их релаксации позволяет исключить другие степени

свободы, успевающие придти к локальному равновесию. Вид уравнений релаксации для гидродинамических мод определяется в основном свойствами сохранения. Мы рассмотрим систему, описываемую скалярным полем  $\varphi(\vec{x}, t)$ ; энергию этого поля считаем не сохраняющейся [5]. Для систем с сохраняющимся параметром  $\varphi(x, t)$  уравнение релаксации для  $\varphi(\vec{x}, t)$  имеет вид:

$$\frac{1}{\Gamma_c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\Delta \left( -\frac{\delta H}{\delta \varphi} + f_{st} \right) \quad (1)$$

а для системы без сохранения  $\varphi(\vec{x}, t)$

$$\frac{1}{\Gamma_n} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \varphi} + f_{st} \quad (2)$$

где  $H\{\varphi\}$  - эффективный гамильтониан, который мы возьмем в форму Ландау

$$H\{\varphi\} = \frac{1}{2} \int \{c(\nabla\varphi)^2 + \mu\varphi^2 + \frac{g}{2}\varphi^4 - 2h\varphi\} d\vec{x} \quad (3)$$

Здесь  $\Gamma_n, \Gamma_c$  - кинетические коэффициенты,  $f_{st}$  - сторонняя сила, имитирующая тепловой ансамбль. Используемая нами схема описания динамики поля параметра порядка стандарта [5]. Вблизи критической точки свойства системы с гамильтонианом (3) хорошо известны [6]. При  $h = 0, \mu = \mu_c < 0$  в системе имеется критическая точка; линия  $h = 0, \mu < \mu_c$  есть линия фазовых переходов первого рода. Метастабильное состояние поля  $\varphi(\vec{x}, t)$  можно получить пересекая в термодинамической плоскости линию  $h = 0$  при  $\mu < \mu_c$ . Мы будем исследовать его релаксацию для случаев (1, 2). Размытость межфазной границы в рассматриваемом случае не позволяет пользоваться наглядными представлениями об абсорбции частиц зародышем, и механизм зародышеобразования должен быть найден.

В отсутствие внешней сторонней силы  $f_{st}$  уравнения (1, 2) имеют устойчивые в малом стационарные однородные решения  $\varphi = \varphi_{1,2}(h)$ , которые находятся из условия

$$\mu\varphi + g\varphi^3 = h \quad (\mu < 0, g > 0) \quad (4)$$

Имеется также класс квазистационарных решений, для которых

$\varphi(\vec{x}, t)$  почти всюду близко к значениям  $\varphi_{1,2}$  за исключением граничных областей с толщиной  $\delta \sim (\frac{c}{|\mu|})^{1/2}$ . Эволюция квазистационарных решений сводится к движению границ. Для малой внешней силы  $f_{st}(\vec{x}, t)$  решение уравнений (1, 2) представляет собой в каждый момент времени малые флуктуации около решений при  $f_{st} = 0$ . Величина  $f_{st}(\vec{x}, t)$  может считаться малой, если возникающая амплитуда флуктуаций поля  $\varphi(\vec{x}, t)$  мала по сравнению с величиной  $\varphi_s = (\frac{|\mu|}{g})^{1/2}$  для области размера  $\lambda \lesssim \lambda_c \sim (\frac{c}{|\mu|})^{1/2}$ . Это условие выполняется для систем, находящихся в области применимости теории Ландау [6].

$$1 \gg |\mu| \gg Gi = \frac{g^2 T^2}{c^3} \quad (5)$$

Рассмотрим сначала этот случай малых флуктуаций.

2. Динамика зародыша для систем с несохраняющимся параметром  $\varphi(\vec{x}, t)$ . Релаксация системы описывается уравнением (2). Рассмотрим сначала сферический зародыш с центром в начале координат ( $h = 0, f_{st} = 0$ ). Введем безразмерные переменные: радиус  $\xi$ , измерений в единицах  $(\frac{2c}{|\mu|})^{1/2}$ , и время  $t$ , измеренное в единицах  $\frac{2}{\Gamma_n |\mu|}$ . Безразмерный параметр перехода

$$\Psi(\xi, t) = \varphi(\xi, t) / \varphi_s; \quad \varphi_s = (\frac{|\mu|}{g})^{1/2}$$

Для независимой от углов конфигурации  $\Psi(\xi, t)$  в  $n$ -мерном пространстве ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) получим:

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{n-1}{\xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + 2(\Psi - \Psi^3) \quad (6)$$

Решение Уравнения (6), интересующего нас вида, хорошо известно в однородном случае:

$$\Psi(\xi, t) = \pm th(\xi - \xi_0), \quad \xi_0 = const \quad (7)$$

Мы ожидаем, что в случае  $n > 1$  решение имеет вид подобный (7). При  $\xi_0 \gg 1$  член  $\frac{n-1}{\xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$  в (6) необходимо учесть лишь в области границы зародыша  $\xi \sim \xi_0$ , положение которой зависит от времени  $t$ . При других значениях  $\xi$  этот член относительно мал. Если ширина границы мала по сравнению с размером зародыша, то уравнение (6) можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{n-1}{\xi_0(t)} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + 2(\psi - \psi^3) \quad (8)$$

Решением уравнения (8), описывающим релаксацию сферического зародыша, является:

$$\psi(\xi, t) = \pm th(\xi - \xi_0) \quad (9)$$

$$\frac{d\xi_0}{dt} = -\frac{n-1}{\xi_0}$$

Величина  $\xi_0(t)$  — эффективный радиус зародыша, убывающий со временем по закону:

$$\xi_0(t) = \xi_0(0) \left[ 1 - \frac{2(n-1)t}{\xi_0^2(0)} \right]^{1/2} \quad (10)$$

Решение (9) справедливо при  $\xi_0(t) \gg 1$ . Зародыши меньших размеров  $\xi_0(t) \sim 1$  затухают к однородному в пространстве решению. Обе фазы  $\langle \psi \rangle = \pm 1$  оказываются при  $h = 0$  устойчивыми относительно образования зародыша сколь угодно большого размера. Уравнение релаксации при  $h \neq 0$  ( $h$  измерено в единицах  $\frac{1}{2} \mu_1 \psi_s$ ) имеет два однородных и устойчивых в малом решения лишь если  $|h| < h_c = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ . Мы будем рассматривать слабо метастабильные состояния, когда  $|h| \ll h_c < 1$ , поэтому решение уравнения релаксации достаточно найти с точностью до линейных по  $h$  членов. Реальные зародыши в системе имеют форму близкую к сферической, если их размер велик по сравнению с корреляционным радиусом  $\xi_{cor} = \frac{1}{2}$ . Будем предполагать поэтому, что в разложении радиуса зародыша  $\xi_0(\theta, \varphi, t)$  по сферическим функциям:

$$\xi_0(\theta, \varphi, t) = \sum \xi_0^{lm}(t) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

величины  $\xi_0^{lm}(t)$  ( $l \geq 1$ ) малы по сравнению с  $\xi_0^0(t)$  — средним по углам радиусом зародыша. Здесь и ниже вычисления проводятся для трехмерного пространства  $n = 3$ . Решение уравнения релаксации:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi_0(\theta, \varphi, t)} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \psi}{\xi_0^2(\theta, \varphi, t)} + 2(\psi - \psi^3) + h$$

$$\partial^2 = -\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \quad (12)$$

с точностью до членов более высокого порядка по величинам

$\xi_0^l$  ( $l \geq 1$ ) и  $h$  есть:

$$\psi(\vec{\xi}, t) = th[\xi - \xi_0(\theta, \varphi, t)] + \frac{h}{4}$$

$$- \frac{d\xi_0^0}{dt} = \frac{2}{\xi_0^0} + \frac{3h}{2} \quad (13)$$

$$- \frac{d\xi_0^l}{dt} = \frac{l(l+1) - 2}{(\xi_0^0)^2} \xi_0^l \quad (l \geq 1)$$

Как видно из (13), амплитуды сферических гармоник  $\xi_0^l$  ( $l \geq 2$ ) затухают в процессе релаксации достаточно быстро

$$\xi_0^l(t) = \xi_0^l(0) \exp \left\{ - \int_0^t \frac{l(l+1) - 2}{\xi_0^0(t')^2} dt' \right\} \quad (14)$$

т.е. зародыш сферизуется. Незатухающая гармоника  $\xi_0^1(t)$  описывает смещение зародыша как целого в пространстве. В системе отсчета, связанной с центром зародыша,  $\xi_0^1 = 0$ . Решение (13) описывает зародыш фазы  $\langle \psi \rangle \approx -1$  в фазе  $\langle \psi \rangle \approx 1$ . При  $h < 0$  зародыши со средним по углам радиусом  $\xi_0^0 < \xi_c = \frac{4}{3|h|}$  затухают, а зародыши с  $\xi_0^0 > \xi_c$  растут. Фаза  $\langle \psi \rangle \approx 1$  при  $h < 0$  метастабильна — неустойчива относительно образования зародыша с радиусом  $\xi_0^0 > \xi_c$ . При  $h > 0$  фаза  $\langle \psi \rangle \approx 1$  стабильна. Аналогично получается решение для зародыша фазы  $\langle \psi \rangle \approx 1$  в фазе  $\langle \psi \rangle \approx -1$ .

До сих пор мы не учитывали случайную силу  $f_{st}(\vec{x}, t)$ , связанную с мелкомасштабными флуктуациями. Свойства случайной силы  $f_{st}$  определены предположением о равновесности мелкомасштабных флуктуаций. Случайное поле  $f_{st}(\vec{x}, t)$  гауссово с нулевым средним значением. Силу  $f_{st}(\vec{x}, t)$  считаем слабой, так что амплитуда отклика поля  $\psi(\vec{x}, t)$  на воздействие силы  $f_{st}$  мала по сравнению с  $\psi_s$ . Решение уравнения релаксации с учетом силы  $f_{st}(\vec{\xi}, t)$ , измеренной в единицах  $\frac{1}{2} \mu_1 \psi_s / 2$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi + 2(\psi - \psi^3) + h + f_{st}(\vec{\xi}, t) \quad (15)$$

будем искать в виде:

$$\Psi(\vec{\xi}, t) = th[\xi - \xi_0(\theta, \varphi, t)] + \frac{h}{4} + v(\vec{\xi}, t)$$

$$-\frac{d\xi_0^0}{dt} = \frac{2}{\xi_0^0} + \frac{3h}{2} + 6v^0(\xi_0^0(t), t) \quad (I6)$$

$$-\frac{d\xi_0^l}{dt} = \frac{l(l+1)-2}{(\xi_0^0)^2} \xi_0^l + 6v^l(\xi_0^0(t), t)$$

где функция  $v(\vec{\xi}, t)$  описывает отклик поля  $\Psi(\vec{\xi}, t)$  на воздействие силы  $f(\vec{\xi}, t)$  и является решением уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - 4v + f(\vec{\xi}, t)$$

$$v(\vec{\xi}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{\xi} - (k^2+4)t} \left\{ \int_0^t e^{(k^2+4)t'} f_{\vec{k}}(t') dt' \right\} d\vec{k} \quad (I7)$$

$$f_{\vec{k}}(t') = \int f(\vec{\xi}, t') e^{-i\vec{k}\vec{\xi}} d\vec{\xi} \quad (I8)$$

Величины  $v^l(\xi, t)$  — амплитуды разложения функции  $v(\vec{\xi}, t)$  по сферическим функциям:

$$v(\vec{\xi}, t) = \sum v^l(\xi, t) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (I9)$$

Величина  $v(\vec{\xi}, t)$  есть линейный функционал силы  $f(\vec{\xi}, t)$  и, если сила достаточно слаба,  $|v| < 1$ . Исследуем корреляционные свойства поля  $v(\vec{\xi}, t)$ . Предполагая случайную силу  $f(\vec{\xi}, t)$   $\delta$ -коррелированной

$$\langle f(\vec{\xi}_1, t_1) f(\vec{\xi}_2, t_2) \rangle = \alpha \delta(t_1 - t_2) \delta(\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2)$$

получим:

$$\langle v(\vec{\xi}_1, t_1) v(\vec{\xi}_2, t_2) \rangle = \frac{\alpha}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-(k^2+4)|t|}}{(k^2+4)} e^{i\vec{k}(\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2)} d\vec{k} \quad (20)$$

Из (20) видно, что поле  $v(\vec{\xi}, t)$  коррелировано в пространстве  $\xi_{\text{cor}} = \frac{1}{2}$  и во времени  $t_{\text{cor}} = \frac{1}{4}$ . Предположение о  $\delta$ -коррелированности поля  $f(\vec{\xi}, t)$  допустимо всегда, когда его собственные корреляционные радиусы малы по сравнению с полученными для поля  $v(\vec{\xi}, t)$ .

Вернемся теперь к уравнению (I5). Подставив в него решение (I6) и удерживая лишь линейные по  $v(\vec{\xi}, t)$  члены получим, что уравнение удовлетворяется с точностью до члена

$$[v(\vec{\xi}, t) - v(\xi_0(\theta, \varphi, t), t)] ch[\xi - \xi_0(\theta, \varphi, t)]$$

При  $|\xi - \xi_0(\theta, \varphi, t)| > 1$  этот член экспоненциально мал. Для  $\xi \sim \xi_0(\theta, \varphi, t)$  разложим  $v(\vec{\xi}, t)$  в ряд вблизи  $\xi_0(\theta, \varphi, t)$ . В силу того, что корреляционный радиус поля  $v(\vec{\xi}, t)$  порядка ширины границы зародыша, в разложении можно ограничиться первым членом. В этом приближении решение (I6) удовлетворяет (I5). Учет случайной силы  $f(\vec{\xi}, t)$  приводит к малым флуктуациям амплитуды  $\Psi(\vec{\xi}, t)$  и границы зародыша, описываемым уравнениями (I6). Амплитуды сферических гармоник радиуса  $\xi_0^l(t)$  флуктуируют под действием соответствующих гармоник эффективной случайной силы  $v(\vec{\xi}, t)$ , являющейся функционалом поля  $f_{st}(\vec{\xi}, t)$ .

3. Динамика зародыша для систем с сохраняющимся параметром  $\Psi(\vec{x}, t)$ . Запишем уравнение (I) используя безразмерные радиус  $\xi$ , измеренный в единицах  $(\frac{2c}{|\mu|})^{1/2}$ , время  $t$ , измеренное в единицах  $\frac{4c}{|\mu|}$ , параметр перехода  $\Psi = \varphi/\varphi_s$ . Поле  $h$  и сторонняя сила  $f_{st}$  измерены в единицах  $|\mu| \varphi_s/2$ .

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\Delta [\Delta \Psi + 2(\Psi - \Psi^3) + f(\vec{\xi}, t)] \quad (21)$$

Как и в рассмотренном выше случае, найдем квазистатическое решение в отсутствие случайной силы  $f(\vec{\xi}, t)$ , описывающее сферический зародыш. Однородные решения уравнения (21) ( $f = 0$ ) удовлетворяют условию:

$$\Psi^3 - \Psi - \frac{h}{2} = 0 \quad (22)$$

и описывают две фазы системы. Поле  $h$  в изучаемом случае есть аналог химического потенциала системы. Например, для бинарной смеси  $h \sim \mu_c - \mu_i$ , где  $\mu_c$  — химический потенциал на линии расщепления,  $\mu_i$  — химический потенциал исходной фазы. Рассмотрим зародыш фазы  $\langle \Psi \rangle \simeq -1$  в метастабильной фазе  $\langle \Psi \rangle \simeq 1$ , что отвечает  $h < 0$ ,  $|h| \ll 1$ . Произвольная конфигурация поля  $\Psi(\vec{\xi}, t)$  должна согласно закону сохранения удовлетворять в этой

фазе условию  $\Psi(\infty, t) = I - \frac{|h|}{4}$ . Стационарное решение (21) ( $f(\vec{\xi}, t) = 0$ ), соответствующее зародышу радиуса  $\xi_0 \gg I$  есть:

$$\Psi(\xi, t) = th(\xi - \xi_0) - \frac{1}{3\xi_0} \quad (\xi_0 = const) \quad (23)$$

Оно удовлетворяет граничному условию лишь в случае, когда  $\xi_0 = \frac{4}{3|h|} = \xi_c$ . Зародыш такого размера является критическим. Для зародышей размером  $\xi_0 \neq \xi_c$  необходимо найти поправку к решению (23). Поправка  $\delta\Psi = u(\xi, t)$  при  $\xi \gg \xi_0$  стремится к пределу  $\frac{1}{3\xi_0} - \frac{|h|}{4}$ . Внутри зародыша  $\xi \ll \xi_0$  поправка  $u(\xi, t)$  стремится к нулю. Вне зародыша существует отличный от нуля поток ( $\nabla u \neq 0$ ), и размер зародыша  $\xi_0$  зависит от времени  $t$ . Удерживая в уравнении (21) члены до линейных по  $u(\xi, t)$  получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{d\xi_0}{dt} ch(\xi - \xi_0) = -\Delta[\Delta u - 4u + 6ch(\xi - \xi_0)u] \quad (24)$$

В силу квазистатичности процесса релаксации зародыша величина  $\frac{\partial u}{\partial t}$  — малая более высокого порядка по сравнению с другими членами уравнения (24). Члены, содержащие множителем  $ch(\xi - \xi_0)$ , необходимо учитывать лишь в области границы зародыша  $\xi \sim \xi_0(t)$ . Вне границы ( $\xi \ll \xi_0$  или  $\xi \gg \xi_0$ ) получим уравнение:

$$\Delta(\Delta u - 4u) = 0 \quad (25)$$

Решение (25) возьмем в виде  $u_i = \beta_i + \frac{\alpha_i}{\xi}$  ( $i = 1, 2$ ). Внутри зародыша ( $0 \leq \xi < \xi_0$ )  $\alpha_1, \beta_1 = 0$ . Решение вне зародыша должно переходить в решение внутри зародыша в области  $\xi \sim \xi_0$ , откуда  $\alpha_2 = -\beta_2 \xi^*$  (где  $\xi^* \sim \xi_0$ ). Воспользуемся граничным условием  $u(\infty, t) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{\xi_c} \right)$  (где  $\xi_c = \frac{4}{3|h|}$ ) и получим

$$u(\xi, t) = \begin{cases} 0 & \xi \leq \xi^* \\ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{\xi_c} \right) \left( 1 - \frac{\xi^*}{\xi} \right) & \xi > \xi^* \end{cases} \quad (26)$$

Воспользуемся законом сохранения параметра  $\Psi(\xi, t)$  для определения зависимости  $\xi_0$  от  $t$ . Проинтегрируем уравнение (24) по области  $0 \leq \xi \leq \tilde{\xi}$  ( $\tilde{\xi} \gg \xi_0$ ). Интеграл от правой части уравнения преобразуем в поверхностных по сфере радиуса  $\tilde{\xi}$ . В результате получим

$$\frac{d\xi_0}{dt} = -\frac{2}{3} \left( \frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{\xi_c} \right) \frac{\xi^*}{\xi_0} \quad (27)$$

Потребуем, чтобы решение (26, 27) удовлетворяло уравнению (25) и в области границы зародыша  $\xi \sim \xi_0$ . Найдем  $\xi^* = \xi_0$ . Таким образом релаксация сферического зародыша описывается решением:

$$\Psi(\xi, t) = th(\xi - \xi_0) - \frac{1}{3\xi_0} + u(\xi, t) \quad (28)$$

$$\frac{d\xi_0}{dt} = -\frac{2}{3} \left( \frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{\xi_c} \right) \frac{1}{\xi_0}$$

Обобщение на случай произвольной формы зародыша и учет слабой случайной силы  $f_{st}$  производится подобно тому, как это было сделано в предыдущем случае. В младшем порядке по силе  $f_{st}$  и гармоникам радиуса  $\xi_0^l$  ( $l \geq 1$ ) решение (21) есть:

$$\Psi(\vec{\xi}, t) = th[\xi - \xi_0(\theta, \varphi, t)] - \frac{1}{3\xi_0} + u(\xi, t) + v(\vec{\xi}, t) \quad (29)$$

$$-\frac{d\xi_0^0}{dt} = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\xi_0^0} - \frac{1}{\xi_c} \right) \frac{1}{\xi_0^0} + 12 v^0(\xi_0^0(t), t)$$

$$-\frac{d\xi_0^l}{dt} = 2 \frac{l(l+1)-2}{(\xi_0^0)^2} \xi_0^l + 12 v^l(\xi_0^0(t), t)$$

Функция  $u(\xi, t)$  здесь совпадает с функцией определяемой (26) с заменой  $\xi_0(t)$  на средний по углам радиус зародыша  $\xi_0^0(t)$  ( $\xi^* = \xi_0^0$ ). Функция  $v(\vec{\xi}, t)$  описывает отклик поля  $\Psi(\vec{\xi}, t)$  на воздействие случайной силы  $f(\vec{\xi}, t)$  и является решением уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\Delta[\Delta v - 4v + f(\vec{\xi}, t)] \quad (30)$$

$$v(\vec{\xi}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{\xi} - k^2(k^2+4)t} \int_0^t e^{k^2(k^2+4)t'} f_{\vec{k}}(t') dt' \int d\vec{k} \quad (30)$$

Величины  $v(\vec{\xi}, t)$  — сферические гармоники поля  $v(\vec{\xi}, t)$ . Уравнения (29) для величин  $\xi_0^l$  ( $l \geq 2$ ) описывают флуктуации формы зародыша. Форма зародыша остается близкой к сферической, если  $\xi_0^0 \gg 1$ . Блуждание зародыша как целого описывается уравнением для  $\xi_0^0(t)$ . Решение (29) описывает метастабильную фазу

$\langle \Psi \rangle \approx 1$ . При  $h > 0$  фаза  $\langle \Psi \rangle \approx 1$  стабильна, а метастабильная фаза  $\langle \Psi \rangle \approx -1$ .

#### 4. Случай сильных флуктуаций.

В случае  $G_i \approx |\mu|$  амплитуда флуктуаций поля  $\varphi(\vec{x}, t)$  масштабов  $\lambda \sim \xi_c$  не мала по сравнению с разностью средних значений поля в двух фазах. В этом случае состояние с зародышем не описывается выделенной конфигурацией поля  $\varphi(\vec{x}, t)$ , а с заметной вероятностью содержит множество сильно отличающихся конфигураций. Поле  $\varphi(\vec{x}, t)$ , осредненное по флуктуациям масштабов  $\lambda \approx R$  ( $R \gg \xi_c$ ), флуктуирует слабо. Для сглаженного до такого масштаба поля можно определить конфигурацию, описывающую зародыш. Уравнение релаксации для сглаженного поля получается методом ренорм-группы (см., например, [5]). Для масштабов  $R \gg \xi_c$  результат в термодинамически равновесном состоянии определяется тем, что ренормированный гамильтониан попадает в окрестность гауссовой неподвижной точки. Уравнения движения и гамильтониан имеют вид (1), (2), (3), но с ренормированными коэффициентами:  $\Gamma, c, \mu, g \rightarrow \Gamma^*, c^*, \mu^*, g^*$ . Для определения процедуры сглаживания в метастабильном состоянии необходимо знать распределение вероятностей конфигураций поля  $\varphi(\vec{x}, t)$  в таком состоянии. Это распределение приведено в следующем разделе, причем для масштабов  $R < R_c$  оно совпадает с распределением Гиббса. Следовательно для малых отклонений сглаженного поля  $\varphi(\vec{x}, t)$  от равновесного или метастабильного среднего гамильтониан имеет вид гамильтониана Ландау:

$$H\{\varphi\} = \frac{1}{2} \int \left\{ c^* (\nabla \varphi)^2 + \mu^* \varphi^2 + \frac{g^*}{2} \varphi^4 - 2h\varphi \right\} d\vec{x}$$

Для больших отклонений сглаженного поля от средних значений  $|\delta\varphi| \sim \varphi_s$  явный вид гамильтониана не определяется общими сообщениями. Если гамильтониан  $H\{\varphi\}$  отличается от гамильтониана Ландау лишь независимыми от  $\nabla\varphi$  членами, то динамика зародыша совпадает с рассмотренной в разделах (2,3) с точностью до замены величин  $\Gamma, c, \mu, g$  ренормированными значениями  $\Gamma^*, c^*, \mu^*, g^*$ . Величины  $\Gamma^*, c^*, \mu^*, g^*$  определяются через измеримые характеристики системы (упорядочение  $\varphi_s$ , восприимчивость  $\chi$  и радиус корреляции  $\xi_c$ ) формулами:

$$\varphi_s = \left( \frac{1\mu^*1}{g^*} \right)^{1/2}; \quad \chi = \frac{1}{2\mu^*1}; \quad \xi_c^2 = \frac{c^*}{2\mu^*1} \quad (31)$$

Пусть релаксация конфигураций сглаженного поля  $\varphi(\vec{x}, t)$  описывается уравнением

$$\frac{1}{\Gamma^*} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta \varphi}$$

Изменение поля  $\varphi(\vec{x}, t)$  в точке  $\vec{x}$  за время  $dt$  есть  $\delta\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$ . Полное изменение энергии конфигурации поля  $\varphi(\vec{x}, t)$  есть:

$$\delta H = \int \frac{\delta H}{\delta \varphi} \delta \varphi d\vec{x} = - \left\{ \frac{1}{\Gamma^*} \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 d\vec{x} \right\} dt \quad (32)$$

Для конфигураций, описывающих зародыш, величина  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  заметно отлична от нуля лишь в области границы зародыша. Учитывая, что  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\dot{\epsilon} \nabla \varphi$ , найдем:

$$\left\{ \frac{1}{\Gamma^*} \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 d\vec{x} \right\} dt = \dot{\epsilon}^2 S a^2 dt; \quad a^2 = \frac{1}{\Gamma^* S} \int (\nabla \varphi)^2 d\vec{x} \quad (33)$$

где величина  $a^2$  не зависит от площади поверхности зародыша  $S$ . С другой стороны

$$\delta H = \delta H_v + \delta H_s = 2h\varphi_s \dot{\epsilon} S dt + \frac{2\alpha}{\xi} \dot{\epsilon} S dt \quad (34)$$

где  $2\varphi_s$  - разность средних значений поля в двух фазах;  $\alpha$  - по определению эффективное поверхностное натяжение. Из (33, 34) находим:

$$\dot{\epsilon} = - \frac{2\alpha}{a^2} \left( \frac{1}{\xi} - \frac{1}{R_c} \right); \quad R_c = \frac{\alpha}{|h| \varphi_s} \quad (35)$$

Для системы (1) с сохраняющимся параметром перехода  $\varphi(\vec{x}, t)$  уравнение движения можно записать в следующей форме:

$$\frac{\delta H}{\delta \varphi} = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \varphi(\vec{x}', t)}{\partial t} |\vec{x} - \vec{x}'|^{-1} d\vec{x}' \quad (36)$$

Повторяя изложенные выше рассуждения, получим:

$$\dot{\epsilon} = - \frac{2\alpha}{b^2} \left( \frac{1}{\xi} - \frac{1}{R_c} \right) \frac{1}{\xi}; \quad b^2 = \frac{1}{4} \frac{\Gamma^*}{\xi^2} a^2 \quad (37)$$

Свойства случайной силы, вызывающей изменение радиуса зародыша, для случая слабых и сильных флуктуаций совпадают. Заметим,



что при описании системы осредненным полем  $\varphi(\vec{x}, t)$  снимается ограничение на корреляционный радиус снизу, так что описание применимо и вдали от критической точки. Формулы (35), (37) можно записать в том же виде, что и формулы предыдущего раздела, вводя эффективные величины  $\Gamma^*, \mu^*$  и т.д., при этом масштабная размерность этих величин, как можно убедиться, совпадает с масштабной размерностью этих величин, следующей из теории равновесных флуктуаций [5].

5. Статистическое описание метастабильного состояния и его релаксации. Метастабильное состояние, возникающее при пересечении с конечной скоростью линии фазовых переходов первого рода, есть состояние неполного равновесия. В таком состоянии распределение мелкомасштабных ( $\lambda \ll R_c$ ) степеней свободы соответствует локальному равновесию при медленно меняющихся крупномасштабных степенях свободы ( $\lambda \geq R_c$ ) и близко к их распределению в исходной фазе. Критический размер  $R_c$  зависит от глубины проникновения в область метастабильности исходной фазы. В случае слабой метастабильности критический размер по определению велик по сравнению с радиусом корреляции  $\zeta_c$ . На линии фазового перехода  $R_c = \infty$ , тогда как  $\zeta_c$  конечен. Рассматриваемые системы с большим по сравнению с атомным масштабом радиусом корреляции ( $\zeta_c \gg a$ ) описываются полем (или набором полей) параметра перехода  $\varphi(x, t)$ . Введем сглаженное до масштаба  $\lambda$  ( $\zeta_c \ll \lambda < R_c$ ) поле параметра перехода  $\varphi_\lambda(\vec{x}, t)$

$$\varphi_\lambda(\vec{x}, t) = \frac{1}{V_\lambda} \int \mathcal{J}(\vec{x} - \vec{x}') \varphi(\vec{x}', t) d\vec{x}' \quad (38)$$

где  $\mathcal{J}_\lambda(x)$  — некоторая сглаживающая функция с характерным размером  $\lambda$ , например  $\mathcal{J}_\lambda(x) = \exp(-\frac{x^2}{\lambda^2})$ . Флуктуации поля  $\varphi(\vec{x}, t)$  масштабов  $R > \lambda$  малы, поэтому величина  $|\varphi_\lambda - \varphi^+| \ll \varphi^+ - \varphi^-$  (где  $\varphi^{+(-)}$  средние значения поля  $\varphi(\vec{x}, t)$  соответственно в исходной (конечной) фазах), если только область осреднения не занята зародышем новой фазы размера  $R \geq \lambda$ . Зародыши размеров  $R > R_c$  с подавляющей вероятностью растут. Их наличие в системе означает, что произошел переход в гетерофазное состояние. В однородном метастабильном состоянии таких зародышей ( $R \geq R_c$ ) быть не должно. Эти соображения позволяют предложить распределение вероятностей конфигураций поля  $\varphi(\vec{x}, t)$  в метастабильной фазе [7].

Введем функционал  $\rho^+\{\varphi_\lambda\}$  от сглаженного поля  $\varphi_\lambda(\vec{x})$  ( $\zeta_c \ll \lambda < R_c$ ) со следующими свойствами:  $\rho^+\{\varphi_\lambda\} = 1$ , если всюду  $\varphi_\lambda(\vec{x}) > \varphi^+ - \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2}$ ;  $\rho^+ = 0$ , если хотя бы в одной точке это условие нарушается. Плотность вероятности конфигураций поля  $\varphi(\vec{x}, t)$  в состоянии, являющемся метастабильным продолжением фазы  $\varphi^+$ , есть по предположению:

$$W_m^+\{\varphi\} = \exp\left(\frac{F - H\{\varphi\}}{T}\right) \cdot \rho^+\{\varphi_\lambda\} \quad (39)$$

Вероятность конфигураций содержащих хотя бы один зародыш новой фазы размера  $R > \lambda$  равна нулю. На множестве прочих конфигураций распределение  $W_m^+\{\varphi\}$  совпадает с распределением Гиббса. Если  $\lambda \gg \zeta_c$ , то распределение  $W_m^+$  отличается от распределения Гиббса лишь для крайне маловероятных в области стабильности фазы  $\varphi^+$  конфигураций поля  $\varphi(\vec{x}, t)$ . Следовательно в этой области эти распределения термодинамически тождественны. Распределение  $W_m^+$  (39) описывает стабильные состояния фазы  $\varphi^+$ , а также состояние являющееся метастабильным продолжением фазы  $\varphi^+$ , в которых  $R_c > \lambda$ . Аналогично можно построить ансамбль  $W_m^-\{\varphi\}$ , описывающий метастабильное продолжение фазы  $\varphi^-$ . Ансамбли  $W_m^\pm$  не стационарны и должны использоваться как начальные распределения при решении задачи о релаксации соответствующих метастабильных состояний.

Релаксацию метастабильного состояния опишем как релаксацию распределения зародышей новой фазы. Распределение зародышей в момент  $t = 0$   $W(\zeta, 0) = W_m(\zeta)$  определяется ансамблем (39). Эволюция каждого зародыша описывается уравнениями (16) в случае несохраняющегося параметра перехода, или уравнениями (29) в случае сохраняющегося параметра перехода. Заметим, что как в системе (16), так и в (29) величины  $\xi_0^l$  ( $l \geq 1$ ) не входят в уравнение для среднего по углам радиуса  $\xi_0^0(t)$ . В рассматриваемом приближении распределение  $W(\zeta, t)$  по значениям радиуса оказывается независимым от распределения по отклонениям от сферической формы  $\xi_0^l$  ( $l \geq 1$ ). Мы рассматриваем зародыши размеров  $\zeta \gg \lambda_0$ , где  $\lambda_0$  — масштаб, амплитуда флуктуации которого сравнима со значением спонтанного упорядочения. Концентрация таких зародышей мала, и вероятностью их столкновения можно пренебречь. Взаимодействие зародышей ( $\zeta \gg \lambda_0$ ) с флуктуациями

масштабов  $\lambda \ll \lambda_0$ , учитывается эффективной случайной силой  $v(\xi, t)$ . В таком приближении в обоих рассматриваемых случаях изменение среднего по углам радиуса зародыша  $\xi_0(t)$  описывается уравнением:

$$\frac{d\xi_0}{dt} = -[F(\xi_0(t)) + c v^0(\xi_0(t), t)] \quad (40)$$

Регулярная "сила"  $F(\xi_0)$  определена формулами (13) и (27);  $v^0(\xi_0(t), t)$  — среднее по сфере радиуса  $\xi_0(t)$  значение эффективной случайной силы  $v(\xi, t)$ , определяемой соответственно формулами (18) и (30);  $c$  — число 6 или 12. Поле  $v^0(\xi_0(t), t)$  в силу относительной медленности изменения размера зародыша можно считать  $\delta$  — коррелированным во времени:

$$\langle v^0(\xi_0(t_1), t_1) v^0(\xi_0(t_2), t_2) \rangle = 2D(\xi_0) \cdot \delta(t_1 - t_2) \quad (41)$$

где  $D(\xi_0) = D/(\xi_0)^2$  в случае системы с несохраняющимся параметром перехода,  $D(\xi_0) = D/(\xi_0)^3$  в случае системы с сохраняющимся параметром перехода. Следуя теории однородных случайных процессов [8], введем переходную вероятность

$$P(r, r_0 | t) = \langle \delta(r - \xi_0(t)) \rangle \quad (42)$$

где осреднение производится по всем реализациям случайной силы  $v^0(\xi_0(t), t)$ . Величина  $P(r, r_0 | t)$  есть вероятность того, что в момент  $t$  размер зародыша равен  $r$ , если при  $t = 0$   $r = r_0$ . Распределение зародышей в момент времени  $t$

$$W(r, t) = \int P(r, r_0 | t) W_m(r_0) dr_0 \quad (43)$$

Распределение  $W(r, t)$  удовлетворяет уравнению Колмогорова, определяемому с помощью (40), (41):

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \{ F(r) W \} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ D(r) \frac{\partial W}{\partial r} \right\} \quad (44)$$

где  $F(r) = 2\left(\frac{1}{r} + \frac{3h}{4}\right)$ ;  $D(r) = D/r^2$  в случае системы с несохраняющимся параметром перехода, и  $F(r) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{r} + \frac{3h}{4}\right)\frac{1}{r}$ ;  $D(r) = D/r^3$  в случае системы с сохраняющимся параметром пере-

хода. Стационарное решение уравнения (44)

$$W(r) = V \omega \exp\left[-\frac{1}{D}\left(r^2 + \frac{h}{2} r^3\right)\right] \quad (45)$$

есть при  $h \geq 0$  распределение зародышей фазы  $\langle \Psi \rangle \approx -1$  в стабильной фазе  $\langle \Psi \rangle \approx 1$ . Сравнивая (45) с равновесным распределением зародышей найдем  $D = \frac{3T}{8\pi}$  (где  $T$  — измерена в единицах  $|\mu| \varphi_s^2 r_c^3$ ).  $V$  — объем системы. Величина  $\omega$  не зависит от размера  $r$  и может быть вычислена интегрированием распределения Гиббса по всем конфигурациям, соответствующим зародышу размера  $r$ , при  $h = 0$ .

При  $h \leq 0$  распределение (45) неограниченно возрастает при  $r \rightarrow \infty$ . Это означает, что наиболее вероятными являются состояния с зародышем бесконечного размера, т.е. система перешла в новое фазовое состояние. Распределение зародышей в метастабильной фазе  $W_m(r)$ , соответствующее (39), есть

$$W_m(r) = V \omega \exp\left[-\frac{8T}{3\pi}\left(r^2 - \frac{2}{3} \frac{r^3}{R_c}\right)\right] \cdot \theta(r - r_c) \quad (46)$$

где  $R_c = \frac{4}{3|h|} \gg 1$ ;  $1 \ll r_0 < R_c$ ;  $\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

Релаксацию распределения (46) на временах  $t$  малых по сравнению со временем жизни метастабильного состояния  $t_m$  можно описать как поток зародышей в область размеров  $R \rightarrow \infty$ , определяемый уравнением:

$$J = D(r) \frac{dW}{dr} + F(r) W \quad (47)$$

Уравнение (47) имеет вид, постулируемый в теории ЗФ для функции распределения зародышей (см., например, [9]). Это приближение дает оценку времени жизни метастабильного состояния:

$$t_m \sim J^{-1} = \frac{1}{\omega} \int_1^{\infty} \frac{1}{D(r')} \exp\left\{\int_1^{r'} \frac{F(r'')}{D(r'')} dr''\right\} dr' \quad (48)$$

При получении (48) использовалось условие, что решение уравнения (47) должно при  $r \ll R$  совпадать с (46). Функции  $F(r)$  и  $D(r)$  определены в (44).

Для изучения статистики появления закритических зародышей введем вероятность  $P(r, t)$  того, что зародыш, имевший при  $t = 0$  размер  $r$ , за время  $t$  приобретает размер больший  $R$  ( $R \approx R_c$ ):

$$P(r, t) = \int_R^{\infty} P(r', r | t) dr' \quad (49)$$

Величина  $P(r, t)$  удовлетворяет второму уравнению Колмогорова [8]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\left(F(r) - \frac{dD(r)}{dr}\right) \frac{\partial P}{\partial r} + D(r) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \quad (50)$$

Уравнение (50) необходимо решать с начальным условием  $P(r, 0) = 0$  ( $I < r < R$ ) и граничными условиями  $P(R, t) = 1$ ,  $\frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=I} = 0$ ; последнее соответствует стационарности распределения зародышей размеров  $r \sim r_c \ll R$ . Вычислим моменты распределения  $P(r, t)$ :

$$T_n(r) = \int_0^{\infty} t^n \frac{\partial P}{\partial t} dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (51)$$

Величина  $\frac{\partial P}{\partial t}$  есть вероятность рождения закритического зародыша в единицу времени, если его размер при  $t = 0$  был  $r$ . Следовательно  $T_1(r)$  есть среднее время ожидания такого события;  $(T_2(r) - T_1^2(r))^{1/2}$  — дисперсия времени рождения закритического зародыша; и т.п. Действуя оператором  $\hat{T}_n = \int_0^{\infty} t^n \frac{\partial}{\partial t} dt$  на уравнение (50), получим уравнения для моментов:

$$D(r) \cdot \frac{d^2 T_n}{dr^2} - \left(F(r) - \frac{dD(r)}{dr}\right) \frac{dT_n}{dr} = -n T_{n-1}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (52)$$

Величина  $T_0(r) = P(r, \infty) = 1$ . Решая (52) с граничными условиями  $T_n(R) = 0$ ;  $\frac{dT_n}{dr} \Big|_{r=I} = 0$  ( $n \geq 1$ ), получим:

$$T_n(r) = n \int_r^R \frac{1}{D(r')} \exp\left[\int_1^{r'} \frac{F(r'')}{D(r'')} dr''\right] \cdot \left\{ \int_1^{r'} \exp\left[-\int_1^{r''} \frac{F(r''')}{D(r''')} dr'''\right] \cdot T_{n-1}(r'') dr'' \right\} dr' \quad (53)$$

Величины, характеризующие процесс релаксации метастабильного состояния, получим, умножив  $T_n(r)$  на концентрацию зародышей  $V^{-1} W_m(r)$  и проинтегрировав по размерам. Функция  $W_m(r)$  (46) быстро убывает с ростом  $r$ , функции  $T_n(r)$  также убывают,

поэтому основной вклад в интеграл дает область  $r \ll R_c$ . Величина  $T_1(r)$  при  $r \ll R_c$  содержит вклад области  $r' \leq R_c$ , который можно вычислить методом перевала, и вклад области  $R > R_c$ , связанный с ростом зародыша от  $R_c$  до  $R$ . Нас интересует лишь вклад области  $r' \leq R_c$ , равный при  $r \ll R_c$ :

$$T_1(r) = \frac{K}{D(R_c)} \exp\left(\frac{R_c^2}{3D}\right); \quad K = \int_1^{R_c} \exp\left(-\frac{F(r)}{D(r)}\right) dr \quad (54)$$

Для среднего времени рождения закритического зародыша в единице объема системы, которое мы считаем временем жизни метастабильного состояния  $t_m$ , получим:

$$\begin{aligned} t_m^n &= \omega K^2 \frac{R_c^2}{D} \exp\left(\frac{R_c^2}{3D}\right) \\ t_m^c &= \omega K^2 \frac{R_c^3}{D} \exp\left(\frac{R_c^2}{3D}\right) \end{aligned} \quad (55)$$

где первая формула соответствует случаю несохраняющегося параметра перехода, а вторая — сохраняющегося параметра перехода. В обоих случаях дисперсия времени жизни  $D_m^i \sim t_m^i$ , т.е. разброс времени релаксации метастабильного состояния наблюдаемый на эксперименте, будет порядка  $t_m$ . Вероятность релаксации системы за время  $t \ll t_m$  экспоненциально мала.

Уравнения динамики зародыша (16), (29) описывают и изменения формы ( $l \geq 2$ ) и положения центра тяжести ( $l = 1$ ). Анализ уравнений ( $l \geq 1$ ) прост, если учесть, что средний по углам радиус зародыша  $\xi_0^l(t)$  меняется медленно. Амплитуды вероятных флуктуаций величин  $\xi_0^l$  ( $l \geq 2$ ) порядка ширины границы зародыша, т.е. отклонения формы зародышей размеров  $\xi_0^l \gg I$  от сферической малы. При необходимости влияния флуктуаций формы на процесс роста зародыша можно учесть в следующем порядке теории. Уравнение для  $\xi_0^1(t)$  описывает броунирование зародыша как целого, при этом коэффициент диффузии  $\bar{D}$  в пространстве выражается через величину  $D$ , определенную в формулах (41) и (45). Выписывая результат в размерных единицах, получим:

$$\bar{D} = \frac{3}{16\pi} \frac{I}{|\mu| \varphi_s^2 r_c^3} \left(\frac{r_c}{r}\right)^2 = \frac{3}{16\pi} \left(\frac{di}{|\mu|}\right)^{1/2} \left(\frac{r_c}{r}\right)^2 \quad (56)$$

В области слабых флуктуаций  $di/|\mu| \ll 1$ ; размер рассматриваем-

ных зародышей  $\tau \gg \tau_c$ , так что коэффициент диффузии мал. В области сильных флуктуаций где  $\epsilon/\mu \approx 1$ , формула (56) применима для зародышей размеров  $\tau \gg \lambda$ , где  $\lambda$  — масштаб сглаживания, выбираемый так, что  $(T/\mu\psi_s^2\tau_c^3) \cdot (\tau_c/\lambda)^2 < 1$ . В области сильных флуктуаций коэффициент диффузии рассматриваемых зародышей также мал. Малость коэффициента диффузии и концентрации зародышей размеров  $\tau \gg \tau_c$  оправдывает пренебрежение вероятностью их слияния в процессе роста. Подвижность зародыша, согласно формуле Эйнштейна, есть  $\beta = \frac{D}{T}$ .

### 6. Обсуждение результатов:

Мы определим время жизни метастабильного состояния  $t_m$  как среднее время рождения закритического зародыша в единице объема системы. Запишем формулы (55) для двух различных случаев релаксации в размерных единицах. В случае системы без сохранения параметра  $\varphi(\vec{x}, t)$

$$t_m^H = \frac{128\pi\omega k^2}{3} \frac{1}{\mu|\mu|} \left(\frac{\mu\psi_s^2\tau_c^3}{T}\right) \left(\frac{R_c}{\tau_c}\right)^2 \exp\left[\frac{64\pi}{9} \left(\frac{\mu\psi_s^2\tau_c^3}{T}\right) \left(\frac{R_c}{\tau_c}\right)^2\right] \quad (57)$$

а в случае системы сохраняющимся  $\varphi(\vec{x}, t)$

$$t_m^C = \frac{256\pi\omega k^2}{3} \frac{c}{c^*|\mu|^2} \left(\frac{\mu\psi_s^2\tau_c^3}{T}\right) \left(\frac{R_c}{\tau_c}\right)^3 \exp\left[\frac{64\pi}{9} \left(\frac{\mu\psi_s^2\tau_c^3}{T}\right) \left(\frac{R_c}{\tau_c}\right)^2\right] \quad (58)$$

В обоих случаях критический размер

$$R_c = \frac{2}{3} \frac{|\mu|\psi_s}{|\mu|} \tau_c \quad (59)$$

где  $\tau_c$  — радиус корреляции. Формулы (57, 58) применимы для слабометастабильных состояний, когда  $R_c/\tau_c \gg 1$ , что совпадает с обычным в теории фазовых переходов условием слабого поля. В случае слабых флуктуаций выделенная нами величина  $|\mu|\psi_s^2\tau_c^3/T$  велика. Она выражается через число Гинзбурга

$$\frac{|\mu|\psi_s^2\tau_c^3}{T} = \left(\frac{|\tau|}{di}\right)^{1/2} \gg 1, \quad \tau = \frac{T-T_c}{T_c} \quad (60)$$

Слабые флуктуации описываются теорией Ландау, при этом  $\mu = \mu_0\tau$ . Другие коэффициенты эффективного гамильтониана  $g, c$  и кинети-

ческий коэффициент  $\Gamma_{H(c)}$  являются медленно меняющимися функциями температур;  $\varphi_s = \left(\frac{|\mu|}{g}\right)^{1/2}$ ,  $\tau_c = \left(\frac{c}{2|\mu|}\right)^{1/2}$

При приближении к критической точке  $\tau \rightarrow 0$  условие  $\frac{|\tau|}{di} \gg 1$  нарушается, флуктуации перестают быть слабыми. Как было показано при анализе случая сильных флуктуаций, полученные формулы (57, 58) можно сохранить, заменив в них величины  $\Gamma, c, \mu, g$  на перенормированные значения, имеющие определенные масштабные размерности. Свойство подобия флуктуаций имеет место, как известно [6], для масштабов  $\tau \leq \tau_c$ . В метастабильном состоянии распределение таких флуктуаций определяется тем же эффективным гамильтонианом, что и в стабильной фазе, поэтому поведение величин при масштабных преобразованиях и их критические индексы одинаковы в обоих случаях. Критический размер  $R_c$  имеет ту же масштабную размерность, что и радиус корреляции  $\tau_c$ , так как комбинация  $\frac{|\mu^*|\psi_s}{|\mu|}$  масштабный инвариант. Отношение  $R_c/\tau_c = \text{const} \cdot S$  где  $S = \frac{|\tau|^{d+\Delta_r}}{|\mu|}$  масштабно безразмерно. Величина

$$\frac{|\mu^*|\psi_s^2\tau_c^3}{T} = \rho(s) \quad \rho(\infty) = \rho_0 \quad (61)$$

функция масштабноинвариантного параметра. Удобно поэтому использовать в качестве координат линии  $|\tau| = \text{const}$  и  $S = \text{const}$ . Изменение  $t_m$  при движении вдоль линии  $|\tau| = \text{const}$  связано с зависимостью  $R_c(h)$

$$t_m^H = \frac{128\pi\omega k^2}{3} \frac{1}{\mu^*|\mu|} \left(\frac{\mu^*\psi_s^2\tau_c^3}{T}\right) \left(\frac{2|\mu^*\psi_s}{3|\mu|}\right)^2 \exp\left[\frac{64\pi}{9} \left(\frac{\mu^*\psi_s^2\tau_c^3}{T}\right) \left(\frac{2|\mu^*\psi_s}{3|\mu|}\right)^2\right] \quad (62)$$

$$t_m^C = \frac{256\pi\omega k^2}{3} \frac{c^*}{c^*|\mu^*|^2} \left(\frac{\mu^*\psi_s^2\tau_c^3}{T}\right) \left(\frac{2|\mu^*\psi_s}{3|\mu|}\right)^3 \exp\left[\frac{64\pi}{9} \left(\frac{\mu^*\psi_s^2\tau_c^3}{T}\right) \left(\frac{2|\mu^*\psi_s}{3|\mu|}\right)^2\right]$$

При движении вдоль линии  $S = \text{const}$  масштабно инвариантный показатель экспоненты не изменяется. Изменение определяет масштабно неинвариантный множитель в предэкспоненте. В случае системы с несохраняющимся параметром это множитель  $\Gamma_H^*|\mu^*|$ ;  $|\mu^*| \sim |\tau|^\delta$ , ренормированный кинетический коэффициент  $\Gamma_H \sim |\tau|^{d+\Delta_r}$ , тогда

$$t_m^H = \text{const} |\tau|^{-(d+\Delta_r)} \rho(s) \left(\frac{R_c}{\tau_c}\right)^2 \exp\left[\frac{64\pi}{9} \rho(s) \left(\frac{R_c}{\tau_c}\right)^2\right] \quad (63)$$

$$\Delta_r = \frac{6}{9} \ln(4/3)$$

В случае сохраняющегося параметра перехода кинетический коэффициент  $\Gamma_c$  не ренормируется, и  $c \sim |\tau|^{-\gamma-2\nu}$ , что дает

$$t_m^c = \text{const} |\tau|^{-(\gamma+2\nu)} \rho(s) \left(\frac{R_c}{\xi_c}\right)^3 \exp\left[\frac{64\pi}{9} \rho(s) \left(\frac{R_c}{\xi_c}\right)^2\right] \quad (64)$$

В области сильных флуктуаций среднее время жизни метастабильного состояния имеет определенную масштабную размерность, зависящую от свойств сохранения релаксирующей системы, и критический индекс  $t_m$  определен формулами (63) и (64).

## Л и т е р а т у р а

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. "Статистическая физика" М. (1977).
2. Зельдович Я.Б. ЖЭТФ 12, 525 (1942).
3. Скрипов В.П. "Метастабильная жидкость" М., "Наука" (1972).
4. Binder K., Stauffer D. "Statistical theory of nucleation, condensation and coagulation". Advances in Physics (1976), v. 25 No 1 343.
5. Паташинский А.З., Покровский В.Л. УФН, т.121, вып.1, 55 (1977).
6. Паташинский А.З., Покровский В.Л. "Флуктуационная теория фазовых переходов" М., "Наука" (1975).
7. Паташинский А.З. "Statistical description of metastable state" Препринт ИЯФ 78-44 Новосибирск (1978).
8. Гнеденко Б. "Курс теории вероятности" М., (1961).
9. Каган Ю. ЖФХ 34, 92 (1960).