

К 93

42

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

Э.А.Кураев, С.И.Эйдельман

**РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ
В ЭКСПЕРИМЕНТАХ НА
ВСТРЕЧНЫХ E^+E^- ПУЧКАХ**

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
ИД № 19

ПРЕПРИНТ ИЯФ 78-82

Новосибирск

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ НА
ВСТРЕЧНЫХ e^+e^- ПУЧКАХ

Э.А.Кураев, С.И.Эйдельман

А Н Н О Т А Ц И Я

Найдены аналитические выражения для радиационных поправок к сечениям процессов $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, $\mu^+\mu^-$, $\pi^+\pi^-$ в "симметричной" постановке, когда регистрируются заряженные частицы с малыми углами отклонения от коллинеарности $\Delta\theta, \Delta\psi$. Приведены полностью дифференциальные сечения по конечным частицам с учетом излучения фотона вдоль начальных и конечных частиц.

1. В в е д е н и е

Радиационные поправки (Р.П.) к сечениям квантовоэлектро-динамических процессов, идущих на встречных e^+e^- пучках, давно привлекают внимание теоретиков (см. подробную библиографию в недавнем обзоре /1/). Учет их необходим в экспериментах по проверке квантовой электродинамики, при вычислении сечения упругого e^+e^- рассеяния, используемого для нормировки.

При изучении двухчастичных процессов очень удобной оказывается так называемая "симметричная" постановка задачи о Р.П., впервые рассмотренная в /2/ для случая e^-e^- рассеяния. Эта постановка соответствует регистрации двух частиц на большие углы, причем полярный и азимутальный углы отклонения от коллинеарности малы, так что сечение можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = d\sigma_0/d\Omega_3 (1+\delta) \quad (1)$$

где $d\sigma_0/d\Omega_3$ - сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \alpha\bar{\alpha}$ в борновском приближении, а радиационная поправка δ : $\delta = \delta_V + \delta_S + \delta_H$ - складывается из поправок, связанными с виртуальными, мягкими и жесткими фотонами соответственно.

В дважды логарифмическом приближении эта задача была решена для процесса $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ в работе /3/, в работе /4/ вычислены Р.П. для e^+e^- аннигиляции в ультрарелятивистском случае с учетом излучения лишь начальных частиц, в /5,6/ в α^3 -приближении численно получены Р.П. для процессов $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, $\mu^+\mu^-$. В настоящей работе получены точные аналитические выражения для Р.П. к сечениям процессов $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, $\mu^+\mu^-$, $\pi^+\pi^-$, справедливые в α^3 -приближении (для реакции $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ учтено излучение лишь начальных частиц), причем при вычислении δ_H мы пренебрегаем лишь членами порядка $\Delta\theta$, $\Delta\psi$, m_e/ϵ по сравнению с 1, где ϵ - энергия начального e^- . Для реакций $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, $\pi^+\pi^-$ специально рассмотрен случай энергии, близкой к порогу реакции, т.е. $\epsilon \sim m$, где m - масса рождающихся частиц.

Структура препринта следующая. В п.2 рассмотрена кинематика задачи о Р.П. в "симметричной" постановке. В пп.3-5 приведе-

ны полученные выражения для Р.П. к процессам $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, $\mu^+\mu^-$, $\pi^+\pi^-$ соответственно. В п.6 приведено полностью дифференциальное сечение по конечным заряженным частицам с учетом излучения фотона вдоль направления начальных и конечных частиц. В Приложении I найдены ограничения на углы вылета и частоту фотона для "квазиупругого" события. В Приложении 2 выводится выражение для фазового объема конечных частиц. Приложения 3-5 поясняют вычисление основных встречающихся интегралов. В Приложении 6 рассмотрена реакция $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ вблизи порога. Наконец, в Приложении 7 для удобства приведены основные свойства функции Спенса.

2. Кинематика задачи

Следуя [2], кратко опишем "симметричную" постановку задачи о Р.П. В системе центра инерции (С.Ц.И.) начальных e^+ и e^- построим вектор \vec{n} в направлении биссектрисы угла между импульсом одной из конечных частиц \vec{p}_3 и направлением, обратным импульсу второй конечной частицы $-\vec{p}_4$ (Рис.1). Назовем плоскостью рассеяния плоскость, проходящую через \vec{n} и ось пучков \vec{p}_- . Угол между этой плоскостью и плоскостью, в которой лежат импульсы трех конечных частиц, обозначим через φ . Нас будут интересовать "квазиупругие" события, для которых концы векторов \vec{p}_3 и $-\vec{p}_4$ попадают внутрь эллипса с полуосями $\Delta\theta/2$, $\Delta\psi/2$ и центром в конце вектора \vec{n} . В другой форме это означает, что угол между векторами \vec{p}_3 и $-\vec{p}_4$ меньше некоторого $2\chi(\varphi)$:

$$2\chi(\varphi) = [\Delta\theta^2 \cos^2 \varphi + \Delta\psi^2 \sin^2 \varphi]^{1/2}, \quad \Delta\theta, \Delta\psi \ll 1. \quad (2)$$

Из законов сохранения энергии-импульса можно получить ограничение на частоту ω и углы вылета фотона для "квазиупругого" события (см. Приложение I). В ультрарелятивистском случае оно принимает вид:

$$0 < \frac{\omega}{\varepsilon} < \frac{2\chi(\varphi)}{\chi(\varphi) + \sin \theta_k} \quad (3)$$

где θ_k -- угол между импульсом фотона \vec{k} и осью \vec{n} , т.к. в эксперименте регистрируются частицы с энергией $\varepsilon_{ch} > 2\varepsilon$, то на частоту фотона накладывается дополнительное условие, так

что в итоге

$$0 < \frac{\omega}{\varepsilon} < \min \left(\frac{2\chi(\varphi)}{\sin \theta_k + \chi(\varphi)}, 1 - \eta \right) \quad (4)$$

где $\eta = \varepsilon_{th} / \varepsilon$. Сечение области (4) в пространстве импульсов фотона плоскостью $\varphi = 0$ изображено на Рис.2: кривая А -- след сферы $\omega/\varepsilon = 1 - \eta$, кривая Б соответствует уравнению (3), кривая В соответствует сфере $\omega/\varepsilon = \Delta \ll \chi \ll 1$.

Фазовый объем конечных частиц удобно преобразовать к виду (см. Приложение 2):

$$d\Gamma = \frac{d^3p_3 d^3p_4 d^3k}{2\varepsilon_3 2\varepsilon_4 2\omega} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^9} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k) = \frac{\beta}{16} d\Omega_{\vec{n}} \frac{y dy d\Omega_k}{4(2\pi)^5} f(y), \quad (5)$$

где

$$f(y) = \frac{4 [1 - y - \sigma^2 \frac{(2-y)^2}{4(1+y)}]^2}{\beta(1-y)(2-y)^2 [1 - \frac{\sigma^2}{1-y}]^{3/2}}, \quad \beta = 1 - \sigma^2,$$

$\sigma = m/\varepsilon$, $\beta = 4\varepsilon^2$, $y = \omega/\varepsilon$, $d\Omega_{\vec{n}} = d\Omega_3$ -- элемент телесного угла заряженной частицы, отсчитываемый от оси пучков, $d\Omega_k$ -- элемент телесного угла фотона, отсчитываемый от \vec{n} .

3. Реакция $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma$

Дифференциальное сечение, отвечающее излучению жесткого фотона $y > \Delta$, в рассматриваемой постановке имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2^3}{4\pi^3} \right) \int \frac{y(y) dy}{(2-y)^2} R d\Omega_k \quad (6)$$

$$R = \frac{\beta}{16(4\pi d)^3} \sum_{\text{нап}} |M^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma}|^2 \quad (7)$$

В пределе $\Delta\theta, \Delta\psi \ll 1$ величина R сильно упрощается и имеет вид:

$$R = \left(\frac{3+z^2}{1-z} \right)^2 \left\{ - \frac{4m_e^2}{\beta y^2} \left[\frac{(y)^{-2}}{(1-\beta c_k)^2} + \frac{(y)^{-2}}{(1+\beta c_k)^2} + \frac{1}{(1-\beta \tilde{z})^2} + \frac{1}{(1+\beta \tilde{z})^2} \right] + \right. \quad (8)$$

$$+ \frac{2}{\nu^2} \left[\frac{1}{1-\beta\tilde{z}} + \frac{1}{1+\beta\tilde{z}} \right] + \frac{1+(\nu)^2}{\nu^2(\nu)^2} \left[\frac{1}{1-\beta C_k} + \frac{1}{1+\beta C_k} \right] +$$

$$+ \frac{2}{\nu^2} \left[\frac{1-z}{(1+\beta C_k)(1+\beta\tilde{z})} + \frac{1-z}{(1-\beta C_k)(1-\beta\tilde{z})} - \frac{1+z}{(1+\beta C_k)(1-\beta\tilde{z})} - \frac{1+z}{(1-\beta C_k)(1+\beta\tilde{z})} \right]$$

Здесь $z = \cos \theta$, $C_k = \cos \theta_k$, $\beta^2 = 1 - \frac{m_e^2}{\varepsilon^2}$, $\beta_-^2 = 1 - \frac{m_e^2}{\varepsilon^2(\nu)^2}$,

\vec{p}' , ε_- — импульс и энергия конечного электрона,

$$\tilde{z} = \cos(\vec{k} \hat{p}') = \cos \theta \cos \theta_k - \sin \theta \sin \theta_k \cos \varphi, \quad \theta = \vec{p}' \hat{p}, \quad \theta_k = \vec{k} \hat{p}'.$$

Заметим, что это выражение может быть получено с помощью метода квазиреальных электронов /7/. Члены в (8), содержащие $(1 \pm \beta\tilde{z})^{-1}$, соответствуют излучению начальными частицами, $(1 \pm \beta C_k)^{-1}$ — конечными, последнее слагаемое отвечает интерференции этих двух механизмов. Проводя интегрирование по dV , dO_k (см. Приложения 3-5), получим вклад в Р.П. от излучения жестких фотонов:

$$\delta_h = \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ -2 \ln \Delta \left(\beta + \ln \frac{1-z}{1+z} - 1 \right) + \ln^2 \left(\frac{\Delta\theta(\nu)}{\sin \theta} \right) + \left(\beta - 2 \ln(\nu) + \ln \frac{1-z^2}{4} + 2 \ln \frac{1+\lambda}{2} \right) \times \right.$$

$$\times \left(\ln(\nu) - (\nu) + \frac{1}{4}(\nu)^2 \right) + \left(\beta - 2 \ln \frac{\Delta\theta + \Delta\varphi}{4} - 2 \ln \frac{1+z}{1-z} - 1 - 2(\nu) + \frac{1}{2}(\nu)^2 \right) \ln \frac{\Delta\theta}{\sin \theta} +$$

$$+ F(1-\nu) - \ln(\nu) - \frac{1}{4} \ln^2 \left(\frac{1-z^2}{4} \right) + \left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4}\nu^2 \right) \ln \nu - \frac{5}{4}(\nu) + \frac{1}{8}(\nu)^2 - F\left(\frac{1-\lambda}{2}\right) + F\left(\frac{1+\lambda}{2}\right) -$$

$$- F(1+\lambda) + F(1-\lambda) - \ln \frac{1+\lambda}{2} \left(\ln \left| \frac{1-\lambda}{2} \right| + \ln \frac{1-z^2}{4} \right) - \frac{\pi^2}{12} - \frac{3}{4} \ln^2 \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1-z}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1+z}{2} \right)$$

$$+ F\left(\frac{1+z}{2}\right) - F\left(\frac{1-z}{2}\right) + F\left(\frac{z-\lambda}{1+z}\right) + F\left(\frac{-z-\lambda}{1-z}\right) + 2 \ln \frac{1+\lambda}{2} \ln \frac{1-z}{1+z} \left. \right\},$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{dy}{y} \ln(\nu y), \quad \lambda = \Delta\psi/\Delta\theta.$$

Это выражение содержит параметр Δ в качестве нижнего предела интегрирования по ν . Он выпадает из окончательного результата, если учесть вклад в Р.П. от излучения виртуальных и мягких фотонов. Вычисление этих поправок проводится стандартными методами /6,8,9/. Записывая их сумму в удобном виде, не содержащем

больших логарифмов, получим:

$$\delta^V + \delta^S = \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ 2(1-\beta) + \ln \frac{1+z}{1-z} \right\} \ln \frac{1}{\Delta} - F\left(\frac{1+z}{2}\right) + F\left(\frac{1-z}{2}\right) - \frac{23}{9} + \frac{11}{6} \beta \left. \right\} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} (3+z^2)^{-2} \left\{ \frac{\pi^2}{3} (2z^4 - 3z^3 - 15z) + \frac{1}{2} (2z^4 - 3z^3 + 9z^2 + 3z + 21) \ln^2 \left(\frac{1-z}{2} \right) - \right.$$

$$- (z^4 + z^2 - 2z) \ln^2 \left(\frac{1+z}{2} \right) - (z^3 + 4z^2 + 5z + 6) \ln^2 \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{1}{3} (11z^3 + 33z^2 + 21z +$$

$$+ 111) \ln \frac{1-z}{2} + (z^3 - 3z^2 + 7z - 5) \ln \frac{1+z}{2} \left. \right\}$$

Сложение (9) и (10) дает полную Р.П.:

$$\frac{\pi}{2\alpha} \delta = \ln^2 \left(\frac{\Delta\theta(\nu)}{\sin \theta} \right) + \left(\beta - 2 \ln \frac{\Delta\theta + \Delta\varphi}{4} - 2 \ln \frac{1+z}{1-z} - 1 - 2(\nu) + \frac{1}{2}(\nu)^2 \right) \ln \frac{\Delta\theta}{\sin \theta} + \beta \left(\frac{11}{6} + \right.$$

$$+ \ln(\nu) - (\nu) + \frac{1}{4}(\nu)^2 \left. \right) - \frac{23}{9} + \left(\ln \frac{1-z^2}{4} + 2 \ln \frac{1+\lambda}{2} - 2 \ln(\nu) \right) \left(\ln(\nu) - (\nu) + \frac{1}{4}(\nu)^2 \right) + F(1-\nu) -$$

$$- \ln(\nu) + \left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4}\nu^2 \right) \ln \nu - \frac{5}{4}(\nu) + \frac{1}{8}(\nu)^2 - F\left(\frac{1-\lambda}{2}\right) + F\left(\frac{1+\lambda}{2}\right) - F(1+\lambda) + F(1-\lambda) -$$

$$- \ln \frac{1+\lambda}{2} \left(\ln \left| \frac{1-\lambda}{2} \right| + \ln \frac{1-z^2}{4} \right) - \frac{\pi^2}{12} - \frac{3}{4} \ln^2 \left(\frac{1+z}{1-z} \right) - \ln^2 \left(\frac{1+z}{2} \right) + F\left(\frac{z-\lambda}{1+z}\right) + F\left(\frac{-z-\lambda}{1-z}\right) + 2 \ln \frac{1+\lambda}{2} \ln \frac{1-z}{1+z}$$

$$+ \frac{1}{2} (3+z^2)^{-2} \left[\frac{\pi^2}{3} (2z^4 - 3z^3 - 15z) + \frac{1}{2} (2z^4 - 3z^3 + 9z^2 + 3z + 21) \ln^2 \left(\frac{1-z}{2} \right) - (z^4 + z^2 - 2z) \ln^2 \left(\frac{1+z}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - (z^3 + 4z^2 + 5z + 6) \ln^2 \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{1}{3} (11z^3 + 33z^2 + 21z + 111) \ln \frac{1-z}{2} + (z^3 - 3z^2 + 7z - 5) \ln \frac{1+z}{2} \right].$$

4. Реакция $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma$

Дифференциальное сечение излучения жесткого фотона в данной постановке имеет вид:

$$\frac{d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma}}{dO_-} = \frac{2^3 \beta}{16\pi^2 s} \int \nu d\nu dO_k R(\nu) [R^{\text{even}} + R^{\text{odd}}], \quad (12)$$

где зарядово-четная часть

$$R^{\text{even}} = \frac{1}{\nu^2} (2-\beta^2 + \beta^2 z^2) \left[-\frac{4m_e^2}{3} \left(\frac{1}{(1-\beta_2 \tilde{z})^2} + \frac{1}{(1+\beta_2 \tilde{z})^2} \right) + 2 \left(\frac{1}{1-\beta_2 \tilde{z}} + \frac{1}{1+\beta_2 \tilde{z}} \right) \right] - \frac{4m_e^2}{3\nu^2} (2-\beta^2 +$$

$$+ \beta(\nu + \beta_-(\nu)) z^2) \left[\frac{(\nu)^{-2}}{(1-\beta C_k)^2} + \frac{(\nu)^{-2}}{(1+\beta C_k)^2} \right] + \left(\frac{1}{1-\beta C_k} + \frac{1}{1+\beta C_k} \right) \left[\frac{\beta+z^2}{1-\nu} + \right.$$

$$\left. + \frac{1+\beta\beta_- z^2}{\nu} - \frac{1-\nu}{\nu} (1-\beta_-^2 z^2) + \frac{(1+\beta-2\nu)}{\nu(1-\nu)(1+\beta)} \left(\frac{2(1-\beta^2)}{\nu} + \frac{2(\nu)(1+\beta\beta_- z^2)}{\nu} + (\nu)(1-\beta_- z^2) + 1+\beta_- z^2 \right) \right]. \quad (13)$$

А зарядово-нечетная часть

$$R^{odd} = \frac{2}{v^2} (2-\beta^2+\beta^2z^2) \left[\frac{1-\beta z}{(1+\beta C_K)(1+\beta_e \tilde{z})} + \frac{1-\beta \tilde{z}}{(1+\beta C_K)(1+\beta_e \tilde{z})} - \frac{1+\beta z}{(1+\beta C_K)(1-\beta_e \tilde{z})} - \frac{1+\beta \tilde{z}}{(1-\beta C_K)(1+\beta_e \tilde{z})} \right] +$$

$$+ \frac{z}{v(M)(1-z^2)} \left[\frac{4(M^2-1)}{v} (1-\beta^2+(M)(1+\beta\beta_e z^2)) - 2(1+\beta^2)(1-\beta) - \beta(1+\beta^2)(1-z^2) + (M)(2\beta_- - 1 - \beta) - \right.$$

$$- z^2(M)\beta_-(2-\beta_- - \beta\beta_-) - \frac{\beta(M)^2(1-z^2)}{1-v} + (2-\beta-\beta_-) + z^2(\beta+\beta_- - 2\beta\beta_-) +$$

$$\left. (\beta-\beta_-)(1+z^2) \right] \left(\frac{1}{1-\beta_{-C_K}} + \frac{1}{1+\beta_{-C_K}} \right). \quad (I4)$$

В ультрарелятивистском случае в (I2) $\delta \rightarrow 0$ и (I3), (I4) принимают вид:

$$R^{even} = \frac{1+z^2}{v^2} \left\{ -\frac{4m^2}{3} \left(\frac{1}{(1-\beta_e \tilde{z})^2} + \frac{1}{(1+\beta_e \tilde{z})^2} \right) - \frac{4m^2}{3(M)^2} \left(\frac{1}{(1-\beta_{-C_K})^2} + \frac{1}{(1+\beta_{-C_K})^2} \right) + \right.$$

$$\left. + 2 \left(\frac{1}{1-\beta_e \tilde{z}} + \frac{1}{1+\beta_e \tilde{z}} \right) + \frac{1+(M)^2}{1-v} \left(\frac{1}{1-\beta_{-C_K}} + \frac{1}{1+\beta_{-C_K}} \right) \right\},$$

$$R^{odd} = \frac{2(1+z^2)}{v^2} \left\{ \frac{1-z}{(1+\beta C_K)(1+\beta_e \tilde{z})} + \frac{1-z}{(1-\beta C_K)(1+\beta_e \tilde{z})} - \frac{1+z}{(1+\beta C_K)(1-\beta_e \tilde{z})} - \right.$$

$$\left. - \frac{1+z}{(1-\beta C_K)(1-\beta_e \tilde{z})} \right\} \quad (I6)$$

С помощью формул Приложений (3-5) интегрирование этих выражений не представляет труда. Прибавляя результат вычисления Борновской амплитуды и поправки к ней за счет излучения виртуальных и мягких фотонов /10/,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{B+V+S} = \frac{\alpha^2}{4\beta} (1+z^2) \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left[\left(\ln \Delta + \frac{13}{12} \right) \left(\ln \frac{3}{m^2} + \ln \frac{3}{M_0^2} - 2 \right) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{17}{18} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{\alpha^3}{\pi\beta} \left\{ (1+z^2) \ln \frac{1+z}{1-z} \ln \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{4} (1-z+z^2) \ln^2 \left(\frac{1-z}{2} \right) - \frac{1}{4} (1+z+z^2) \ln^2 \left(\frac{1+z}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} (1+z^2) \left(F \left(\frac{1+z}{2} \right) - F \left(\frac{1-z}{2} \right) \right) + \frac{1+z}{4} \ln \left(\frac{1-z}{2} \right) - \frac{1-z}{4} \ln \left(\frac{1+z}{2} \right) \right\} \quad (I7)$$

Получим для четной части:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{even} = \left(\frac{d\sigma_0}{d\Omega} \right) (1 + \delta^{even}), \quad \frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\beta} (1+z^2),$$

$$\delta^{even} = \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ \ln^2 \left(\frac{1+z}{2} \right) + \frac{13}{12} (\beta_e + \beta_r) + (\beta_e - 2 \ln \frac{\Delta\theta + \Delta\varphi}{4} - 1 - 2(1+z) + \frac{1}{2}(1+z)^2) \ln \tilde{z} + (\beta_r - \right.$$

$$- 2 \ln(1+z) + 2 \ln \frac{1+\lambda}{2} + \ln \frac{1-z^2}{4} \left(\ln(1+z) - (1+z) + \frac{1}{4}(1+z)^2 \right) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{2\beta}{9} - \frac{1}{4} \ln^2 \left(\frac{1-z^2}{4} \right) -$$

$$- \ln(1+z) + F(1+z) + \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 \right) \ln z - \frac{5}{4}(1+z) + \frac{1}{8}(1+z)^2 - F \left(\frac{1-\lambda}{2} \right) + F \left(\frac{1+\lambda}{2} \right) - F(1+\lambda) + F(1-\lambda) -$$

$$\left. - \ln \frac{1+\lambda}{2} \left(\ln \left| \frac{1-\lambda}{2} \right| + \ln \frac{1-z^2}{4} \right) - \frac{\pi^2}{12} - \frac{3}{4} \ln^2 \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + F \left(\frac{z-\lambda}{1+z} \right) + F \left(\frac{-z-\lambda}{1-z} \right) \right\}, \quad \tilde{z} = \frac{\Delta\theta}{\sin\theta}.$$

А для нечетной:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{odd} = \frac{\alpha^3}{2\pi\beta} \left\{ (1+z^2) \left[2 \ln \frac{1-z}{1+z} \ln \frac{\Delta\theta + \Delta\varphi}{2\sin\theta} + \ln^2 \left(\frac{1-z}{2} \right) - \ln^2 \left(\frac{1+z}{2} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} (1+z) \ln \frac{1-z}{2} - \frac{1}{4} (1-z) \ln \frac{1+z}{2} - \frac{1}{2} z \left(\ln^2 \left(\frac{1+z}{2} \right) + \ln^2 \left(\frac{1-z}{2} \right) \right) \right\}. \quad (I9)$$

Выражение для поправки вблизи порога ($\beta \sim 1$) зависит от величины параметра $\gamma = \beta \chi(\varphi)(1-z)^{-1}$. При $\gamma \ll 1$ получим:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^{B+V+S+h}_{even} = \frac{\alpha^2 \beta (2-\beta^2+\beta^2z^2)}{4\beta} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ \frac{13}{12} \beta_e + (\beta_e - 1) \ln \frac{\beta \Delta\theta}{\sin\theta} + \left(\beta - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\beta^2 + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{3}{4\beta} \right) \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} + \ln \frac{1+\beta}{2} + \frac{1+\beta^2}{\beta} \left(\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \ln \frac{1+\beta}{2\beta^2} - F \left(\frac{1+\beta}{1+\beta} \right) \right) + \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{3}\beta^2 - \frac{31}{9} - \right.$$

$$- \frac{(1+\beta^2)}{4\beta} (2-\beta^2+\beta^2z^2)^{-1} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\beta^2}{4\beta} \ln(1+z) \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} + \left(\frac{1+\beta^2}{4\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{1}{2} \right) \ln \frac{\beta(\Delta\theta + \Delta\varphi)}{2(1+z)} + \frac{1}{2} \ln 2 -$$

$$- \frac{1}{4\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\beta^2}{4\beta} \left(\frac{\pi^2}{6} + F \left(\frac{1+\beta}{1+\beta} \right) - \frac{1}{4} \ln^2 \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \ln \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \right) + F \left(\frac{z-\lambda}{1+z} \right) + F \left(\frac{-z-\lambda}{1-z} \right) -$$

$$\left. - \frac{3}{4} \ln^2 \left(\frac{1+z}{1-z} \right) - \frac{\pi^2}{12} \right\} \}. \quad (20)$$

Случай $\gamma \sim 1$ рассмотрен в Приложении 6.

5. Процесс $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$

Ограничиваясь излучением лишь начальных частиц, запишем в виде:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_\pi}\right)^h = \frac{\alpha^3 \beta^3 (1-z^2)}{16\pi^2 s} \left\{ \frac{dy}{y} d\Omega_\kappa [I(y, z, \Omega_\kappa) - I(0, z, \Omega_\kappa) + I(0, z, \Omega_\kappa)] \right\},$$

$$I(y, z, \Omega_\kappa) = k(y) F_\pi^2(s(y)) \left\{ -\frac{2m_e^2}{s} \left(\frac{(1-y)^{-2}}{(1-\beta_e \tilde{z})^2} + \frac{(1-y)^{-2}}{(1+\beta_e \tilde{z})^2} \right) + \frac{1+(1-y)^2}{2(1-y)} \left(\frac{1}{1-\beta_e \tilde{z}} + \frac{1}{1+\beta_e \tilde{z}} \right) \right\} \quad (21)$$

Последнее слагаемое в квадратных скобках может быть проинтегрировано с помощью формул [(3-5)]:

$$\frac{\alpha^3 \beta^3 (1-z^2)}{4\pi s} F_\pi^2(s) \left\{ (e-1) \ln \frac{\Delta\theta}{\Delta \sin\theta} + F\left(\frac{z-\lambda}{1+z}\right) + F\left(\frac{-z-\lambda}{1-z}\right) - \frac{3}{4} \ln^2 \left(\frac{1+z}{1-z} \right) - \frac{\pi^2}{12} \right\}, \lambda = \frac{\Delta\psi}{\Delta\theta}.$$

При интегрировании по y остальных слагаемых нижний предел можно считать нулем. Проанализируем его детальнее. Главный вклад при интегрировании по углам, пропорциональный $(e-1)$, происходит от области $\theta_\kappa = \theta, \pi - \theta$, но при этом мал верхний предел интегрирования по y : $\Delta\theta / \sin\theta \ll 1$. Вклад этой области будет

$$\frac{\alpha^3 \beta^3 (1-z^2)}{4\pi s} \left\{ e \int_0^{\frac{\Delta\theta}{\sin\theta}} \frac{dy}{y} \left[k(y) \left(1 + y + \frac{y^2}{2}\right) F_\pi^2(s(y)) - F_\pi^2(s) \right] - \int_0^{\frac{\Delta\theta}{\sin\theta}} \frac{dy}{y} \left[k(y) \frac{F_\pi^2(s(y))}{(1-y)^2} - F_\pi^2(s) \right] \right\} \quad (22)$$

Область $y \sim 1$ соответствует малым $\theta_\kappa \sim 2\chi(\varphi)$. Она дает малый вклад:

$$\sim \frac{\alpha^3 \beta^3}{4\pi s} (\Delta\theta)^2 \int_0^1 \frac{dy}{y} \left[k(y) \left(1 + y + \frac{y^2}{2}\right) F_\pi^2(s(y)) - F_\pi^2(s) \right] \quad (23)$$

Вклад от виртуальных фотонов находится по формуле

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_\pi}\right)^{virt} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega_\pi} (2F_1 - 2\text{Re}\Pi_e - 2\text{Re}\Pi_\mu) \quad (24)$$

Здесь F_1 учитывает поправку к вершинной функции электрона, $\Pi_{e,\mu}$ — поляризацию вакуума за счет электронов и μ -мезонов:

$$F_1 = \frac{\alpha}{\pi} \left[\left(\ln \frac{m_e}{\lambda} - 1 \right) (1 - e) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} e \right], \quad (25)$$

$$\text{Re}\Pi_e = \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{3} e \right), \quad \text{Re}\Pi_\mu = \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{3} \beta_\mu^2 + \left(\frac{1}{2} \beta_\mu - \frac{1}{6} \beta_\mu^3 \right) \ln \frac{1-\beta_\mu}{1+\beta_\mu} \right).$$

Наконец, вклад от излучения мягких фотонов дается формулой

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_\pi}\right)^{soft} = \frac{\alpha^3 \beta^3 (1-z^2)}{4\pi s} \left[(e-1) \ln \left(\frac{2\Delta\varepsilon}{\lambda} \right) - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{2} e - \frac{\pi^2}{6} \right] \quad (26)$$

Параметр λ — "масса" фотона — выпадает при сложении (25) и (26). Параметр Δ выпадает при сложении с (21). Прибавляя к (21), (22), (25), (26) сечение в Борновском приближении, получим окончательный результат:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\pi} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega_\pi} (1 + \delta_\pi), \quad \frac{d\sigma_0}{d\Omega_\pi} = \frac{\alpha^2 \beta^3 (1-z^2)}{8s} F_\pi^2(s),$$

$$\delta_\pi = \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ (e-1) \ln \frac{\Delta\theta}{\sin\theta} + \frac{13}{12} e + \frac{\pi^2}{12} - \frac{14}{9} - \frac{3}{4} \ln^2 \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + F\left(\frac{z-\lambda}{1+z}\right) + F\left(\frac{-z-\lambda}{1-z}\right) + \left(\frac{1}{2} \beta_\mu - \frac{1}{6} \beta_\mu^3 \right) \ln \frac{1+\beta_\mu}{1-\beta_\mu} + \frac{1}{3} \beta_\mu^2 - \frac{8}{9} + e \int_0^{\frac{\Delta\theta}{\sin\theta}} \frac{dy}{y} \left[k(y) \left(1 + y + \frac{y^2}{2}\right) \frac{F_\pi^2(s(y))}{F_\pi^2(s)} - 1 \right] - \int_0^{\frac{\Delta\theta}{\sin\theta}} \frac{dy}{y} \left[k(y) (1-y)^{-2} \frac{F_\pi^2(s(y))}{F_\pi^2(s)} - 1 \right] \right\} \quad (27)$$

Заметим, что при $1 - \beta_\mu^2 \ll 1$, т.е. в ультрарелятивистском случае (27) совпадает с результатом [4] за исключением дополнительно учтенного нами члена $-2 \text{Re}\Pi_\mu$, отвечающего поляризации вакуума μ -мезонами.

На рис.3 показана зависимость Р.П. от угла $\Delta\theta$ для процессов $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma$, $\mu^+\mu^- \gamma$ ($\theta = 90^\circ$, $\Delta\psi = 3^\circ$, $\varepsilon = 500$ МэВ). Р.П. для процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- \gamma$ в сильной степени зависит от вида фактора, а также от энергии ε .

6. Полностью дифференциальные сечения

В этом разделе мы приведем полностью дифференциальные по конечным заряженным частицам сечения для процессов $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma$, $\mu^+\mu^- \gamma$ и $\pi^+\pi^- \gamma$ с учетом излучения фотона произвольной жесткости вдоль начальных, а для процессов $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma$, $\mu^+\mu^- \gamma$ и вдоль конечных частиц в пределе высоких энергий. Известно [7], что указанная кинематика излучения фотона дает в логарифмическом приближении ($\ln \frac{s}{m^2} : 1$) основной вклад в сечение, кроме того, приводимые выражения значительно проще

по сравнению с точными.

Сечение процесса $e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow e^+(p'_+) + e^-(p'_-) + \gamma(k)$ имеет вид:

$$\frac{d\sigma_{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma}}{d\Omega_+ d\Omega_- dV_-} = \frac{\alpha^3}{16\pi^2 \beta} \frac{v_-(1-v_-)}{(1-v_- \frac{1-c}{2})^2} R^{(e)}, \quad v_{\pm} = \frac{\varepsilon_{\pm}}{\varepsilon}, \quad v = \frac{\omega}{\varepsilon}, \quad \beta = 4\varepsilon^2$$

$$v_+ = (1-v_-)(1-v_- \frac{1-c}{2})^{-1}, \quad v_+ + v_- + v = 2, \quad c = \cos(\vec{p}_- \hat{p}'_+),$$

$$R^{(e)} = \frac{\beta}{16(4\pi\alpha)^3} \sum_{\text{сн}} |M^{e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma}|^2 \approx R_i^{(e)} + R_f^{(e)},$$

$$R_i^{(e)} = \frac{1}{2} \left[u u_1 \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{s_1} \right)^2 + \frac{\beta s_1}{t_1^2} + \frac{t t_1}{s_1^2} \right] \beta \left(-\frac{m_e^2(1-v)}{(k p_-)^2} + \frac{1+(1-v)^2}{v(k p_-)} \right) + \frac{1}{2} \left[\tilde{u} \tilde{u}_1 \left(\frac{1}{\tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{s}_1} \right)^2 + \frac{\beta \tilde{s}_1}{\tilde{t}^2} + \frac{\tilde{t} \tilde{t}_1}{\tilde{s}_1^2} \right] \beta \left(-\frac{m_e^2(1-v)}{(k p_+)^2} + \frac{1+(1-v)^2}{v(k p_+)} \right),$$

$$R_f^{(e)} = \left(\frac{\beta + z^2}{1-z} \right)^2 \beta \left[-\frac{m_e^2}{4(k p_+)^2} - \frac{m_e^2}{4(k p_-)^2} + \frac{1+(1-v)^2}{4v} \left(\frac{1}{k p_+} + \frac{1}{k p_-} \right) \right].$$

Здесь $z = \cos(\vec{p}_- \hat{p}'_+)$, $u = \beta(-1 + \frac{1}{2}v_-(1-z))$, $u_1 = -\frac{\beta}{2}v_-(1+z)$,
 $t = -\frac{\beta}{2}v_-(1+z)$, $t_1 = \beta(-1 + v + \frac{1}{2}v_-(1+z))$, $s_1 = \beta(1-v)$, $\tilde{t}_1 = \beta(-1 + \frac{1}{2}v_-(1+z))$,
 $\tilde{u} = \beta(-1 + v + \frac{1}{2}v_-(1+z))$.

Для процесса $e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \pi^+(q_+) + \pi^-(q_-) + \gamma(k)$ излучение вдоль конечных частиц с принятой точностью имеет смысл рассматривать лишь в пределе энергий, много больших массы μ мезона:

$$\frac{d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma}}{d\Omega_+ d\Omega_- dV_-} = \frac{\alpha^3}{16\pi^2 \beta} \frac{|\vec{q}_+||\vec{q}_-|}{\varepsilon^2} \left[1 - v_- + \frac{q_- v_+}{q_+} c \right]^{-1} R^{(\pi)}, \quad c = \cos(\vec{q}_+ \hat{q}'_-),$$

$$R^{(\pi)} = \frac{\beta}{16(4\pi\alpha)^3} \sum_{\text{сн}} |M^{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma}|^2 = R_i^{(\pi)} + R_f^{(\pi)}$$

Напомним, что величину $R_f^{(\pi)}$ имеет смысл прибавлять лишь в пределе больших энергий.

$$R_i^{(\pi)} = \frac{1}{\beta^2} \left[-\frac{\beta m_e^2(1-v)}{(k p_-)^2} + \frac{\beta}{k p_-} \frac{1+(1-v)^2}{v} \right] \left[m^2 \beta + \frac{1}{2}(m^2 - u_1)(m^2 - u) + \frac{1}{2}(m^2 - \tilde{t})(m^2 - \tilde{t}_1) \right] + \frac{1}{\beta^2} \left[-\frac{\beta m_e^2(1-v)}{(k p_+)^2} + \frac{\beta}{k p_+} \frac{1+(1-v)^2}{v} \right] \left[m^2 \beta + \frac{1}{2}(m^2 - u_1)(m^2 - \tilde{u}) + \frac{1}{2}(m^2 - \tilde{t})(m^2 - \tilde{t}_1) \right] \quad (29)$$

$$R_f^{(\pi)} = (1+z^2) \left[-\frac{\beta m^2}{4(k q_+)^2} - \frac{\beta m^2}{4(k q_-)^2} + \frac{1+(1-v)^2}{4v} \left(\frac{\beta}{k q_-} + \frac{\beta}{k q_+} \right) \right].$$

Здесь $z = \cos(\vec{p}_- \hat{q}'_-)$, $t_1 = m^2 - \frac{\beta}{2}v_-(1-\beta z)$, $u = m^2 - \beta(1 - \frac{v}{2}(1-\beta z))$,
 $u_1 = m^2 - \frac{\beta}{2}v_-(1+\beta z)$, $t = m^2 - \beta(1 - v - \frac{v}{2}(1+\beta z))$, $\tilde{t} = m^2 - \beta(1 - \frac{v}{2}(1+\beta z))$,
 $\tilde{u} = m^2 - \beta(1 - v - \frac{v}{2}(1-\beta z))$, $v_{\pm} = \frac{q_{\pm}^0}{\varepsilon}$, $v = \frac{\omega}{\varepsilon}$, $\beta_{\pm}^2 = 1 - \frac{m^2}{\varepsilon^2 v_{\pm}^2}$, $q_{\pm}^2 = \varepsilon^2 v_{\pm}^2 \beta_{\pm}^2$.

Для процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ мы приведем выражение, учитывающее лишь излучение фотона произвольной жесткости начальными частицами:

$$\frac{d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma}}{d\Omega_+ d\Omega_- dV_-} = \frac{\alpha^3}{16\pi^2 \beta} \frac{q_+ q_-}{\varepsilon^2} \left[1 - v_- + \frac{q_- v_+}{q_+} c \right]^{-1} R^{(\pi)}, \quad q_{\pm}^2 = v_{\pm}^2 \varepsilon^2 - m^2$$

$$c = \cos(\vec{q}_+ \hat{q}'_-), \quad R^{(\pi)} = \frac{\beta}{16(4\pi\alpha)^3} \sum_{\text{сн}} |M^{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma}|^2 \approx R_i^{(\pi)}, \quad (30)$$

$$R_i^{(\pi)} = F_{\pi}^2(\beta_1) \frac{1}{8\beta_1^2} \left[\beta(\beta_1 - 4m^2) - (u_1 - t)(u - t_1) \right] \left[-\frac{m_e^2 \beta(1-v)}{(k p_-)^2} + \frac{\beta}{k p_-} \frac{1+(1-v)^2}{v} \right] + F_{\pi}^2(\beta_1) \frac{1}{8\beta_1^2} \left[\beta(\beta_1 - 4m^2) - (u_1 - \tilde{t})(\tilde{u} - \tilde{t}_1) \right] \left[-\frac{m_e^2 \beta(1-v)}{(k p_+)^2} + \frac{\beta}{k p_+} \frac{1+(1-v)^2}{v} \right],$$

где $F_{\pi}(\beta_1)$ - формфактор пиона, $F_{\pi}(0) = 1$, $\beta_1 = \beta(1-v)$ величины $\beta, t, t_1, u, u_1, \tilde{u}, \tilde{t}$ совпадают с приведенными в (29).

Входящие в (28-30) выражения содержат "пиковости". Пользуясь законами сохранения, можно получить:

$$k p_{\pm}^0 = k q_{\pm} = \frac{\beta}{2}(1-v_{\mp})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Получим ограничения на частоту и углы вылета фотона, обеспечивающие кинематику "квазиупругого" события. Сперва рассмотрим случай образования легких частиц (масса много меньше энергии).

Из законов сохранения имеем в С.Ц.И.:

$$\vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \vec{k} = 0 \quad (I.1)$$

$$\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \omega = 2\varepsilon \quad (I.1)$$

Введем вектор \vec{n} , параллельный биссектрисе угла между \vec{p}_3 и $-\vec{p}_4$:

$$\vec{n} = \frac{\vec{p}_3}{\varepsilon_3} - \frac{\vec{p}_4}{\varepsilon_4}, \quad \vec{n}^2 = 2(1 + \cos\theta_{34}) \quad (I.2)$$

Из соотношений $\vec{n}(\vec{p}_3 + \vec{p}_4 + \vec{k}) = 0$, $\vec{k}^2 = \omega^2 = (\vec{p}_3 + \vec{p}_4)^2$ получим

$$2\omega^2(1 + \cos\theta_{34}) = (\varepsilon_3 - \varepsilon_4)^2(1 + \cos\theta_{34})^2 / \cos^2\theta_k \quad (I.3A)$$

$$(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)^2 + 2\varepsilon_3\varepsilon_4(1 - \cos\theta_{34}) = \omega^2 \quad (I.3B)$$

$$\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \omega = 2\varepsilon \quad (I.3B)$$

$$\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \omega = 2\varepsilon \quad (I.3B)$$

Из (I.3B, B) имеем $(\varepsilon_3 - \varepsilon_4)^2 = 4\left(\frac{\omega^2}{4} - \varepsilon(\varepsilon - \omega) \frac{1 - \cos\theta_{34}}{1 + \cos\theta_{34}}\right)$, подставляя в (I.3A):

$$y^2(1 + \cos\theta_{34} - 2\cos^2\theta_k) + 4y(1 - \cos\theta_{34}) - 4(1 - \cos\theta_{34}) = 0, \quad y = \frac{\omega}{\varepsilon}, \quad (I.4)$$

$$y = \frac{-2(1 - \cos\theta_{34}) + 2\sin\theta_k \sqrt{2(1 - \cos\theta_{34})}}{2\sin^2\theta_k - (1 - \cos\theta_{34})} = \frac{2\sin\frac{\theta_{34}}{2}}{\sin\theta_k + \sin\frac{\theta_{34}}{2}}$$

Поскольку для упругого события $\theta_{34} \leq 2\chi(\varphi) = [\Delta\theta^2 \cos^2\varphi + \Delta\psi^2 \sin^2\varphi]^{1/2}$, то при $\Delta\theta \sim \Delta\psi \ll 1$ получим искомое ограничение:

$$0 < y < \frac{2\chi}{\chi + \sin\theta_k} \quad (I.5)$$

В случае тяжелых частиц аналогичное вычисление приводит к уравнению:

$$(2-y)^2 \left[1 - \frac{4\delta^2}{(2-y)^2 - y^2 \cos^2\theta_k} \right] = y^2 \cos^2\theta_k \left[1 + \frac{4\sin^2\theta_k}{4\chi^2 \cos^2\theta_k} \right], \quad \chi < \chi(\varphi) \quad (I.6)$$

В общем случае анализ (I.6) затруднителен. Однако при $y \ll 1$ (I.6) упрощается и имеем:

$$0 < y < \frac{2\beta\chi(\varphi)}{\sin\theta_k}, \quad \beta = \sqrt{1 - \delta^2}. \quad (I.7)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Перепишем фазовый объем конечных частиц в постановке " $\Delta\theta, \Delta\psi$ " для процесса $e^+e^- \rightarrow q^+q^-\gamma$. Пользуясь законами сохранения и определением вектора \vec{n} (I.1.2), имеем:

$$\vec{n}_+ q_+ + \vec{n}_- q_- = -\vec{k}$$

$$\vec{n}_+ - \vec{n}_- = \vec{n} \quad (2.1)$$

где $q_{\pm} = |\vec{q}_{\pm}|$, $\vec{n}_{\pm} = \vec{q}_{\pm} / q_{\pm}$. Из (2.1) получаем $\vec{n}_+ = \frac{-\vec{k} + \vec{n}q_-}{q_+ + q_-}$. Проведем в фазовом объеме

$$d\Gamma = \frac{d^3q_+ d^3q_- d^3k}{2\varepsilon_+ 2\varepsilon_- 2\omega} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^3} \delta^{(4)}(p_+ + p_- - q_+ - q_- - k) \quad (2.2)$$

Интегрирование по d^3q_+ с помощью δ -функции. Для этого переписем d^3q_+ в виде:

$$d^3q_+ = \varepsilon_+ q_+ d\varepsilon_+ d\vec{n}_+ = \varepsilon_+ q_+ d\varepsilon_+ \frac{q_-^2}{(q_+ + q_-)^2} d\vec{n} = \frac{4\varepsilon_+ q_+ q_-^2}{(q_+ + q_-)^2} d\varepsilon_+ d\Omega_{\vec{n}} \quad (2.3)$$

где в силу малости $\chi(\varphi)$ мы воспользовались тем, что $d\vec{n} = 4d\Omega_{\vec{n}}$. Выполняя интегрирование по $d\varepsilon_+$ с помощью δ -функции, получим

$$d\Gamma = \frac{d\Omega_n d\Omega_k \omega d\omega}{2(2\pi)^5} \cdot \frac{q_+^2 q_-^2}{(q_+ + q_-)^2 (q_+ \varepsilon_- + q_- \varepsilon_+)} \quad (2.4)$$

Это выражение (пока точное) можно упростить для случая упругой кинематики, когда $\cos(\vec{p}_3, \vec{p}_4) \approx 1$. Из уравнений

$$\begin{aligned} \xi_+ + \xi_- &= 2\xi - \omega, & q_{\pm}^2 &= \xi_{\pm}^2 - m^2 \\ -2q_+q_- + q_+^2 + q_-^2 &= \omega^2 \end{aligned}$$

можно получить

$$\frac{q_{\pm}}{\xi_{\pm}} = \left(1 - \frac{v}{2}\right) \left[1 - \frac{\sigma^2}{1-v}\right]^{1/2} \pm \frac{v}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{m^2}{\xi^2}, \quad (2.5)$$

$$\xi_{\pm} = \gamma_{\pm} = 1 - \frac{v}{2} \pm \frac{v}{2} \left[1 - \frac{\sigma^2}{1-v}\right]^{1/2}$$

Подставляя (2.5) в (2.4), получим выражение для $d\Gamma$, приведенное в тексте.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

При интегрировании выражений, содержащих $(1 - \beta \cos(\vec{p}'_-, \vec{k}))^{-1,2}$ требуется осторожность, поскольку в ограничение на частоту входит угол между фотоном и вектором, отличающийся от (\vec{p}'_-, \vec{k}) при малых θ_k .

Разобьем область интегрирования по углам и частотам фотонов на три:

$$\int_0^{\chi \frac{1+v}{1-v}} d\theta_k \int_{\Delta} d\nu + \int_{\chi \frac{1+v}{1-v}}^{\sigma} d\theta_k \int_{\Delta} d\nu + \int_{\sigma}^{\pi} d\theta_k \int_{\Delta} d\nu = I + II + III. \quad (3.1)$$

Верхний предел в I-ом интеграле определяется из точки пересечения сферы $\nu = 1 - \frac{1}{2}$ и веретенообразной фигуры Рис.4, $\sigma \ll 1$ - вспомогательный параметр, выпадающий из окончательных выражений.

Установим связь углов χ , $\theta_k = (\vec{k}, \vec{n})$, (\vec{p}'_-, \vec{k}) для малых θ_k . Из Рис.4 ясно, что

$$(\vec{p}'_-, \vec{k}) = \theta_k + \chi, \quad (\vec{p}'_-, \vec{p}'_+) = 2\chi < 2\chi_{\max} \quad (3.2)$$

Поскольку конечный электрон излучает фотон преимущественно вдоль направления своего движения, имеем:

$$\gamma_+ = 1, \quad \gamma_- = 1 - v. \quad (3.3)$$

Проекция векторов \vec{k} и \vec{p}'_+ на направление, перпендикулярное \vec{p}'_+ , должны быть равны, откуда

$$v(\theta_k - \chi) = 2\chi(1-v) \quad (3.4)$$

Из (3.2-4) получим

$$\chi = \frac{v}{2-v} \theta_k, \quad \theta_k + \chi = (\vec{p}'_-, \vec{k}) = \frac{2\theta_k}{2-v} \quad (3.5)$$

Рассмотрим интеграл

$$J_2 = \frac{m_e^2}{8} \int_{\Delta} d\nu \frac{v(\nu)}{(2-\nu)^2} \int_0^{\pi} d\theta_k \frac{(\nu)^{-2}}{v^2 [1 - \beta \cos(\vec{p}'_-, \vec{k})]^2}$$

Весь вклад, неубывающий в пределе $m_e/8 \rightarrow 0$, происходит от области I B (3.1):

$$J_2 = \frac{m_e^2}{8} \int_{\Delta} d\nu \frac{v(\nu)}{(2-\nu)^2} \int_0^{\chi \frac{1+v}{1-v}} d\theta_k \frac{(\nu)^{-2}}{[1 - \beta + \frac{1}{2}(\frac{2\theta_k}{2-v})^2]^2} = \frac{\pi}{4} \ln \frac{1+v}{\Delta} \quad (3.6)$$

Рассмотрим теперь

$$J_1 = \int_{\Delta} d\nu \frac{v(\nu)}{(2-\nu)^2} \int_0^{\sigma} d\theta_k \frac{1 + (\nu)^2}{v^2(1-v)} \frac{1}{1 - \beta \cos(\vec{p}'_-, \vec{k})}$$

Пользуясь (3.1), представим J_1 в следующем виде:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_0^{\chi \frac{1+v}{1-v}} \frac{\theta_k d\theta_k}{1 - \beta + \frac{1}{2}(\frac{2\theta_k}{2-v})^2} \int_{\Delta} R(\nu) d\nu + \int_{\chi \frac{1+v}{1-v}}^{\sigma} \frac{\theta_k d\theta_k}{\frac{1}{2}(\frac{2\theta_k}{2-v})^2} \int_{\Delta} R(\nu) d\nu + \int_{\sigma}^{\pi} \frac{\theta_k d\theta_k}{1 - \cos \theta_k} \int_{\Delta} R(\nu) d\nu \right\}$$

Дальнейшее интегрирование элементарно и дает

$$\int_{\Delta} d\nu \frac{v(2-2\nu+\nu^2)}{(2-\nu)^2} \int_0^{\pi} \frac{d\theta_k}{1 - \beta \cos(\vec{p}'_-, \vec{k})} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ -\beta \ln \Delta + (\beta + 2) \ln \chi(\nu) - \right. \quad (3.7)$$

$$-2 \ln(v_2) \left(\ln(v_2) - (v_2) + \frac{1}{4}(v_2)^2 \right) + \ln^2(v_2) - \ln^2 \chi(\varphi) + F(v_2) + \left(\frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{4}v_2^2 \right) \ln v_2 - \frac{5}{4}(v_2) + \frac{1}{8}(v_2)^2 + \frac{\pi^2}{12} \left. \right\}, F(x) = \int_0^x \frac{dt}{t} \ln(v_2 t).$$

Интегрирование выражений, содержащих $\ln \chi(\varphi) = \frac{1}{2} \ln(\Delta \theta \cos^2 \varphi + \Delta \varphi^2 \sin^2 \varphi)$, проводится с использованием следующих интегралов:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \ln(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) = 4\pi \ln \frac{a+b}{2}, \quad a, b > 0$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \ln^2(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) = 8\pi \left[\ln \frac{a+b}{2} \ln \left| \frac{a-b}{2} \right| + \ln a \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right| + F\left(\frac{a-b}{2}\right) - F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F\left(\frac{a+b}{a}\right) - F\left(\frac{a-b}{a}\right) + \frac{\pi^2}{12} \right]. \quad (3.8)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Выражения, содержащие $[1 - \beta \cos(\vec{p} \cdot \vec{k})]^{-1, -2}$, соответствующим излучению фотона вдоль начальных частиц, поэтому в силу ограничения (I) частота его мала $\nu \sim \chi$. Рассмотрим

$$I_2 = \frac{4m_e^2}{8} \int \frac{d\nu \nu (H) d\Omega_k}{(2-\nu)^2 \nu^2 [1 - \beta \cos(\vec{p} \cdot \vec{k})]^2} = \frac{m_e^2}{8} \int \frac{d\Omega_k [\ln \chi^2(\varphi) - 2 \ln \Delta - 2 \ln \sin^2 \theta_k]}{[1 - \beta (\cos \theta \cos \theta_k + \sin \theta \sin \theta_k \cos \varphi)]^2}$$

Основной вклад в него происходит от области $\theta = \theta_k$, $\varphi = 0$:

$$I_2 = [2 \ln \Delta \theta - 2 \ln \sin \theta] \frac{m_e^2}{28} \int_{-1}^1 \frac{2\pi d \cos \alpha}{(1 - \beta \cos \alpha)^2} = \pi \ln \frac{\Delta \theta}{\Delta \sin \theta} \quad (4.1)$$

Рассмотрим теперь

$$I_1 = \int \frac{d\nu}{\nu} \frac{d\Omega_k}{1 - \beta \cos(\vec{p} \cdot \vec{k})}$$

Пользуясь $\int d\Omega_k [1 - \beta \cos(\vec{p} \cdot \vec{k})]^{-1} = 2\pi \ln \frac{(1+\beta)}{(1-\beta)}$, запишем в виде

$$I_1 = 2\pi \ln \frac{\Delta \theta}{\Delta \sin \theta} + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta_k d\theta_k \frac{\ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta_k} + \frac{1}{2} \ln(\cos^2 \varphi + \lambda^2 \sin^2 \varphi)}{1 - (\cos \theta \cos \theta_k + \sin \theta \sin \theta_k \cos \varphi)}, \quad (4.2)$$

где $\lambda = \Delta \varphi / \Delta \theta$. Во втором слагаемом для члена $\sim \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta_k}$ интегрирование по φ можно провести с помощью $\int_0^{2\pi} d\varphi (a + b \cos \varphi)^{-1} = 2\pi (a^2 - b^2)^{-1/2}$. В результате

$$2\pi \int_0^\pi \frac{\sin \theta_k \ln \frac{\sin \theta}{\sin \theta_k}}{|\cos \theta - \cos \theta_k|} d\theta_k = \pi \left[\int_{-1}^z \frac{dx}{z-x} \ln \frac{1-x^2}{1-x^2} + \int_z^1 \frac{dx}{x-z} \ln \frac{1-x^2}{1-x^2} \right] = (4.3)$$

$$= \pi \left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right].$$

Остальные члены проинтегрируем сначала по θ_k . При этом удобна замена $\text{tg}(\theta_k/2) = t$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta_k \sin \theta_k}{1 - \cos \theta \cos \theta_k - \sin \theta \sin \theta_k \cos \varphi} = 4 \int_0^\infty \frac{t dt}{(1+t^2)[t^2(\cos \theta) - 2t \sin \theta \cos \varphi + 1 - \cos \theta]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\ln(\cos^2 \varphi + \lambda^2 \sin^2 \varphi)}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \left[\cos \theta \ln \frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta} - 2\varphi \text{ctg} \varphi \right]. \quad (4.4)$$

Первое слагаемое из (4.4) вычислим с помощью интеграла /10/:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\ln(p^2 \cos^2 \varphi + q^2 \sin^2 \varphi)}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = \frac{2\pi}{ab} \ln \frac{ap + bq}{a+b}, \quad a, b, p, q > 0$$

что даст

$$2z \ln \frac{1+z}{1-z} \cdot \frac{2\pi}{|z|} \ln \frac{|z|+\lambda}{|z|}, \quad z = \cos \theta \quad (4.5)$$

Второе слагаемое вычислим дифференцированием по параметру

$$A(\lambda^2) = - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi \text{ctg} \varphi \cdot \ln(\cos^2 \varphi + \lambda^2 \sin^2 \varphi)}{\cos^2 \varphi + z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad A(1) = 0$$

Пользуясь $\int_0^{2\pi} d\varphi \ln(1 + p \cos^2 \varphi) = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1+p}}{2}$, $p > -1$, получим

$$\frac{\partial A}{\partial \lambda^2} = - \frac{\pi}{z^2 \lambda^2} \ln \frac{1+\lambda}{1+|z|} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial \lambda} = \pi \left(\frac{1}{\lambda - |z|} + \frac{1}{\lambda + |z|} \right) \ln \frac{1+\lambda}{1+|z|}. \quad (4.6)$$

Окончательно

$$A = \pi \int_1^\lambda dx \left(\frac{1}{x-z} + \frac{1}{x+z} \right) \ln \frac{1+x}{1+z} = \ln \frac{1-z}{1+z} \ln \frac{\lambda+z}{\lambda-z} + \int_{\frac{1-z}{1+z}}^{\frac{\lambda+z}{1+z}} \frac{dx}{x} \ln(1+x) + \int_{\frac{1-z}{1+z}}^{\frac{\lambda+z}{1+z}} \frac{dt}{t} \ln(1+t) \quad (4.7)$$

$$\int_0^\pi \frac{\varphi \operatorname{ctg} \varphi \ln(\cos^2 \varphi + \lambda^2 \sin^2 \varphi)}{\cos^2 \varphi + z^2 \sin^2 \varphi} = \pi \left\{ \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1+z}{1-z} \right) - \ln \frac{1-|z|}{1+|z|} \ln \frac{\lambda+|z|}{\lambda-|z|} - F\left(\frac{z-\lambda}{1+z}\right) - F\left(\frac{-z-\lambda}{1-z}\right) \right\}.$$

Пользуясь (4.5), (4.7) получаем

$$\int \frac{dV}{V} \left(\frac{dO_K}{1-\beta \cos(\vec{p}, \vec{k})} \right) = 2\pi \left\{ \ln \frac{\Delta \theta}{\Delta \sin \theta} \cdot \ln \frac{\delta}{m^2} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{3}{4} \ln^2 \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + F\left(\frac{z-\lambda}{1+z}\right) + F\left(\frac{-z-\lambda}{1-z}\right) \right\}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Вычислим

$$\int \frac{dV}{V} \left(dO_K \left\{ \frac{1-z}{(1+C_K)(1+\tilde{z})} + \frac{1-z}{(1-C_K)(1-\tilde{z})} - \frac{1+z}{(1+C_K)(1-\tilde{z})} - \frac{1+z}{(1-C_K)(1+\tilde{z})} \right\} \right) =$$

$$= 2 \int dO_K \left[\ln \frac{\Delta \theta}{\Delta \sin \theta} + \ln \frac{\delta \sin \theta}{\sin \theta_K} + \frac{1}{2} \ln(\cos^2 \varphi + \lambda^2 \sin^2 \varphi) \right] \left[\frac{1-z}{(1-\beta C_K)(1-\beta \tilde{z})} - \frac{1+z}{(1+\beta C_K)(1+\beta \tilde{z})} \right]. \quad (5.1)$$

Слагаемое $\sim \ln \frac{\Delta \theta}{\Delta \sin \theta}$ интегрируем Фейнмановской параметризацией:

$$2\pi \int_0^1 dx \int_{-1}^1 \frac{dz' (1-z')}{[1-\beta z' n(x)]^2} = 4\pi(1-z) \int_0^1 \frac{dx}{1-\beta^2 n^2}, \quad n^2 = 1-2x(1-x)(1-z),$$

подставляя в (5.1), получим:

$$\int \frac{dO_K (1-z)}{[1-\beta \cos(\vec{p}, \vec{k})][1-\beta \cos(\vec{p}', \vec{k}')] } = 4\pi(1-z) \int_0^1 \frac{dx}{\frac{4m^2}{3} + 2x(1-x)(1-z)} = 4\pi \left(\ln \frac{1-z}{2} + \beta \right). \quad (5.2)$$

Второе слагаемое в (5.1) после интегрирования по φ даст (здесь можно положить $\beta = 1$):

$$4\pi \int_0^\pi \sin \theta_K \ln \frac{\delta \sin \theta}{\sin \theta_K} \left[\frac{1-\cos \theta}{(1-\cos \theta_K) |\cos \theta - \cos \theta_K|} - \frac{1+\cos \theta}{(1-\cos \theta_K) |\cos \theta + \cos \theta_K|} \right] d\theta_K =$$

$$= 2\pi \left\{ \int_0^{1+z} \frac{dt(1-z)}{t(1-z+t)} \ln \frac{1-z^2}{(1-z+t)(1+z-t)} + \int_0^{1-z} \frac{dt(1-z)}{t(1-t-z)} \ln \frac{1-z^2}{(1-z-t)(1+z+t)} \right\} - (z \rightarrow -z).$$

Эти интегралы выражаются через дилוגарифмы, в результате получим:

$$2\pi \left[\ln^2 \left(\frac{1-z}{2} \right) - \ln^2 \left(\frac{1+z}{2} \right) + 2 \int_{\frac{1-z}{2}}^{\frac{1+z}{2}} \frac{dx}{x} \ln(1-x) \right]. \quad (5.3)$$

Рассмотрим, наконец, третье слагаемое в (5.1). Сперва проведем интегрирование по θ_K (см. Прил. 4):

$$2 \int_0^\pi d\varphi \ln(\cos^2 \varphi + \lambda^2 \sin^2 \varphi) \int_0^\infty \frac{2dt \cdot 2t}{(1+t^2)^2} \left\{ \frac{(1+t^2)^2 (1-\cos \theta)}{2t^2 [1+t^2 \cos \theta (1-t^2) - 2t \sin \theta \cos \varphi]} - \left(\theta \rightarrow \pi - \theta \right) \right\}$$

Интеграл по t дает

$$2 \ln \frac{1-z}{1+z} + 2(\pi-\varphi) \operatorname{ctg} \varphi + 2\varphi \operatorname{ctg} \varphi, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

При интегрировании по φ два последние слагаемые исчезают, так что в результате получим:

$$2 \ln \frac{1-z}{1+z} \cdot 4\pi \ln \frac{1+\lambda}{2}. \quad (5.4)$$

Подставляя (5.2-4) в (5.1), получим:

$$\int \frac{dV}{V} dO_K \left[\frac{1-z}{(1-\beta C_K)(1-\beta \tilde{z})} + \frac{1-z}{(1+\beta C_K)(1+\beta \tilde{z})} - \frac{1+z}{(1-\beta C_K)(1+\beta \tilde{z})} - \frac{1+z}{(1+\beta C_K)(1-\beta \tilde{z})} \right] =$$

$$= 2\pi \left\{ 4 \ln \frac{\Delta \theta}{\Delta \sin \theta} \ln \frac{1-z}{1+z} + \ln^2 \left(\frac{1-z}{2} \right) - \ln^2 \left(\frac{1+z}{2} \right) + 2 \int_{\frac{1-z}{2}}^{\frac{1+z}{2}} \frac{dx}{x} \ln(1-x) + 4 \ln \frac{1+\lambda}{2} \ln \frac{1-z}{1+z} \right\}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Виртуальная поправка, равно как и поправка от излучения мягких фотонов, считались ранее в /10/. Вместе с Борновской амплитудой получим для зарядово-четной части:

$$\left(\frac{d\sigma}{dO_M} \right)^{B+V+S} = \frac{\alpha^2 \beta (2-\beta^2+\beta^2 z^2)}{4\beta} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left[-2 + \beta e + \frac{1+\beta^2}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right] \ln \Delta + \frac{13}{12} \beta e + \right. \quad (6.1)$$

$$+ \left(\beta - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \beta^3 + \frac{3}{4\beta} \right) \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} + \ln \frac{1+\beta}{2} + \frac{1+\beta^2}{\beta} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \ln \frac{1+\beta}{2\beta^2} + \frac{\pi^2}{12} - F\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \right] +$$

$$\left. + \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{3} \beta^2 - \frac{31}{9} - \frac{1-\beta^2}{4\beta} (2-\beta^2+\beta^2 z^2)^{-1} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right\}.$$

Вычисление вклада от излучения жестких фотонов проведем для случая энергии, близкой к порогу реакции $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. При этом можно ограничиться приближением классических токов:

Приведем некоторые свойства функции Спенса:

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{t} \ln(1+t), \quad F(-x) = \int_0^x \frac{dt}{t} \ln(1+x), \quad F(1) = -\frac{1}{2} F(-1) = -\frac{\pi^2}{6},$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln^2 2 - \frac{\pi^2}{12},$$

$$F(x) + F(1/x) = -\frac{\pi^2}{6} + \ln x \ln(1/x), \quad F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} \ln^2 x, \quad x > 0$$

$$F(-x) + F\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2 |x|, \quad -x > 0.$$

Для малых значений аргумента

$$F(x) = -\left(x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \dots\right)$$

На Рис.5 приведен график функции Спенса $F(x)$ для x от -5 до 5.

$$\frac{1}{16(4\pi\alpha)^3 c_m} \sum |M^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma}|^2 = -\left(\frac{q_-}{kq_-} - \frac{q_+}{kq_+} + \frac{p_+}{kp_+} - \frac{p_-}{kp_-}\right)^2 \left[m^2 \beta + \frac{1}{2}(m^2 - u)^2 + \frac{1}{2}(m^2 - t)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 - \beta^2 + \beta^2 z^2) \left[-\frac{2m^2}{3v^2} \left(\frac{1}{(1 + \beta e^{\tilde{z}})^2} + \frac{1}{(1 - \beta e^{\tilde{z}})^2} \right) + \frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{1 + \beta e^{\tilde{z}}} + \frac{1}{1 - \beta e^{\tilde{z}}} \right) \right] - \quad (6.2)$$

$$- \frac{2m^2}{3} \left(\frac{1}{(1 + \beta c_k)^2} + \frac{1}{(1 - \beta c_k)^2} \right) + \frac{1 + \beta^2}{2} \left(\frac{1}{1 - \beta c_k} + \frac{1}{1 + \beta c_k} \right),$$

$$c_k = \cos(\vec{k}, \vec{q}_-), \quad \tilde{z} = \cos(\vec{k}, \vec{p}_-).$$

Область интегрирования для слагаемых $\sim (1 - \beta \cos(\vec{q}_-, \vec{k}))^{-1}$ будет (см. (I.1))

$$\int_0^A d\theta_k \int_{\Delta} dv + \int_0^{\frac{2\beta X}{\sin \theta_k}} d\theta_k \int_{\Delta} dv, \quad A = \arcsin \frac{2\beta X(\varphi)}{1 - \beta}.$$

Интегралы по v дают $\ln \frac{1-\beta}{\Delta}$ или $\ln \frac{2\beta X}{\Delta \sin \theta_k}$ соответственно. Интегрирование по θ_k проводится с помощью выражений:

$$\int_0^{\lambda} \frac{\sin \theta d\theta}{1 - \beta \cos \theta} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 - \beta c}{1 - \beta}, \quad \int_0^{\lambda} \frac{d\theta \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2} = \frac{1 - c}{(1 - \beta)(1 - \beta c)},$$

$$\int_{\lambda}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{1 - \beta \cos \theta} \ln \sin \theta = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \ln \frac{1 + \beta^2}{\beta^2} + \frac{1}{2\beta} \left[-\frac{\pi^2}{6} - F\left(\frac{1 - \beta c}{1 - \beta}\right) + F\left(\frac{1 - \beta}{1 - \beta c}\right) \right] \text{ и т.д.}$$

$$- F\left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta}\right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta}\right), \quad c = \cos \lambda.$$

Для вклада жестких фотонов вблизи порога получаем ($c = \cos \lambda$, $\gamma = \frac{2\beta X}{1 - \beta}$):

$$\left(\frac{d\sigma}{dO_m}\right)^{\text{hard}} = \frac{2^3 \beta}{2\pi^3} \left\{ (-2 + \beta e + \frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}) \ln \frac{1}{\Delta} + (\beta e - 1) \ln \frac{\beta \Delta \theta}{\sin \theta} + F\left(\frac{-z - \lambda}{1 - z}\right) + \right.$$

$$\left. + F\left(\frac{z - \lambda}{1 + z}\right) - \frac{3}{4} \ln^2 \left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - \frac{(1 + \beta)(1 - c)}{1 - \beta c} \right] \ln(1 + \gamma) \right\} \quad (6.3)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \ln \gamma \left[\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - \frac{(1 + \beta)(1 + c)}{2(1 + \beta c)} \right] - \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[-\frac{(1 + \beta)(1 + c) \ln(1 + c^2)}{2(1 + \beta c)} - \ln \frac{2}{1 - c} + \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta c} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 + \beta^2}{2\beta} \left(-\frac{\pi^2}{6} - F\left(\frac{1 + \beta c}{1 + \beta}\right) + F\left(\frac{1 + \beta}{1 + \beta c}\right) - F\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right) + \ln \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta}\right) \right) \right] \} \chi (2 - \beta^2 + \beta^2 z^2).$$

Полная поправка получается при сложении (6.1) и (6.3), параметр Δ при этом выпадает.

Л и т е р а т у р а

1. J.P.Perez-Y-Jorba and F.M.Renard. Physics Reports, 31C (1977)1.
2. В.Н.Байер, В.С.Фадин, В.А.Хозе. Ядерная физика, 6(1967)560.
3. С.М.Суханов, В.С.Фадин, В.А.Хозе. ДАН СССР, 178(1968) 822.
4. G.Bonneau, F.Martin. Nucl. Phys., 27B (1971) 381.
5. F.A.Berends et al. Nucl. Phys., 57B(1973) 381.
6. F.A.Berends et al. Nucl. Phys., 68B(1974) 541.
7. V.N.Baier, V.S.Fadin, V.A.Khoze. Nucl. Phys., 65B (1973) 381.
8. M.Readhead. Proc. Roy. Soc., A220 (1953) 219.
9. Р.В.Половин. ЖЭТФ, 31(1956) 449.
10. Е.А.Курасов, Г.В.Меледин. Nucl. Phys., 122B (1977) 485.

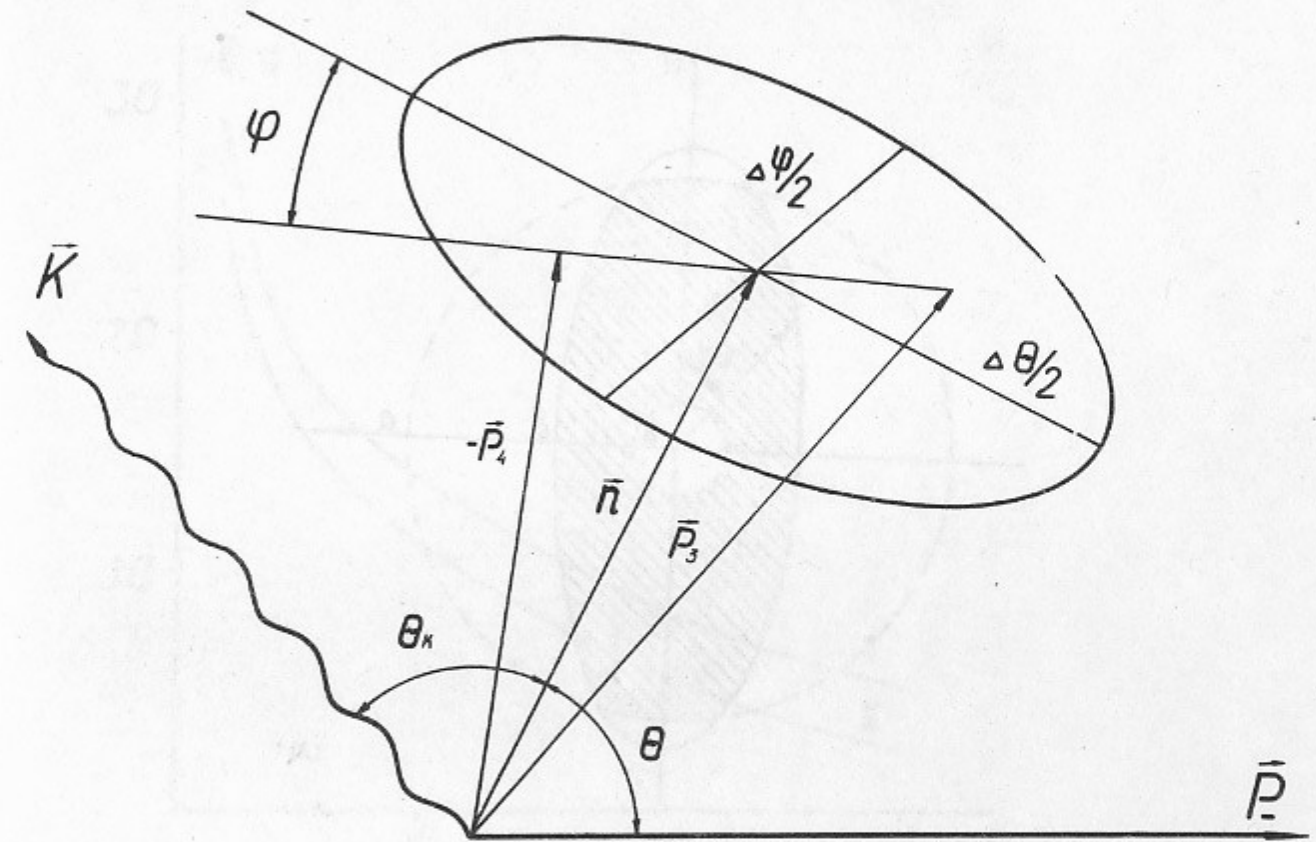


Рис.1. Кинематика задачи.

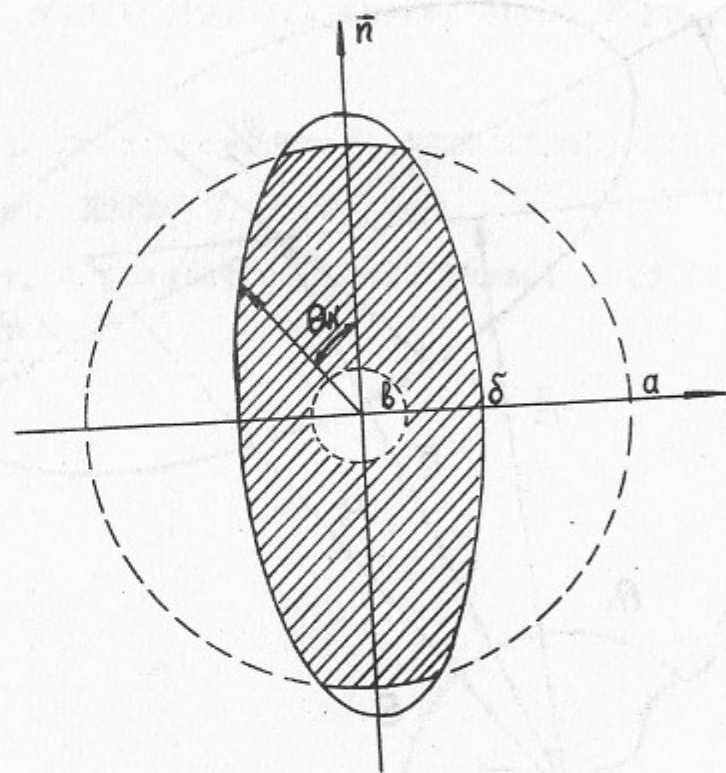


Рис.2.

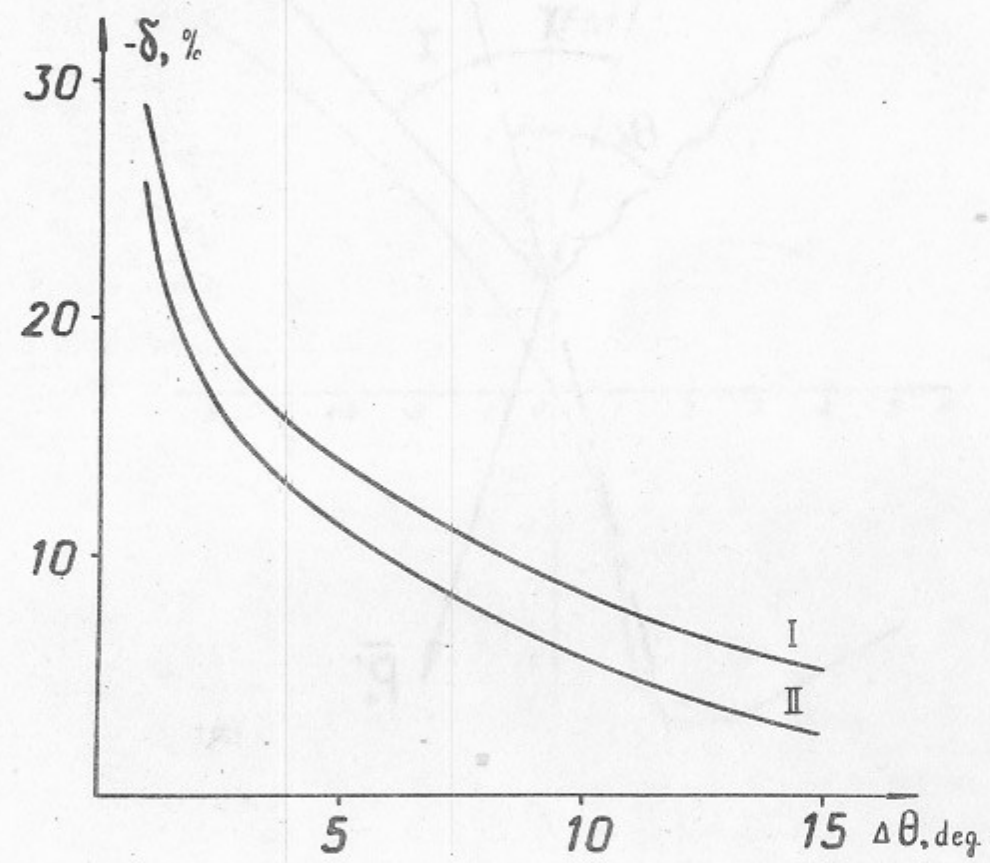


Рис.3. Зависимость р.п. от угла $\Delta\theta$ для процессов $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, $\mu^+\mu^-$ ($\theta=90^\circ$, $\Delta\psi=3^\circ$, $\epsilon=500$ Мэв).

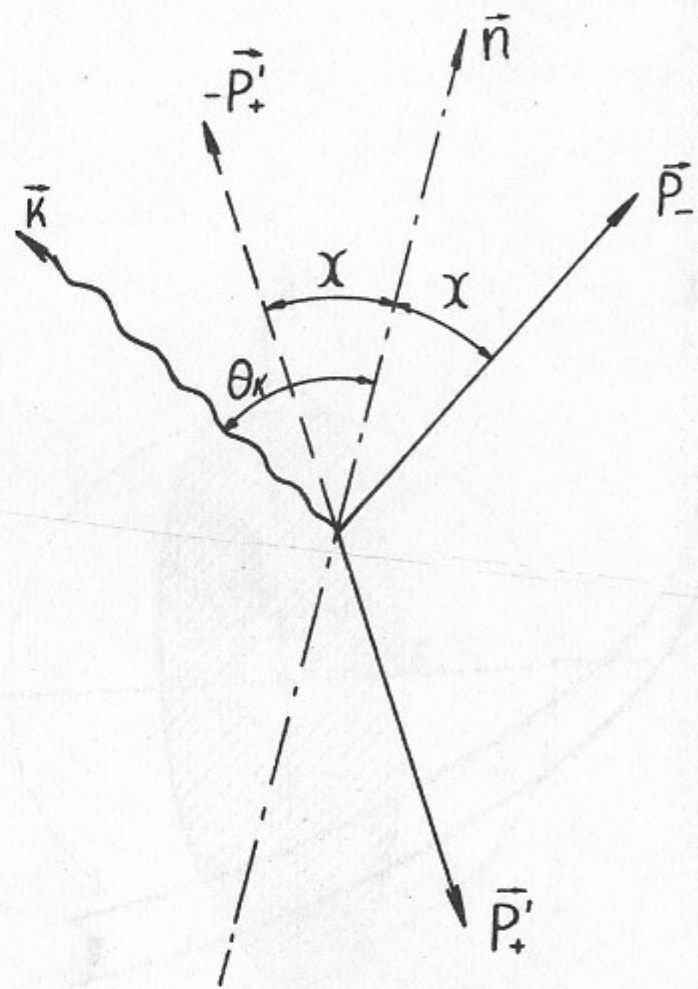


Рис.4.

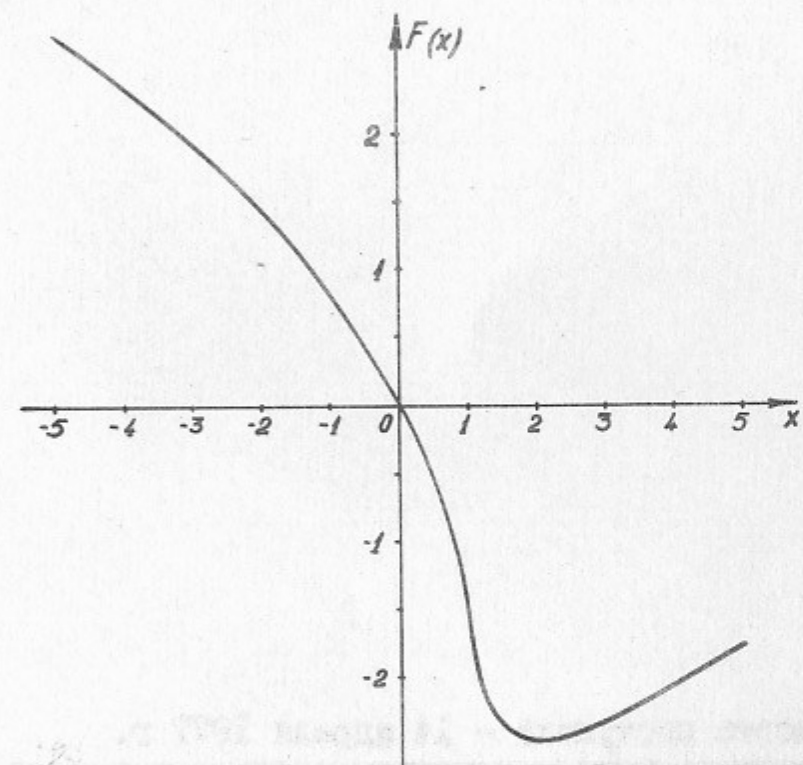


Рис.5. Функция Спенса.

Работа поступила - 14 апреля 1977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ

Подписано к печати 30.X-1978 г. МН 07777

Усл. 1,9 печ.л., 1,7 учетно-изд.л.

Тираж 250 экз. Бесплатно

Заказ № 82.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР