23

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 78-51

А.А.Жоленц

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ПУЧКА В ЭЛЕКТРОН - ПОЗИТРОННЫХ НАКОПИТЕЛЯХ СО СВЯЗЬЮ КОЛЕБАНИЙ

Новосибирск
1978

$$\begin{pmatrix} u \\ P_u \\ V \\ P_V \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} X \\ P_X \\ Z \\ P_Z \end{pmatrix}, \quad R \equiv \begin{bmatrix} P & 0 & d & -b \\ 0 & P & -c & a \\ -a & -b & P & 0 \\ -c & -d & 0 & P \end{bmatrix} \tag{3}$$

позволяет получить разделение переменных в уравнениях движения:

$$\begin{pmatrix} u \\ P_u \\ V \\ P_V \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[L(a-d)+Kb]\frac{1}{P}, & 1-Lb\frac{1}{P} & 0 & 0 \\ -F-(Lc-Ka)\frac{1}{P}, & \frac{1}{2}[L(a-d)+Kb]\frac{1}{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}[L(a-d)-Kb]\frac{1}{P} & 1+Lb\frac{1}{P} \\ 0 & 0 & -G+(Lc-Kd)\frac{1}{P}, & -\frac{1}{2}[L(a-d)-Kb]\frac{1}{P} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ P_u \\ V \\ P_V \end{pmatrix} \tag{4}$$

Дифференцирование производится по продольной координате S .

Коэффициенты матрицы R являются периодическими функциями и связаны с коэффициентами транспортной 4x4 матрицы элемента периодичности T соотношениями:

$$T(S+\Pi, S) = R\, U R^{-1}, \quad |R| = 1 \tag{5}$$

Матрица U – транспортная матрица в u, V координатах –диагональна и состоит из двух не нулевых 2x2 матриц с единичными детерминантами:

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \tag{6}$$

Аналогично случаю бетатронных колебаний без связи, матрицы A и B, можно представить в форме Куранта-Снайдера /6/:

$$A = I\cos\mu_1 + J_1 \sin\mu_1, \quad J_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ -\gamma_1, & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$B = I\cos\mu_2 + J_2 \sin\mu_2, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2, & \beta_2 \\ -\gamma_2, & -\alpha_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Здесь μ_1, μ_2 – набеги фаз колебаний на элементе периодичности, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ – периодические "амплитудные" функции.

Определим 2x2 матрицы M, m, n, N, D :

$$T = \begin{pmatrix} M & n \\ m & N \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

и с помощью (5,7) после несложных матричных преобразований получим:

$$\cos\mu_1 - \cos\mu_2 = \frac{1}{2} Sp(M-N)\left\{1 + \frac{|m| + |n| + Sp(nm)}{\left[\frac{1}{2} Sp(M-N)\right]^2}\right\}$$

$$P^2 = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2} Sp(M-N)}{2(\cos\mu_1 - \cos\mu_2)}$$

$$D = -\frac{m + S\tilde{n}\tilde{S}}{2(\cos\mu_1 - \cos\mu_2)P}$$

$$A = M + \frac{nm + I\cdot|n|}{2(\cos\mu_1 - \cos\mu_2)P^2} \tag{8}$$

$$B = N - \frac{mn + I\cdot|m|}{2(\cos\mu_1 - \cos\mu_2)P^2}$$

Знак " $\sim$ " обозначает транспонирование, Sp –шпур, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Таким образом, I0 независимых элементов транспортной матрицы T определяют четыре периодические функции, характеризующие движение в u, V координатах, четыре функции, отражающие наличие связи колебаний, и собственные частоты колебаний Q_1, Q_2 :

$$Q_{1,2} = \frac{1}{2\pi}\mu_{1,2}\, q \tag{9}$$

где q – число элементов периодичности.

