47

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

И.Н.Иванченко, Э.А.Кураев, В.С.Панин,
С.И.Эйдельман

ПРОЦЕССЫ $e^+e^- \to e^+e^-\gamma, \mu^+\mu^-\gamma, \gamma\gamma\gamma$ С ВЫЛЕТОМ ЧАСТИЦ НА БОЛЬШИЕ УГЛЫ

ПРЕПРИНТ И Я Ф 78 - 9

Новосибирск

ПРОЦЕССЫ $e^+e^- \to e^+e^-\gamma, \mu^+\mu^-\gamma, \gamma\gamma\gamma$

С ВЫЛЕТОМ ЧАСТИЦ НА БОЛЬШИЕ УГЛЫ.

И.Н.Иванченко, Э.А.Кураев, В.С.Панин, С.И.Эйдельман

А Н Н О Т А Ц И Я

Приведены аналитические выражения для дифференциальных по энергиям конечных частиц распределений для процессов $e^+e^- \to e^+e^-\gamma$, $\mu^+\mu^-\gamma$, $\gamma\gamma\gamma$ на большие углы при высоких энергиях в постановке, когда плоскость конечных частиц в системе центра инерции наклонена к оси пучков под углом ψ , большим некоторого $\psi_0 < \psi < \pi/2$. Для процесса $e^+e^- \to \gamma\gamma\gamma$ рассмотрена постановка, когда регистрируются все три фотона, летящие вне конуса раствора $2\psi_0$ вокруг оси пучков, отличная от постановки с плоскостью. Для постановки "с плоскостью" даны аналитические выражения для полных сечений.

Повышение точности экспериментов на ускорителях со встречными e^+e^- пучками позволяет предположить, что в ближайшее время будет осуществлена проверка квантовой электродинамики (КЭД) в процессах третьего порядка теории возмущений: $e^+e^-\to e^+e^-\gamma$, $\mu^+\mu^-\gamma$, $\gamma\gamma\gamma$. Интерес к этим процессам обусловлен и тем, что в некоторых экспериментах они являются фоновыми и должны быть выделены из экспериментальной информации. Например, процесс $e^+e^-\to\gamma\gamma\gamma$ имитирует процессы $e^+e^-\to\pi^0\gamma$ и $e^+e^-\to\eta\gamma$.

Вычисление сечений указанных реакций даже в борновском приближении является весьма громоздкой задачей и проводится обычно численно с помощью ЭВМ /I-3/. Настоящая работа посвящена изучению этих реакций с вылетом частиц на большие углы, причем большая часть результатов получена в аналитическом виде.

В п.I в борновском приближении найдены аналитические выражения для распределений по энергиям конечных частиц (Далитц-плоскость), а также "полные" сечения для случая, когда плоскость конечных частиц (здесь и далее рассмотрение ведется в системе центра инерции начальных частиц) наклонена к оси пучков ($\vec{P}_-$) под углом ψ, большим некоторого ψ_0 :

$$\psi_0<\psi<\pi/2\ , \quad m^2/s \ll \psi_0 \leq \pi/2\ , \quad s=4\varepsilon^2.$$

При этом оказывается, что дифференциальные по долям энергий конечных частиц $y_\pm$, y сечения пропорциональны универсальным, не зависящим от начальной энергии ε пучка, функциям ψ_0, y_i, а зависимость от энергии пучков дается общим множителем α^3/s, $\alpha = 1/137$, $s \doteq 4\varepsilon^2$. "Полные" сечения аналогичным образом зависят от s, но содержат еще два дополнительных параметра: Δ – минимальный угол расколлинеарности заряженных частиц и $\eta=\varepsilon_{min}/\varepsilon$ – отношение порога их регистрации к энергии пучка (введение этих параметров необходимо для того, чтобы можно было говорить о плоскости конечных частиц). Для процесса $e^+e^-\to\gamma\gamma\gamma$ достаточно ввести лишь один дополнительный параметр $\eta=\omega_{min}/\varepsilon$.

В п.2 рассмотрена реакция $e^+e^-\to\gamma\gamma\gamma$ в постановке, когда все три фотона имеют угол вылета относительно оси пучков больше некоторого ψ_0. Для этого случая получены дифференциальное и полное сечения, а также инклюзивное по энергии одного фотона сечение.

Точность всех полученных результатов определяется поправками α^4 и составляет I + $O(\frac{\alpha}{\pi}\ln\frac{\varepsilon}{m_e})$.

В приложении I приведены различные выражения для фазового объема конечных частиц, которые могут оказаться полезными при рассмотрении трехчастичных реакций.

В приложении 2 содержатся некоторые интегралы по φ, ψ, встречающиеся при интегрировании дифференциальных сечений.

В приложении 3 приведено развернутое выражение для дифференциального сечения процесса $e^+e^-\to e^+e^-\gamma$ на большие углы.

I. Фазовый объем конечных частиц (далее всюду предполагается, что энергия пучков ε много больше масс конечных частиц) может быть преобразован к виду (см.приложение I):

$$\int d\Gamma=\int\frac{d^3q_1\,d^3q_2\,d^3q_3}{2\varepsilon_1\,2\varepsilon_2\,2\varepsilon_3}\frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^9}\delta^{(4)}(p_++p_--q_1-q_2-q_3)=\frac{s}{(4\pi)^4}\int_0^1 dy_1\int_0^1 dy_2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\psi_0}^{\pi/2}\cos\psi\,d\psi \qquad (I.I)$$

где $y_{1,2}=\varepsilon_{1,2}/\varepsilon$, φ – азимутальный угол в плоскости конечных частиц.

Сечения рассматриваемых процессов можно записать в виде:

$$d\sigma=\frac{1}{8s}\frac{(4\pi\alpha)^3}{s}R\,d\Gamma=\frac{\alpha^3}{2\pi s}R\,dy_1\,dy_2\,d\varphi\cdot\cos\psi\,d\psi, \qquad (I.2a)$$

где величина R пропорциональна квадрату модуля матричного элемента, просуммированного по спиновым состояниям всех частиц:

$$R=\frac{s}{16(4\pi\alpha)^3}\sum_{сп}|M|^2. \qquad (I.2б)$$

В силу законов сохранения

$$y_1+y_2+y_3=2\,,\quad \vec{q}_1+\vec{q}_2+\vec{q}_3=0,$$

задание энергией конечных частиц фокусирует углы между ними:

$$\cos(\widehat{\vec{q}_1,\vec{q}_2})=1-2\frac{1-y_3}{y_1y_2}.$$

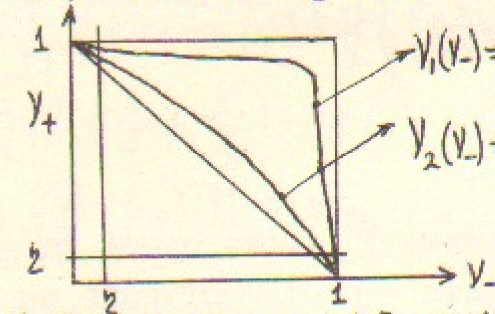
Ограничение на угол расколлинеарности

$$\pi-(\widehat{\vec{q}_+,\vec{q}_-})>\Delta\,,\quad (\widehat{\vec{q}_+,\vec{q}_-})>\Delta\,,\quad \Delta\ll 1,$$

можно переписать в терминах долей энергий:

$$(1-y_+)(1-y_-)(1-y)\geq\frac{\Delta^2}{4}y_+^2y_-^2 \qquad (I.3)$$

Условие $y_\pm>\zeta$, определяющее порог регистрации заряженной частицы, вместе с (I.3) дает допустимую область изменения $y_\pm$, y на Далитц-плоскости (рис.I):



$$y_1(y_-)=\frac{1}{2}(1-y_-)\left(2-y_-+y_-\sqrt{1-\Delta^2}\right)\left(1-y_-+\frac{\Delta^2}{4}y_-^2\right)^{-1}$$

$$y_2(y_-)=\frac{1}{2}(1-y_-)\left(2-y_--y_-\sqrt{1-\Delta^2}\right)\left(1-y_-+\frac{\Delta^2}{4}y_-^2\right)^{-1}$$

Рис. 1

А) Для процесса $e^+e^-\to\gamma\gamma\gamma$ область изменения y_i дается условием

$$\zeta<y_i<1\,,\qquad \sum y_i=2\,, \qquad (I.4)$$

а величина R имеет вид /4,5/:

$$R=\frac{s}{16(4\pi\alpha)^3}\sum|M^{e^+e^-\to\gamma\gamma\gamma}|^2=8\left[\frac{y_3^2(1+z_3^2)}{y_1^2y_2^2(1-z_1^2)(1-z_2^2)}+2\,cycl.\,perm.\right] \qquad (I.5)$$

$z_i=\cos(\widehat{\vec{p}_-,\vec{q}_i})$ – косинусы углов между фотонами и осью ($\vec{p}_-$) пучков. Величины z_i, удовлетворяющие в силу законов сохранения условию $z_1y_1+z_2y_2+z_3y_3=0$, удобно выразить через φ и ψ:

$$z_1=\cos\psi\cos\varphi\,,\ z_2=\cos\psi\cos(\varphi-(\widehat{\vec{q}_2,\vec{q}_1})),\ z_3=\cos\psi\cos(\varphi+(\widehat{\vec{q}_3,\vec{q}_1})).$$

Интегрируя по φ и ψ (см.приложение 2), получим распределение в Далитц-плоскости:

$$\frac{d^2\sigma^{e^+e^-\to\gamma\gamma\gamma}}{dy_1\,dy_2}=\frac{2\alpha^3}{3s}\left[\Phi_{123}+\Phi_{312}+\Phi_{231}\right], \qquad (I.6)$$

где

$$\Phi_{123}=\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1^2y_2^2}\ln(1-z^2)+\frac{y_3^2+(y_1+y_2)^2}{2y_1y_2(1-y_3)}\ln\frac{1-z^2\frac{(1-y_1)(1-y_2)}{y_1y_2}}{1-z^2}+\frac{y_3^2+(y_1-y_2)^2}{2y_1y_2(1-y_1)(1-y_2)}\ln\frac{1-z^2\frac{(1-y_3)}{y_1y_2}}{1-z^2}, \qquad (I.7)$$

$z=\cos\psi$,

а величины Φ_{312} и Φ_{231} получаются из Φ_{123} циклической перестановкой. В (I.6) внесён множитель $1/3!$, учитывающий тождественность фотонов. Интегрирование выражения (I.6) по области (I.4) дает " полное" сечение трехквантовой аннигиляции в рассматриваемой постановке:

$$\sigma^{e^+e^-\to\gamma\gamma\gamma}(z,y)=\frac{2\alpha^3}{s}\Big[\Big(2\int_0^{z^2}\frac{dx}{x}\ln(1-x)-\frac{3}{2}\ln^2(1-z^2)-2\ln(1-z^2)\Big)\ln y-\frac{1}{2}\ln^2(1-z^2)+$$
$$+\frac{\pi^2}{6}\Big(\frac{2z^2}{1-z^2}-\ln(1-z^2)\Big)+\frac{1}{6}\ln^3(1-z^2)+\Big(\frac{2}{1-z^2}+2\ln\frac{z^2}{1-z^2}\Big)\int_0^{z^2}\frac{dx}{x}\ln(1-x)+ \qquad (I.8)$$
$$+\frac{3}{2}\int_0^{z^2}\frac{dx}{x}\ln^2(1-x)-2\int_0^{z^2}\frac{dx}{x}\ln x\ln(1-x)\Big].$$

Б) Для процесса $e^+e^-\to\mu^+\mu^-\gamma$ величина R есть сумма зарядово-четной R_{even} и нечетной R_{odd} части – соответственно не меняющей и меняющей знак при перестановке импульсов мезонов $q_+\leftrightarrow q_-$ /I,6/. Ясно, что R_{odd} не дает вклада в распределение по энергиям, т.к. $R_{odd}(\varphi,\psi)=-R_{odd}(\varphi+\pi,\pi-\psi)$. В пределе больших энергий с учетом $\psi_0\sim 1$, R_{even} упрощается и принимает вид /I,6/:

$$R_{even}=\frac{1}{2(1-y_+)(1-y_-)}\big[y_+^2(1+\cos^2\psi\cos^2(\varphi+\theta_+))+y_-^2(1+\cos^2\psi\cos^2(\varphi-\theta_-))\big]-\frac{2}{1-y}+\frac{4}{y^2(1-y)}\big[y^2+$$
$$+2(1-y)-y_+y_-(1+\cos^2\psi\cos(\varphi-\theta_-)\cos(\varphi+\theta_+))\big]\big[1-\cos^2\psi\cos^2\varphi\big]^{-1},\quad \cos\theta_\pm=1-2\frac{(1-y_\mp)}{yy_\pm}.$$

Интегрирование по φ и ψ дает

$$\frac{d^2\sigma^{e^+e^-\to\mu^+\mu^-\gamma}}{dy_+dy_-}=\frac{\alpha^3}{2s}\Big\{\Big[\frac{2-2y+y^2}{2(1-y_+)(1-y_-)}+y_+y_-\Big(\frac{32}{y^4}+\frac{4}{y^2(1-y)}\Big)-1-\frac{2}{1-y}-\frac{8(2-y)^2}{y^4}\Big]\phi+ \qquad (I.10)$$
$$+\Big[-\frac{8y_+y_-(y^2-2y+2)}{y^2(1-y)}+\frac{4}{1-y}+\frac{16(1-y+y^2)}{y^4}\Big]L-\frac{16(1-y_+)(1-y_-)}{y^4}z^2+\frac{1}{4}\Big(-2+\frac{2-2y+y^2}{(1-y_+)(1-y_-)}\Big)\Psi\Big\},$$

где $\phi=2(1-s_0)$, $L=-\ln(1-z^2)$, $\Psi=\frac{2}{3}(1-s_0)^2(2+s_0)$, $s_0=\sin\psi_0$, $z=\cos\psi_0$.

Полное сечение получается интегрированием (I.10) по области, изображенной на рис.I, и имеет вид:

$$\sigma^{e^+e^-\to\mu^+\mu^-\gamma}=\frac{\alpha^3}{2s}\Big\{\Big(\frac{1}{2}\phi+\frac{1}{4}\Psi\Big)\ln^2\frac{4}{\Delta^2}+\Big(-\frac{13}{6}\phi+\frac{16}{3}L-\frac{4}{3}z^2-\frac{3}{4}\Psi\Big)\ln\frac{4}{\Delta^2}+$$
$$+\Big(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\Big)\phi-\frac{8}{3}L+\frac{20}{9}z^2+\Big(\frac{7}{8}+\frac{\pi^2}{12}\Big)\Psi\Big\}. \qquad (I.11)$$

В) Для процесса $e^+e^-\to e^+e^-\gamma$ величина R дается выражением /7,8/ (см. также приложение 3):

$$R=\frac{s}{16(4\pi\alpha)^3}\sum_{\text{сп}}\big|M^{e^+e^-\to e^+e^-\gamma}\big|^2, \qquad (1.12)$$

$$\frac{1}{s}R=-\frac{1}{2}uu_1(a+b)^2-\frac{1}{2}ss_1a^2-\frac{1}{2}tt_1b^2+(a+b)\Big[(q_3-q_2)u\Big(\chi_+\Big(\frac{1}{s}+\frac{1}{t_1}\Big)+\chi'_-\Big(\frac{1}{t}+\frac{1}{s_1}\Big)\Big)+$$
$$+(q_2-q_4)u_1\Big(\chi_-\Big(\frac{1}{t}+\frac{1}{s}\Big)+\chi'_+\Big(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{s_1}\Big)\Big)\Big]+a\Big[-q_3s\Big(\frac{\chi'_+}{t_1}+\frac{\chi'_-}{t}\Big)+q_4s_1\Big(\frac{\chi_+}{t_1}+\frac{\chi_-}{t}\Big)\Big]+$$
$$+b\Big[q_1t_1\Big(\frac{\chi_-}{s}-\frac{\chi'_-}{s_1}\Big)+q_2t\Big(\frac{\chi_+}{s}-\frac{\chi'_+}{s_1}\Big)\Big]-u_1\Big[\sqrt{\frac{\chi'_+}{\chi_-}}\Big(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{s_1}\Big)+\sqrt{\frac{\chi_-}{\chi'_+}}\Big(\frac{1}{t}+\frac{1}{s}\Big)\Big]^2-u\Big[\sqrt{\frac{\chi_+}{\chi'_-}}\Big(\frac{1}{t_1}+$$
$$+\frac{1}{s}\Big)+\sqrt{\frac{\chi'_-}{\chi_+}}\Big(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{t}\Big)\Big]^2+s_1\Big[\frac{1}{t_1}\sqrt{\frac{\chi_+}{\chi_-}}+\frac{1}{t}\sqrt{\frac{\chi_-}{\chi_+}}\Big]^2+s\Big[\frac{1}{t_1}\sqrt{\frac{\chi'_+}{\chi'_-}}+\frac{1}{t}\sqrt{\frac{\chi'_-}{\chi'_+}}\Big]^2-t\Big[\frac{1}{s}\sqrt{\frac{\chi_+}{\chi'_+}}-\frac{1}{s_1}\sqrt{\frac{\chi'_+}{\chi_+}}\Big]^2-t_1\Big[\frac{1}{s}\sqrt{\frac{\chi_-}{\chi'_-}}-\frac{1}{s_1}\sqrt{\frac{\chi'_-}{\chi_-}}\Big]^2,$$

$$a=\frac{1}{t_1}q_1+\frac{1}{t}q_2,\quad b=\frac{1}{s}q_3+\frac{1}{s_1}q_4,\quad q_1=\frac{p'_-}{\chi'_-}-\frac{p_-}{\chi_-},\quad q_2=\frac{p_+}{\chi_+}-\frac{p'_+}{\chi'_+},\quad q_3=\frac{p'_-}{\chi'_-}-\frac{p'_+}{\chi'_+},\quad q_4=\frac{p_+}{\chi_+}-\frac{p_-}{\chi_-},$$

$$\chi_\pm=kp_\pm,\ \chi'_\pm=kp'_\pm,\ t=(p_--p'_-)^2,\ t_1=(p_+-p'_+)^2,\ u=(p_--p'_+)^2,\ u_1=(p_+-p'_-)^2,\ s_1=(p'_++p'_-)^2,\ s=(p_++p_-)^2.$$

В силу законов сохранения $p_++p_-=p'_++p'_-+k$ выполняется следующее соотношение:

$$t+t_1+u+u_1+s+s_1=0.$$

Довольно громоздкое интегрирование по φ и ψ приводит к следующему распределению по долям энергий электрона и позитрона:

$$\frac{d^2\sigma^{e^+e^-\to e^+e^-\gamma}}{dy_+dy_-}=\frac{\alpha^3}{2s}\Big\{\Big[\frac{32(1-y_+)(1-y_-)}{y^4}+\frac{4y_+y_-}{y^2(1-y)}-\frac{4(1-y)(2-y)^2}{y_+^2y_-^2}+\frac{4y(1-y)}{y_+y_-}+\frac{9(y^2-2y+2)}{2(1-y_+)(1-y_-)}-\frac{24}{y^2}+\frac{8}{y}-1-\frac{2}{1-y}\Big]\phi+$$
$$+\frac{1}{4}\Big[-2+\frac{y^2-2y+2}{(1-y_+)(1-y_-)}\Big]\Psi+\Big[-\frac{16(1-y_+)(1-y_-)}{y^4}+\frac{8(2-y)}{y^2}+\frac{2(1-y)(2-y)^2}{y_+^2y_-^2}-\frac{4(1-y)}{y_+y_-}\Big]z^2+\Big[\frac{2(1-y)(2-y)^2}{y_+^2y_-^2}+\frac{4(1-y)^2}{y_+y_-}+\Big(-\frac{6}{1-y}-16y^2+$$
$$+40y-38\Big)\frac{1}{(1-y_+)(1-y_-)}-\frac{16(1-y_+)(1-y_-)}{y^4}-\frac{8y_+y_-}{y^2(1-y)}+\frac{48}{y^2}-\frac{4}{y}+8+\frac{12}{1-y}\Big]L+\Big[\Big(\frac{8(y^2-2y+2)}{y^2(1-y_+)}+$$
$$+\frac{4}{1-y_-}\Big(1+\frac{2}{1-y}+\frac{4}{y^2}\Big)+\frac{4y_+}{y(1-y)}-\frac{8}{1-y}-\frac{16}{y}\Big)L^{(+)}+symm\Big]+ \qquad (I.13)$$
$$+\Big[\Big(\frac{8(y^2-2y+2)}{(1-y)(1-y_-)^2}+\frac{1}{1-y_-}\Big(-\frac{16(1-y)}{y^2}-\frac{12}{1-y}-12+4y\Big)+\frac{4}{y^2(1-y_+)}(2y^3-7y^2+8y-4)+$$
$$+\frac{4y_-+8}{y(1-y)}-4\Big)L^{(-)}+symm\Big]\Big\},\quad L^{(+)}=\ln\frac{1-z^2\frac{(1-y)(1-y_-)}{yy_-}}{1-z^2},\quad L^{(-)}=\ln\frac{1-z^2\frac{(1-y_+)}{yy_-}}{1-z^2}.$$

Значком $symm$ мы обозначаем член, получающийся из предыдущего с заменой $y_+\leftrightarrow y_-$. Наконец, приведем выражение для"полного" сечения:

$$\sigma^{e^+e^-\to e^+e^-\gamma} = \frac{\alpha^3}{2s}\Big\{\Big[\frac{9}{2}\phi+\frac{1}{4}\psi+\frac{8z^2}{1-z^2}+6\ln(1-z^2)\Big]\ln^2\Big(\frac{4}{\Delta^2}\Big)+8\ln\eta\ln\frac{4}{\Delta^2}\ln(1-z^2)+$$
$$+\Big(-\frac{133}{6}\phi-\frac{3}{4}\psi+\frac{20}{3}z^2-\frac{220}{3}\ln(1-z^2)-\frac{8z^2}{1-z^2}+\frac{16}{1-z^2}\ln(1-z^2)+32\int_0^{z^2}\frac{dx}{x}\ln(1-x)\Big)\ln\frac{4}{\Delta^2}+$$
$$+\frac{\pi^2}{6}\Big(9\phi+\frac{1}{2}\psi+84\ln(1-z^2)+\frac{48z^2}{1-z^2}+4z^4+24z^2\Big)+\frac{143}{4}\phi+\frac{7}{8}\psi-\frac{178}{9}z^2+ \qquad \text{(I.I4)}$$
$$+\frac{8z^2}{1-z^2}+4z^2+4\ln^3(1-z^2)+40\int_0^{z^2}\frac{dx}{x}\ln^2(1-x)+\Big(\frac{16z^2-8}{1-z^2}-22+12z^2+2z^4\Big)\ln^2(1-z^2)+$$
$$+\Big(-\frac{8}{1-z^2}+4z^2-\frac{10}{3}\Big)\ln(1-z^2)+\Big(24(1-z^2)-4z^4-40\ln(1-z^2)-\frac{32z^2}{1-z^2}\Big)\int_0^{z^2}\frac{dx}{x}\ln(1-x)\Big\}.$$

Обсудим полученные результаты. Видно, что распределения в Далитц-плоскости для всех трех процессов не содержат членов $\sim(1-z^2)^{-1}$. Для $e^+e^-\to\gamma\gamma\gamma$ и $e^+e^-\to\mu^+\mu^-\gamma$ это является следствием того, что сечение падает с ростом энергии. Сечение реакции $e^+e^-\to e^+e^-\gamma$ не падает с ростом энергии, причем основной вклад в него дает область малых переданных импульсов $-t(-t_1)\sim m^6/s^2$ /9, I0/. Мы исключаем эту область, выбирая $\psi_0\sim 1$. Члены $\sim(1-z^2)^{-1}$ происходят от интегрирования выражений в $R\sim t^{-2}(t_1^{-2})$, но в силу сохранения тока при $t\to 0$ сингулярность t^{-2} в полной сумме компенсируется до t^{-1}, что и объясняет отсутствие членов $\sim(1-z^2)^{-1}$.

На рис.2 показана зависимость "полных" сечений рассмотренных процессов от z. Как дифференциальные, так и "полные" сечения являются плавными функциями z и стремятся к 0 при $z\to 0$. При $z\to$ I ($\psi_0\to 0$) формулы становятся неприменимыми. Область допустимого изменения параметров z, η, Δ определяется условием

$$\frac{m^2}{s}\ll\eta\le\Delta\ll 1-z^2.$$

2. Для эксперимента удобной является постановка, когда регистрируются конечные частицы, полярные углы которых по отношению к оси пучков больше некоторого ψ_0, т.е. летящие вне конуса раствора $2\psi_0$ с осью вдоль пучков. Заметим, что такая постановка отличается от рассмотренной выше - когда плоскость конечных частиц наклонена к оси пучков под углом большим ψ_0, а именно: в постановке с плоскостью теряется часть статистики - события, отвечающие случаю, когда плоскость наклонена к оси пучка под

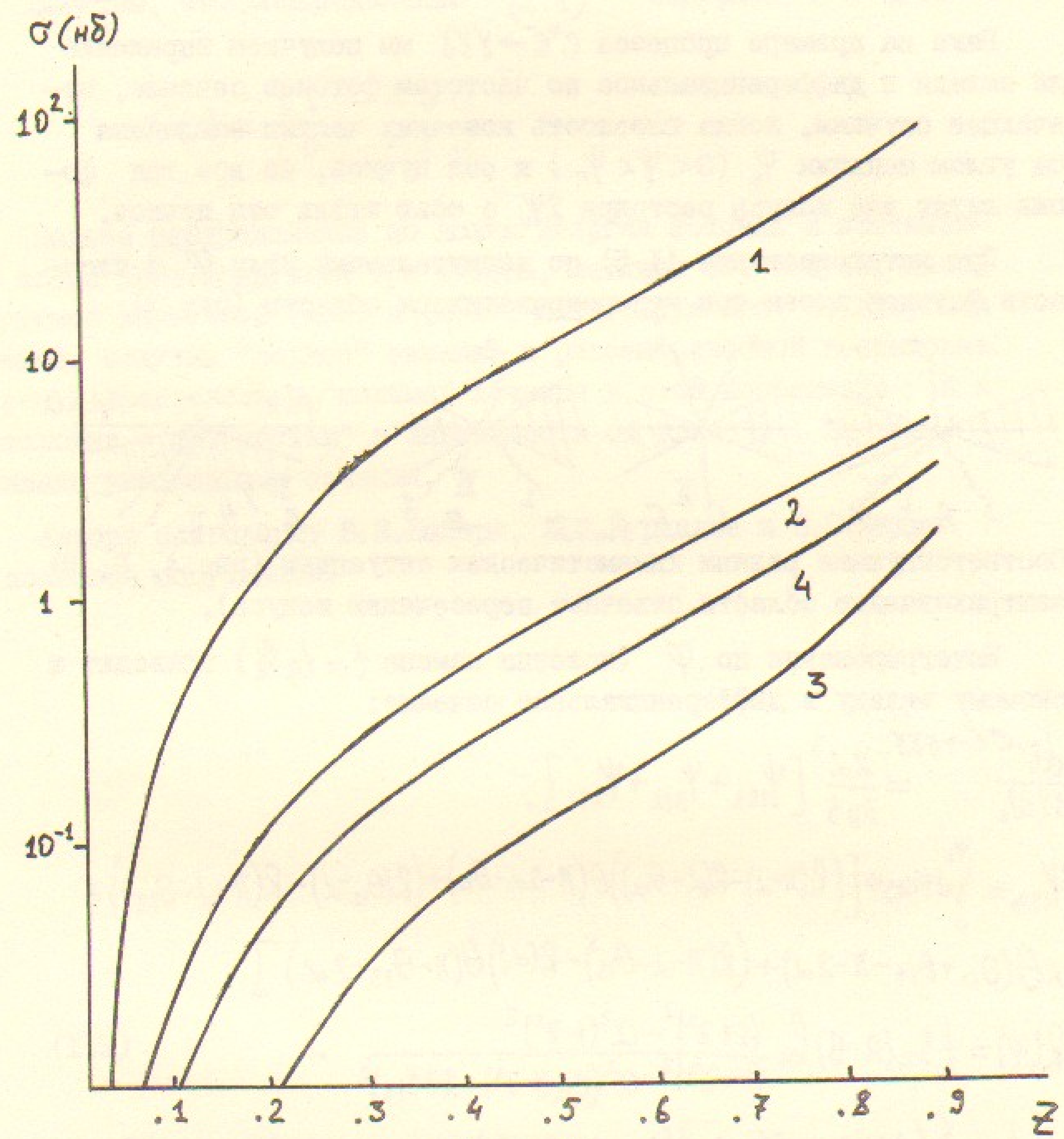


Рис. 2

Полные сечения в постановке "с плоскостью" для процессов $e^+e^-\to e^+e^-\gamma$ (кривая I), $e^+e^-\to\mu^+\mu^-\gamma$ (кривая 2), $e^+e^-\to\gamma\gamma\gamma$ (кривая 3), и в постановке "с конусом" для процесса $e^+e^-\to\gamma\gamma\gamma$ (кривая 4), при $2\varepsilon=1$ Гэв, $\Delta=0.05$, $\eta=0.05$.

углом меньшим ψ_0 (пересекает конус), однако частицы не попадают в конус.

Ниже на примере процесса $e^+e^- \to \gamma\gamma\gamma$ мы получаем выражение для вклада в дифференциальное по частотам фотонов сечение, отвечающее случаям, когда плоскость конечных частиц наклонена под углом меньшим ψ_0 $(0<\psi<\psi_0)$ к оси пучков, но все три фотона летят вне конуса растовра $2\psi_0$ с осью вдоль оси пучков.

При интегрировании (I.5) по азимутальному углу φ в плоскости фотонов имеем три неперекрывающиеся области (рис.3):

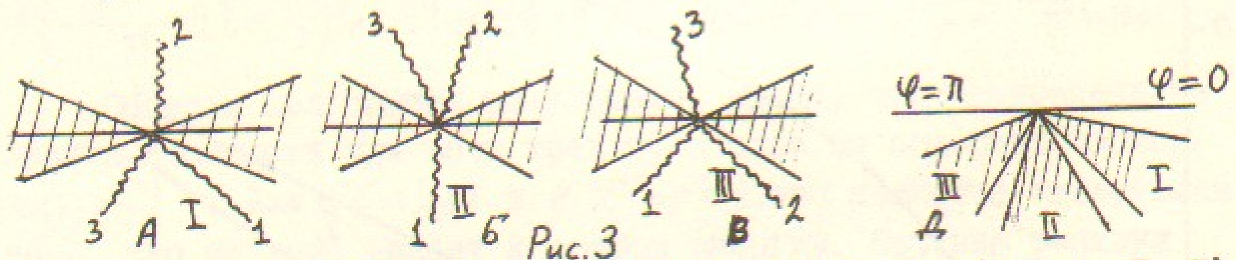


Рис.3

Соответствующие разным кинематическим ситуациям (рис.А, Б, В) (заштрихованные области отвечают пересечению конуса).

Интегрирование по φ (полезна замена $t=tg\frac{\varphi}{2}$) приводит к искомому вкладу в дифференциальное сечение:

$$\frac{d\sigma^{e^+e^-\to\gamma\gamma\gamma}}{dy_1 dy_2} = \frac{2\alpha^3}{3\pi s}\left[\Psi_{123}+\Psi_{312}+\Psi_{231}\right],$$

$$\Psi_{123}=\int_0^{\psi_0} d\psi\cos\psi\Big[\big(R(\pi-\alpha)-R(\alpha+\theta_{12})\big)\theta(\pi-2\alpha-\theta_{12})+\big(R(\theta_{12}-\alpha)-R(\pi+\alpha-\theta_{13})\big)\times$$
$$\times\theta(\theta_{12}+\theta_{13}-\pi-2\alpha)+\big(R(\pi-\alpha-\theta_{13})-R(\alpha)\big)\theta(\pi-\theta_{13}-2\alpha)\Big],$$

$$R(\varphi)=\frac{1}{2}s_{12}(A-B)\ln\frac{(1+z^2)^2-a^2(1-z^2)^2}{(1+z^2)^2-a^2(c_{12}(1-z^2)+2zs_{12})^2}+ \qquad (2.I)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\left\{\big(A(1-c_{12})+B(1+c_{12})\big)(\alpha_++\alpha_-+\beta_++\beta_-)-\frac{1}{y_1^2}(\alpha_++\alpha_-)-\frac{1}{y_2^2}(\beta_++\beta_-)\right\},$$

$$a=\cos\psi,\ c_{12}=\cos\theta_{12}=1-2\frac{1-y_3}{y_1y_2},\ s_{12}=\sin\theta_{12},\ \alpha_\pm=\mathrm{arctg}\left(z\sqrt{\frac{1\pm a}{1\mp a}}\right),\ z=tg\frac{\varphi}{2},$$

$$\beta_\pm=\mathrm{arctg}\frac{z(1\pm ac_{12})\mp as_{12}}{\sqrt{1-a^2}},\ A=\frac{y_3^2+(y_1+y_2)^2}{4y_1^2y_2^2(1-c_{12})\left(1-a^2\frac{1+c_{12}}{2}\right)},\ B=\frac{y_3^2+(y_1-y_2)^2}{4y_1^2y_2^2(1+c_{12})\left(1-a^2\frac{1-c_{12}}{2}\right)}.$$

Оставшееся однократное интегрирование по ψ удобнее выполнить численно. Численный расчет показывает, что дифференциальное по y_1, y_2 сечение в постановке "с конусом" в среднем в два раза

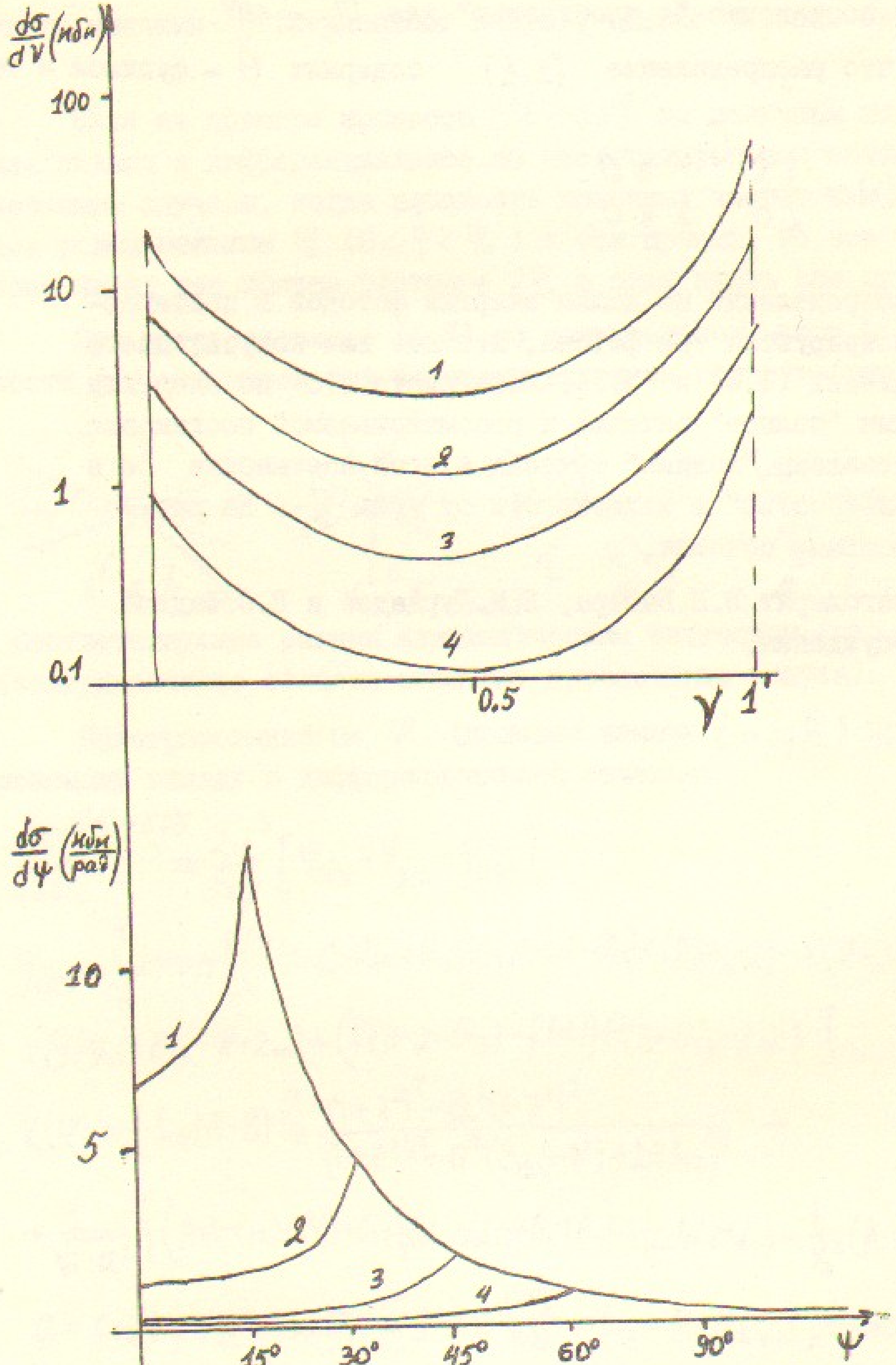
больше, чем в постановке "с плоскостью" для $\psi_0 = 45^\circ$.

Заметим, что распределение (2.1) содержит θ - функцию

$$\theta(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0.\end{cases}$$

Полное распределение по долям энергии фотонов в постановке, когда регистрируются три фотона, летящие вне конуса, дается суммой выражений (I.6) и (2.I). Интегрируя его по энергиям фотонов, получим "полное" сечение в рассматриваемой постановке. На рис.2 представлены "полные" сечения в этой постановке и в "постановке с плоскостью" в зависимости от угла ψ_0. На рис.4 показаны инклюзивные сечения.

Авторы благодарят В.Н.Байера, Л.М.Курдадзе и В.С.Фадина за полезные обсуждения.



1 – $\psi_0 = 15°$, 2 – $\psi_0 = 30°$, 3 – $\psi_0 = 45°$, 4 – $\psi_0 = 60°$.

Рис 4. Иллюзивные сечения по y и по ψ (угол между плоскостью разлета и осью пучков) для процесса $e^+e^- \to \gamma\gamma\gamma$ в постановке "с конусом".

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Приведем некоторые выражения для фазового объема трех конечных частиц в системе центра масс.

$$d\Gamma = \frac{d^3q_1\, d^3q_2\, d^3q_3}{2\varepsilon_1\, 2\varepsilon_2\, 2\varepsilon_3} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^9} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - q_1 - q_2 - q_3) = \frac{2\pi\varepsilon^2}{2^8\pi^5} \frac{y_1 dy_1\, y_2 dy_2}{y_3} \times \qquad (1)$$

$$\times\, d\alpha\, dz_1\, dz_2\, \delta\left(2 - y_1 - y_2 - \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2C_{12}}\right),$$

где $C_{12} = z_1 z_2 + \sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\cos\alpha$ – косинус угла между импульсами $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$; $z_{1,2}$ – косинусы углов между импульсами $\vec{q}_{1,2}$, и осью пучков $\vec{p}_-$. α – угол между плоскостями $(\vec{p}_-, \vec{q}_1)$ и $(\vec{p}_-, \vec{q}_2)$, $y_i = \varepsilon_i/\varepsilon$, $y_1 + y_2 + y_3 = 2$.

Выполним интегрирование в (1) по α с помощью δ – функции:

$$\frac{d\alpha}{y_3}\delta(2 - y_1 - y_2 - y_3) = 2 \Big/ \left| y_1 y_2 \sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)}\, \sin\alpha \right|.$$

Множитель 2 отвечает двум решениям уравнения $2 - y_1 - y_2 = y_3$; α и $\pi - \alpha$. В результате несложных вычислений:

$$d\Gamma = \varepsilon^2 \pi^{-4} 2^{-6} dy_1 dy_2 \frac{dz_1 dz_2}{\sqrt{D}}, \quad D = 1 - z_1^2 - z_2^2 - C_{12}^2 + 2z_1z_2C_{12}. \qquad (2)$$

Область интегрирования по долям энергий y_1, y_2 находится из законов сохранения энергии и импульса и условий эксперимента. Она заключена в треугольнике:

$$0 < y_i < 1, \quad 1 \le y_1 + y_2.$$

Область интегрирования по z_i определяется $D > 0$ и представляет собой внутренность эллипса, вписанного в квадрат $z_1 = \pm 1$, $z_2 = \pm 1$.

В постановке, когда фиксируется плоскость, в которой лежат импульсы конечных частиц, удобными переменными являются y_i, ψ – угол между этой плоскостью и осью пучков ($0 < \psi < \pi/2$) и φ – азимутальный угол в этой плоскости. Чтобы перейти к этим переменным, выразим $\sin\psi$ из геометрии конечных частиц:

$$\sin\psi = (1-c_{12}^2)^{-1}\mathcal{D}^{1/2} \equiv F(z_1,z_2).$$

Затем, пользуясь $z_2=\cos\psi\cos\varphi$, вводя формальное интегрирование по ψ:

$$dz_1\,dz_2\,d\sin\psi\,\delta(\sin\psi - F)$$

и проводя интегрирование по z_1, с помощью δ – функции, находим:

$$d\Gamma = \varepsilon^2\pi^{-4}2^{-6}\,dy_1\,dy_2\,d\varphi\cos\psi\,d\psi$$

$$0<\varphi<2\pi\,,\quad 0<\psi<\pi/2. \qquad (3)$$

Полезно проконтролировать справедливость (2), (3), для этого вычислим полный фазовый объем. Из (I) следует $\int d\Omega\,dz_1\,dz_2 = 4\pi\,dc_{12}$,

$$\int\frac{y_1y_2}{y_3}dc_{12}\,\delta\left(2-y_1-y_2-\sqrt{y_1^2+y_2^2+2y_1y_2c_{12}}\right)=1,\quad \int d\Gamma=\varepsilon^2\pi^{-3}2^{-5}\int dy_1\,dy_2.$$

Аналогичный результат следует из (2) и из (3) если заметить, что

$$\int\limits_{\mathcal{D}>0} dz_1\,dz_2\,\mathcal{D}^{-1/2} = 2\pi.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Выполнение интегрирования по φ и по ψ мы продемонстрируем на примере выражения, содержащего в знаменателе три разных инварианта: t, t_1, χ_-. Интегрирование по φ производится с помощью вычетов:

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi\,[1-a\cos\varphi]^{-1}}{[1-a\cos(\varphi-\varphi_1)][1-a\cos(\varphi-\varphi_2)]}=\frac{8i}{a^3}\oint\frac{z^2dz\,\left[z^2-\frac{2}{a}z+1\right]^{-1}}{\left[z^2-\frac{2}{a}ze^{i\varphi_1}+e^{2i\varphi_1}\right]\left[z^2-\frac{2}{a}ze^{i\varphi_2}+e^{2i\varphi_2}\right]}.$$

Здесь интегрируем по единичной окружности в комплексной плоскости z. Беря сумму трех вычетов внутри окружности получим:

$$J=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\left\{\frac{\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\left[\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2}\right]^{-1}}{1-a^2\cos^2\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)}+\frac{\cos\frac{\varphi_2}{2}\left[\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right]^{-1}}{1-a^2\cos^2\frac{\varphi_2}{2}}+\frac{\cos\frac{\varphi_1}{2}\left[\sin\frac{\varphi_2}{2}\sin\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right]^{-1}}{1-a^2\cos^2\frac{\varphi_1}{2}}\right\}$$

Интегрирование по ψ дает ($a=\cos\psi$):

$$\frac{\pi\left[\sin\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right]^{-1}}{2\sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2}}\left\{\mathrm{ctg}\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\ln\frac{1-z^2\cos^2\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)}{1-z^2}+\mathrm{ctg}\frac{\varphi_2}{2}\ln\frac{1-z^2\cos^2\frac{\varphi_2}{2}}{1-z^2}-\mathrm{ctg}\frac{\varphi_1}{2}\ln\frac{1-z^2\cos^2\frac{\varphi_1}{2}}{1-z^2}\right\}.$$

Приведем еще результат для выражения типа $t^{-2}t_1^{-1}$:

$$\int_{\psi_0}^{\pi/2}d\psi\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{\cos\psi}{[1-a\cos\varphi]^2[1-a\cos(\varphi-\varphi_1)]}=\pi\int_{\psi_0}^{\pi/2}d\psi\cos\psi\frac{2-a^2\left(1+a^2\cos^2\frac{\varphi_1}{2}\right)}{(1-a^2)^{3/2}\left[1-a^2\cos^2\frac{\varphi_1}{2}\right]^2}=$$

$$=\frac{\pi}{\sin^2\frac{\varphi_1}{2}}\left[\frac{z^2}{1-z^2}+\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi_1}{2}}\ln\frac{1-z^2\cos^2\frac{\varphi_1}{2}}{1-z^2}-\frac{2z^2\cos^2\frac{\varphi_1}{2}}{1-z^2\cos^2\frac{\varphi_1}{2}}\right],\quad z=\cos\psi_0.$$

Это выражение содержит величины $(1-z^2)^{-1}$, которые, однако, выпадут из полного выражения для распределения по долям энергий по указанным в тексте причинам.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Ввиду важности для приложений дадим развернутое выражение для дифференциального сечения процесса $e^+e^-\to e^+e^-\gamma$ на большие углы:

$$d\sigma^{e^+e^-\to e^+e^-\gamma}=\frac{\alpha^3}{2\pi s}d\varphi\cos\psi\,d\psi\,dy_+\,dy_-\cdot R\,,\quad 0<\varphi<2\pi,\ \psi_0<\psi<\pi/2,$$

$$R=-\frac{m_e^2}{2s}\left(\frac{3+z_-^2}{1-z_-}\right)^2\left[\frac{4}{\chi_+^2}+\frac{4}{\chi_-^2}+\frac{1}{(1-y_+)^2}+\frac{1}{(1-y_-)^2}\right]+\left(\frac{1}{\chi_+}+\frac{1}{\chi_-}\right)\frac{t_1^2t}{(1-y_-)(1-y)}+\frac{t_1^2}{2(1-y_-)}+$$

$$+\frac{t^2(1-y_+-3(2-y))}{\chi_-\cdot2(1-y_+)(1-y)}+\frac{t^2(3(1-y_+)-(4+y))}{\chi_+\cdot2(1-y_+)(1-y)}+tt_1\frac{2-y}{4(1-y_+)(1-y_-)}+\frac{tt_1}{\chi_-}\frac{1}{2(1-y)}\left[4(1-2y)+\frac{y(9y-8)}{1-y_-}-\right.$$

$$\left.-\frac{y(2-y)}{1-y_+}\right]+\frac{t_1}{\chi_-}\frac{1}{1-y}\left[\left(4-\frac{2}{y}\right)y_-+\frac{(1-y)(12+y)}{1-y_-}+8y-4-\frac{2}{y}\right]+\frac{t_1}{\chi_+}\frac{1}{1-y}\left[\frac{(1-y)(6-7y)}{1-y_+}+\frac{2y^2-6y+6}{1-y_-}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(1-y)}{y}y_+-11y+20-\frac{6}{y}\right]+t_1\left[\frac{2y^2-5y-4}{2y(1-y_-)}-\frac{y^2-8y+4}{2y(1-y_+)}-\frac{2-y}{1-y}\right]+t_1(\chi_--\chi_+)\frac{y_+}{4(1-y_+)(1-y_-)}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(15-y+\frac{3}{1-y}+\frac{y^2-11y+8}{(1-y_+)(1-y_-)}\right)+\frac{\chi_+}{2y}\left(-y+\frac{2+y}{1-y_+}+\frac{(1-y)(2-y)}{1-y_-}\right)+\frac{\chi_+}{t}\frac{(1-y)}{y}\left(-\frac{2}{1-y_+}-\frac{2-y}{1-y_-}\right)+$$

$$+\frac{\chi_-}{t}\left(2-\frac{1+2y}{y(1-y_-)}-\frac{(1-y)^2}{y(1-y_+)}\right)+\frac{1}{t^2\chi_+}\left[-8(1+y)y_--16y^2+40y-24\right]+\frac{4}{t^2}\left(y_--1+\frac{2y^2-5y+4}{1-y_-}\right)+$$

$$
+\frac{2\chi_-}{t^2}\left(-1+\frac{1}{1-y_-}\right)+\frac{t^2}{t_1\chi_-}\,\frac{1}{1-y}\left(-2+y+\frac{y^2-6y+6}{1-y_+}\right)+\frac{t^2}{t_1\chi_+}\cdot\frac{2}{1-y}\left(-1+\frac{1}{1-y_+}\right)-\frac{t^2}{2t_1(1-y_+)}+
$$

$$
+\frac{t^2}{t_1^2\chi_-}\left(2-\frac{4-2y}{1-y_+}\right)+\frac{t}{t_1}\left(-1+\frac{(1-y)(2-3y)}{y(1-y_-)}-\frac{y^2-7y-2}{y(1-y_+)}\right)+\frac{t\chi_-}{t_1}\,\frac{1-y}{2(1-y_+)(1-y_-)}+
$$

$$
+\frac{4t}{t_1^2 y}\left(y_+-2y+\frac{4-4y+2y^2}{1-y_+}\right)+\frac{t}{t_1^2}\left(4-\frac{6-2y}{1-y_+}\right)+\frac{1}{t\chi_+}\left[\frac{16(1-y)^2}{1-y_+}-4y_-^2+4y_-\left(y+\frac{1}{1-y}-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{1}{y}\right)-28y+60-\frac{12}{y}\right]+\frac{1}{tt_1\chi_+}\left[8y_-^2+8y_-(1-y)-8y^2+48y-20+\frac{32}{y}-\frac{8(1-y)(2-y)^2}{1-y_+}\right]+
$$

$$
+\frac{t_1}{t\chi_+}\left[-\frac{4(1-y)^2}{1-y_+}+\frac{1}{1-y_-}\left(-2y^2+8y-10-\frac{2}{1-y}\right)+y_-\left(-4+\frac{2}{y}-\frac{2}{1-y}\right)+\frac{2}{y(1-y)}+6y-6\right]+
$$

$$
+\frac{1}{tt_1}\left[16-10y+\frac{2(1-y)^2(4-y)}{(1-y_+)(1-y_-)}\right]+\frac{2\chi_+}{tt_1}\,\frac{y_+(1-y)}{(1-y_+)(1-y_-)}+\frac{1}{t\chi_-}\left[-\frac{4y_+^2}{1-y}+y_+\left(-16+\frac{4}{y(1-y)}\right)-\right.
$$

$$
\left.-\frac{20}{y}+4y+24+\frac{4(y^2-8y+8)}{1-y_-}\right]+\frac{t_1}{t\chi_-}\left[-\frac{12}{1-y_-}+12+\frac{2}{y}+y_-\left(\frac{2}{y}-\frac{4}{1-y}\right)\right]+
$$

$$
+\frac{1}{\chi_-}\left[\frac{2y_-^2}{1-y}-y_-\left(12+\frac{2}{1-y}\right)-\frac{24(1-y)}{1-y_-}+\frac{16}{y}-\frac{4}{1-y}-12y-8\right]+\frac{1}{t}\left[\frac{1}{1-y_-}\left(-2y^2+10y+4-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{8}{y}\right)+\frac{1}{1-y_+}\left(-\frac{8}{y}+20-12y\right)+6y-20+y_-\left(-2-\frac{2}{1-y}\right)\right]+\mathit{Symm}.
$$

Здесь введены обозначения, отличающиеся от текста: $t=y_-(1-\beta_- z_-)$, $t_1=y_+(1+\beta_+ z_+)$, $\chi_\pm=y(1\pm\beta z_\gamma)$, $z_\pm=\cos(\widehat{\vec{p}_-,\vec{p}_\pm'})$, $z_\gamma=\cos(\widehat{\vec{p}_-,\vec{k}})$, $p_++p_-=k+p_+'+p_-'$, знаком Symm мы обозначаем члены, получающиеся из предыдущего заменой $t\leftrightarrow t_1$, $y_+\leftrightarrow y_-$, $\chi_+\leftrightarrow\chi_-$, $z_+\leftrightarrow -z_-$, $z_\gamma\leftrightarrow -z_\gamma$
Это выражение справедливо с точностью до членов m_e^2/s .
$\beta_\pm=\sqrt{1-\frac{4m_e^2}{s y_\pm^2}}$, $\beta=\sqrt{1-\frac{4m_e^2}{s}}$, $y_\pm=\varepsilon_\pm/\varepsilon$, величины $y_\pm$, y изменяются в области

$$
0<y_i<1\,,\qquad y_++y_-+y=2\,,
$$

$$
(1-y_+)(1-y_-)(1-y)\geqslant\frac{m_e^2}{s}y^2.
$$

Литература

I. F.A.Berends et al. Nucl. Phys., B57 (1973), 381.

2. F.A.Berends and R.Gastmans, Nucl. Phys. B61 (1973), 414.

3. F.A.Berends et al. Nucl. Phys. B68 (1974), 541.

4. Б.В.Гешкенбейн и М.В.Терентьев. Ядерная физика, 8 (I968) 550.

5. Э.А.Кураев и С.И.Эйдельман. Препринт ИЯФ 76-II5, Новосибирск, I976.

6. E.A.Kuraev and G.V.Meledin, Nucl. Phys. B122 (1977), 485.

7. V.N.Baier, S.A.Kheifets, Nucl. Phys. 47 (1963), 313.

8. Г.М.Гарибян. Известия АН Арм.ССР 5 (I952) № 3.

9. В.Г.Горшков, УФН, IIO (I973) 45.

IO. Э.А.Кураев и В.С.Фадин. Препринт ИЯФ 78-56, Новосибирск, I978.