2. Решения уравнений движения, записанных в форме (4), хорошо известны /I,4,5,6/:

$$u = C_u Y_u + C_u^* Y_u^* = \sqrt{\varepsilon_u \beta_1}\cos\Psi_1$$

$$P_V = C_u Y_u' + C_u^* Y_u^{*\prime} = -\sqrt{\varepsilon_u/\beta_1}\,[\sin\Psi_1 + \alpha_1\cos\Psi_1]$$

$$V = C_V Y_V + C_V^* Y_V^* = \sqrt{\varepsilon_V \beta_2}\cos\Psi_2$$

$$P_V = C_V Y_V' + C_V^* Y_V^{*\prime} = -\sqrt{\varepsilon_V/\beta_2}\,[\sin\Psi_2 + \alpha_2\cos\Psi_2] \tag{I0}$$

Здесь Y_u, Y_v – собственные функции соответствующих уравнений:

$$Y_{u,v} = \sqrt{\beta_{1,2}}\, \exp\left\{ i \int \frac{1 \mp l b \frac{1}{p}}{\beta_{1,2}} \right\}, \quad Y'_{u,v} = \frac{1}{\beta_{1,2}} \left(\frac{1}{2} \beta'_{1,2} + i \right) Y_{u,v}$$

$$\Psi_{1,2} = \int \frac{1 \mp l b \frac{1}{p}}{\beta_{1,2}} - \delta_{1,2}, \quad C_u, C_v, \delta_1, \delta_2$$ – постоянные интегрирования, $\mathcal{E}_u, \mathcal{E}_v$ – фазовые объемы в плоскостях $U - P_u$, $V - P_v$, являющиеся инвариантами движения:

$$\mathcal{E}_u = \gamma_1 U^2 + 2\alpha_1 U P_u + \beta_1 P_u^2 = 4|C_u|^2$$

$$\mathcal{E}_v = \gamma_2 V^2 + 2\alpha_2 V P_v + \beta_2 P_v^2 = 4|C_v|^2 \tag{II}$$

Введем функцию распределения числа частиц ρ в четырехмерном фазовом пространстве:

$$\rho = \rho_0 \exp\left\{ - \frac{\gamma_1 U^2 + 2\alpha_1 U P_u + \beta_1 P_u^2}{2\bar{\mathcal{E}}_u} - \frac{\gamma_2 V^2 + 2\alpha_2 V P_v + \beta_2 P_v^2}{2\bar{\mathcal{E}}_v} \right\} \tag{I2}$$

где $\bar{\mathcal{E}}_u, \bar{\mathcal{E}}_v$ – фазовые объемы соответствующие среднеквадратичным амплитудам колебаний. Используя матричные обозначения:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\bar{\mathcal{E}}_u} \begin{pmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \frac{1}{2\mathcal{E}_v} \begin{pmatrix} \gamma_2 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} U \\ P_u \\ V \\ P_v \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X \\ P_x \\ Z \\ P_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \tag{I3}$$

перепишем (I2) в виде:

$$\rho = \rho_0 \exp\{ -\tilde{V} Q V \} = \rho_0 \exp\{ -\tilde{X} \tilde{R}^{-1} Q R X \}$$

Средние значения $\langle X^2 \rangle, \langle Z^2 \rangle, \langle XZ \rangle$, определяющие бетатронные размеры пучка на заданном азимуте, найдем интегрированием:

$$\langle X_i X_j \rangle = \rho_0 \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} X_i X_j \exp\{ -\tilde{X} \tilde{R}^{-1} Q R X \} dX_1 dX_2 dX_3 dX_4 \tag{I4}$$

в результате которого получим:

$$\langle X^2 \rangle = \bar{\mathcal{E}}_u \beta_1 \rho^2 + (\gamma_2 b^2 + 2\alpha_2 b d + \beta_2 d^2) \bar{\mathcal{E}}_v$$
$$\langle Z^2 \rangle = \bar{\mathcal{E}}_v \beta_2 \rho^2 + (\gamma_1 b^2 - 2\alpha_1 a b + \beta_1 a^2) \bar{\mathcal{E}}_v$$
$$\langle XZ \rangle = [(\alpha_1 b - \beta_1 a) \bar{\mathcal{E}}_u + (\alpha_2 b + \beta_2 d) \bar{\mathcal{E}}_v]\, \rho \tag{I5}$$

Угол поворота полуосей эллипса поперечного сечения пучка относительно осей координат равен:

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\langle XZ \rangle}{\langle X^2 \rangle - \langle Z^2 \rangle} \right) \tag{I6}$$

3. Учтем влияние радиационных эффектов на движение частиц в электрон-позитронных накопителях. Как обычно /I,5/, рассмотрим средние воздействия излучения и ускоряющего поля, приводящие к затуханию колебаний, и поправки, вносимые статистическими флуктуациями.

Представим излучаемую мощность W_γ в виде ряда по малым отклонениям от равновесной орбиты и энергии:

$$W_\gamma = W_{\gamma 0} \left[1 + \Gamma_1 (X_\varepsilon + X) + \Gamma_2 (Z_\varepsilon + Z) + 2 \frac{\Delta E}{E_0} \right] \tag{I7}$$

Здесь $W_{\gamma 0}$ – мгновенная мощность потерь равновесной частицы, $X_\varepsilon, Z_\varepsilon$ – координаты синхротронных колебаний, Γ_1, Γ_2 – параметры магнитной структуры:

$$\Gamma_1 = 2 \left[\frac{B_{z0}}{B_0^2} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right)_0 - K \frac{B_{s0}^2}{B_0^2} \right]$$

$$\Gamma_2 = 2 \left[\frac{B_{z0}}{B_0^2} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_0 + \frac{B_{s0}}{B_0^2} \left(\frac{\partial B_z}{\partial s} \right)_0 \right] \tag{I8}$$

К – кривизна равновесной орбиты, $B_0^2 = B_{z0}^2 + B_{s0}^2$

Согласно /I,5/ $W_{\gamma 0}$ равно:

$$W_{\gamma 0} = \frac{2}{3} r_e c K^2 \frac{E_0^4}{(mc^2)^3} \tag{I9}$$

где $r_e = e^2 / mc^2$ – классический радиус электрона, mc^2 – масса покоя электрона.

Координаты бетатронных колебаний частицы $X(\Delta E, s)$ с мгновенной энергией $E = E_0 + \Delta E$ (E_0 равновесная энергия) отсчитываются от замкнутой (реперной) траектории, при движении по которой потери энергии на излучение $dE_{\gamma\varepsilon} = -\frac{1}{c} W_{\gamma\varepsilon}\, dS_\varepsilon$ равны приросту энергии при прохождении ускоряющего промежутка. Изменение координат на малом пробеге dS вследствие излучения энергии $dE_\gamma = -\frac{1}{c} W_\gamma\, dS$ можно представить в виде:

$$dX = -\begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_{Px} \\ \eta_z \\ \eta_{Pz} \end{pmatrix} \frac{dE_\gamma - dE_{\gamma\varepsilon}}{E_0} \tag{20}$$

Здесь $\eta_x, \eta_{Px}, \eta_z, \eta_{Pz}$ – компоненты вектора дисперсионной функции, которые находятся из условия периодичности с помощью транспортной матрицы T.

Пусть S_ε и S – длины дуг реперной траектории и траектории рассматриваемой частицы. Тогда:

$$\frac{dS_\varepsilon}{dS} = 1 - Kx \tag{21}$$

Последовательно применяя (I7,2I,I9), проделаем цепочку преобразований,

$$\frac{1}{E_0}\left(dE_\gamma - dE_{\gamma\varepsilon}\right) = -\frac{1}{c}\left(W_\gamma - W_{\gamma\varepsilon}\frac{dS_\varepsilon}{dS}\right) = -\frac{2}{3} r_e \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^3 K^2\left[x(K+\Gamma_1) + z\Gamma_2\right] \tag{22}$$

и подставляя (22) в (20) получим:

$$dV = -\frac{2}{3} r_e K^2 \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^3 \begin{pmatrix} \eta_u \\ \eta_{Pu} \\ \eta_v \\ \eta_{Pv} \end{pmatrix} \left\{u\left[(K+\Gamma_1)p - \Gamma_2 a\right] - P_u b\Gamma_2 + v\left[(K+\Gamma_1)d + \Gamma_2 p\right] - P_v b(K+\Gamma_1)\right\} \tag{23}$$

где

$$\begin{pmatrix} \eta_u \\ \eta_{Pu} \\ \eta_v \\ \eta_{Pv} \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_{Px} \\ \eta_z \\ \eta_{Pz} \end{pmatrix} \tag{24}$$

Действие ускоряющего поля также вызывает изменения координат бетатронных колебаний:

$$dX = -\begin{pmatrix} 0 \\ P_x \\ 0 \\ P_z \end{pmatrix} \frac{dE_{уск}}{E_0} \tag{25}$$

Производимая им работа $dE_{уск}$ идет на компенсацию потерь при излучении и на ускорение частицы. В среднем за период синхротронных колебаний:

$$\frac{1}{E_0}\left(\frac{dE}{dS}\right) = \frac{1}{c}\frac{\overline{W}_{\gamma\varepsilon}}{E_0} + \frac{1}{E_0}\frac{dE_0}{dS} \tag{26}$$

Применяя в (25) преобразование координат (3), получим:

$$\frac{dV}{dS} = -\begin{bmatrix} -bcu - bdP_u + bpP_v \\ (p^2+ad)P_u + acu - pcv \\ bpP_u - bcv + baP_v \\ -pcu - dcv + P_v(p^2+ad) \end{bmatrix}\left(\frac{1}{c}\frac{\overline{W}_{\gamma\varepsilon}}{E_0} + \frac{1}{E_0}\frac{dE_0}{dS}\right) \tag{27}$$

Используя решения уравнений движения в форме (I0), свяжем изменения координат бетатронных колебаний с изменениями их амплитуд C_u и C_v. Аналогично /I,5/ запишем:

$$\frac{d}{dS}|C_u|^2 = 2|C_u|\frac{d|C_u|}{dS} = -\frac{1}{2i}\left[(C_u^* Y_u^{*\prime} - C_u Y_u')\frac{du}{dS} - (C_u^* Y_u^* - C_u Y_u)\frac{dP_u}{dS}\right]$$

$$\frac{d}{dS}|C_v|^2 = 2|C_v|\frac{d|C_v|}{dS} = -\frac{1}{2i}\left[(C_v^* Y_v^{*\prime} - C_v Y_v')\frac{dv}{dS} - (C_v^* Y_v^* - C_v Y_v)\frac{dP_v}{dS}\right] \tag{28}$$

Подставляя в (28) соответствующие величины из (23) и (27) и производя в каждой точке азимута усреднение по всем фазам собственных функций Y_u и Y_v, получим:

$$2|C_u|\frac{d|C_u|}{ds} = -\frac{2}{3} r_e \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^3 K^2\left\{1-\eta_u\left[(K+\Gamma_1)P-\Gamma_2 a\right]+\eta_{pu} b\,\Gamma_2\right\}|C_u|^2 - \frac{1}{E_0}\frac{dE_0}{ds}|C_u|^2$$

$$2|C_v|\frac{d|C_v|}{ds} = -\frac{2}{3} r_e \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^3 K^2\left\{1-\eta_v\left[(K+\Gamma_1)d+\Gamma_2 P\right]+\eta_{pv} b(K+\Gamma_1)\right\}|C_v|^2 - \frac{1}{E_0}\frac{dE_0}{ds}|C_v|^2 \qquad (29)$$

Декременты бетатронных колебаний α_u и α_v найдем, усреднив по одному обороту правые и левые части равенств (29):

$$\frac{1}{|C_u|}\frac{d|C_u|}{ds} = -\alpha_u - \frac{1}{2}\frac{1}{E_0}\frac{dE_0}{ds}, \quad \frac{1}{|C_v|}\frac{d|C_v|}{ds} = -\alpha_v - \frac{1}{2}\frac{1}{E_0}\frac{dE_0}{ds} \qquad (30)$$

Здесь

$$\alpha_u = \frac{1}{3} r_e \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^3 \left\langle K^2\left\{1-\eta_u\left[(K+\Gamma_1)P-\Gamma_2 a\right]+\eta_{pu} b\,\Gamma_2\right\}\right\rangle$$

$$\alpha_v = \frac{1}{3} r_e \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^3 \left\langle K^2\left\{1-\eta_v\left[(K+\Gamma_1)d+\Gamma_2 P\right]+\eta_{pv} b(K+\Gamma_1)\right\}\right\rangle, \qquad (31)$$

а член $\frac{1}{2}\frac{1}{E_0}\frac{dE_0}{ds}$ описывает адиабатическое затухание.

Перейдем к рассмотреиию энергетических колебаний. В отсутствие излучения они описываются уравнением /I,5/:

$$\frac{d^2\Delta E}{ds^2} + \Omega^2 \Delta E = 0 \qquad (32)$$

где Ω – синхротронная частота.
Излучение вносит дополнительное изменение энергии:

$$\frac{d\Delta E}{ds} = -\frac{1}{c}\left(W_{\gamma\varepsilon} - W_{\gamma 0}\frac{ds_0}{ds_\varepsilon}\right) \qquad (33)$$

Здесь s_0 – длина дуги равновесной орбиты. Преобразуем равенство (33), учитывая (I7,I9) и усредняя по одному обороту:

$$\frac{d\Delta E}{ds} = -\frac{2}{3} r_e \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^3 \left\langle K^2\left[2+\eta_x(K+\Gamma_1)+\eta_z\Gamma_2\right]\right\rangle \Delta E \qquad (34)$$

Дифференцируя (34) второй раз и добавляя к уравнению (32), получим уравнение энергетических колебаний с учетом излучения:

$$\frac{d^2\Delta E}{ds^2} + \frac{2}{3} r_e \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^3 \left\langle K^2\left[2+\eta_x(K+\Gamma_1)+\eta_z\Gamma_2\right]\right\rangle \frac{d\Delta E}{ds} + \Omega^2 \Delta E = 0 \qquad (35)$$

Отсюда найдем показатель затухания амплитуды колебаний $\hat{\Delta E}$:

$$\alpha_s = -\frac{1}{\hat{\Delta E}}\frac{d\hat{\Delta E}}{ds} = \frac{1}{3} r_e \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^3 \left\langle K^2\left[2+\eta_x(K+\Gamma_1)+\eta_z\Gamma_2\right]\right\rangle \qquad (36)$$

Из (3I) и (36) для сумм величин $\alpha_u, \alpha_v, \alpha_s$ получим соотношение:

$$\alpha_u + \alpha_v + \alpha_s = \frac{4}{3} r_e \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^3 \left\langle K^2\right\rangle, \qquad (37)$$

которое находится в полном соответствии с теоремой о сумме декрементов /I/.

4. Уравнения (30,36) описывают изменения амплитуд бетатронных и энергетических колебаний под действием излучения в среднем по большому числу излучаемых фотонов. Поправки, которые, согласно /I,5/, требуется внести в уравнения для учета квантовых эффектов излучения, заключаются в добавлении к ним членов, описывающих диффузионных рост амплитуд вследствие их возбуждения каждым отдельным актом излучения.

Запишем общее для всех видов колебаний уравнение изменения среднего квадрата амплитуды:

$$\frac{d\overline{C^2}}{ds} = 2|\bar{C}|\frac{d|\bar{C}|}{ds} + \nu\overline{\delta C^2} \qquad (38)$$

Здесь ν – средняя частота актов излучения на единице длины траектории.

Приращения амплитуд бетатронных колебаний при излучении кванта энергии ε , согласно (II), составляет:

$$\delta C_u^2 = \frac{1}{4}\left[\gamma_1(\delta u)^2 + 2\alpha_1\delta u\,\delta P_u + \beta_1(\delta P_u)^2\right]$$

$$\delta C_v^2 = \frac{1}{4}\left[\gamma_2(\delta v)^2 + 2\alpha_2\delta v\,\delta P_v + \beta_2(\delta P_v)^2\right] \qquad (39)$$

где: $\delta u = -\eta_u \frac{\varepsilon}{E_0}$, $\delta p_u = -\eta_{pu} \frac{\varepsilon}{E_0}$

$\delta v = -\eta_v \frac{\varepsilon}{E_0}$, $\delta p_v = -\eta_{pv} \frac{\varepsilon}{E_0}$

Средние локальные значения δc_u^2 и δc_v^2 , взятые по большому числу оборотов, равны:

$$\overline{\delta c_u^2} = \frac{1}{4}\left[\gamma_1 \eta_u^2 + 2\alpha_1 \eta_u \eta_{pu} + \beta_1 \eta_{pu}^2\right] \frac{\overline{\varepsilon^2}}{E_0^2}$$

$$\overline{\delta c_v^2} = \frac{1}{4}\left[\gamma_2 \eta_v^2 + 2\alpha_2 \eta_v \eta_{pv} + \beta_2 \eta_{pv}^2\right] \frac{\overline{\varepsilon^2}}{E_0^2} \tag{40}$$

Из (30,38,40), производя дополнительно усреднение за один оборот, получим уравнения изменения среднеквадратичных амплитуд бетатронных колебаний:

$$\frac{1}{\overline{c_u^2}} \frac{d\overline{c_u^2}}{ds} = -2\alpha_u - \frac{1}{E_0}\frac{dE_0}{ds} + \frac{1}{4\overline{c_u^2}}\left\langle \left(\gamma_1 \eta_u^2 + 2\alpha_1 \eta_u \eta_{pu} + \beta_1 \eta_{pu}^2\right) \frac{\overline{\nu\varepsilon^2}}{E_0^2} \right\rangle$$

$$\frac{1}{\overline{c_v^2}} \frac{d\overline{c_v^2}}{ds} = -2\alpha_v - \frac{1}{E_0}\frac{dE_0}{ds} + \frac{1}{4\overline{c_v^2}}\left\langle \left(\gamma_2 \eta_v^2 + 2\alpha_2 \eta_v \eta_{pv} + \beta_2 \eta_{pv}^2\right) \frac{\overline{\nu\varepsilon^2}}{E_0^2} \right\rangle \tag{41}$$

Отсюда найдем их стационарные значения:

$$\overline{c_u^2} = \frac{1}{8\alpha_u}\left\langle \left(\gamma_1 \eta_u^2 + 2\alpha_1 \eta_u \eta_{pu} + \beta_1 \eta_{pu}^2\right) \frac{\overline{\nu\varepsilon^2}}{E_0^2} \right\rangle$$

$$\overline{c_v^2} = \frac{1}{8\alpha_v}\left\langle \left(\gamma_2 \eta_v^2 + 2\alpha_2 \eta_v \eta_{pv} + \beta_2 \eta_{pv}^2\right) \frac{\overline{\nu\varepsilon^2}}{E_0^2} \right\rangle \tag{42}$$

Стационарная величина амплитуды энергетических колебаний, как обычно, равна:

$$\overline{\hat{\Delta E}^2} = \frac{\langle \nu\varepsilon^2 \rangle}{2\alpha_s} \tag{43}$$

Поскольку /I,5/

$$\overline{\nu\varepsilon^2} = \frac{55}{24\sqrt{3}} r_e \Lambda K^3 \frac{E_0^7}{(mc^2)^5} \tag{44}$$

то:

$$\frac{\overline{\hat{\Delta E}^2}}{E_0^2} = \frac{55\sqrt{3}}{48} \Lambda \frac{\langle K^3 \rangle}{\langle K^2[1 + \eta_x(K + \Gamma_1) + \eta_z \Gamma_2] \rangle} \left(\frac{E_0}{mc^2}\right)^2 \tag{45}$$

а подставляя (44) в (42) и учитывая, что $\mathcal{E}_u = 4\overline{|c_u|^2}$, $\mathcal{E}_v = 4\overline{|c_v|^2}$, получим:

$$\mathcal{E}_u = \frac{55\sqrt{3}}{48} \Lambda \frac{\langle K^3 (\gamma_1 \eta_u^2 + 2\alpha_1 \eta_u \eta_{pu} + \beta_1 \eta_{pu}^2) \rangle}{\langle K^2 \{ 1 - \eta_u [(K + \Gamma_1) p - \Gamma_2 a] + \eta_{pu} b \Gamma_2 \} \rangle}$$

$$\mathcal{E}_v = \frac{55\sqrt{3}}{48} \Lambda \frac{\langle K^3 (\gamma_2 \eta_v^2 + 2\alpha_2 \eta_v \eta_{pv} + \beta_2 \eta_{pv}^2) \rangle}{\langle K^2 \{ 1 - \eta_v [(K + \Gamma_1) d + \Gamma_2 p] + \eta_{pv} b (K + \Gamma_1) \} \rangle} \tag{46}$$

Λ -комптоновская длина волны электрона.

В результате, теперь имеются все необходимые величины для вычисления среднеквадратичных бетатронных и синхротронных размеров. Бетатронные размеры $\langle x^2 \rangle$, $\langle z^2 \rangle$ находятся с помощью формул (I5,46). Синхротронные размеры – с помощью (15):

$$\langle x_\varepsilon^2 \rangle = \eta_x^2 \frac{\overline{\hat{\Delta E}^2}}{E_0^2} \; ; \quad \langle z_\varepsilon^2 \rangle = \eta_z^2 \frac{\overline{\hat{\Delta E}^2}}{E_0^2} \tag{47}$$

Полные размеры пучков по X и Z направлениям $\langle \hat{x}^2 \rangle$, $\langle \hat{z}^2 \rangle$ вычисляются простой суммой бетатронной и синхротронной составляющих:

$$\langle x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle x_\varepsilon^2 \rangle$$

$$\langle z^2 \rangle = \langle z^2 \rangle + \langle z_\varepsilon^2 \rangle \tag{48}$$

Другой важной характеристикой пучка, специфичной для связанных колебаний, является угол поворота полуосей эллипса его поперечного сечения относительно осей координат. Величину угла φ нетрудно найти, воспользовавшись (I5,45,48):

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(2 \frac{\eta_x \eta_z \frac{\overline{\hat{\Delta E}^2}}{E_0^2} + \langle xz \rangle}{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{z}^2 \rangle} \tag{49}$$

Совокупность величин $\langle \hat{x}^2 \rangle$, $\langle \hat{z}^2 \rangle$, φ дает полное представление о размерах пучка и его форме на заданном азимуте накопителя. Вычисление этих и других параметров пучка методом, рассмотренным выше, позволит проводить оптимизацию магнитной структуры накопителя с достаточно большими SKEW – квадрупольными и продольными полями с целью локализации связи колебаний на отдельных его участках.

В заключении автор выражает свою благодарность И.Я.Протопопову, А.Н.Скринскому, Г.М.Тумайкину за постоянный интерес к данной работе, В.Н.Литвиненко за ряд полезных обсуждений.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. "Теория циклических ускорителей", ФМ, М., 1962г.

2. G. Guignard, "Beam blow-up and luminosity reduction due to linear coupling", CERN ISR-BOM/77-43.

3. A.W.Chao, M.J.Lee, J.Appl. Phys. 47, N 10, 4453 (1976).

4. L.C.Teng, D.A.Edwards, IEEE, Trans. Nucl. Sci.ns-20,N°3,p.885

5. Г.Брук. "Циклические ускорители заряженных частиц", М., "Атомиздат", 1970г.

6. E.D.Courant, H.S.Snyder, Ann. Phys. 3, 1(1958).

7. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко. "Получение продольно-поляризованных электронов и позитронов с помощью нового механизма поляризации", Труды У Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц", т.I, стр.263, М., "Наука", 1977г.

Работа поступила - 26 мая 1978 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати I.УI-1978 г. МН 07458
Усл. 0,9 печ.л., 0,7 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 5I.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР