

20

**И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР**

**ПРЕПРИНТ И Я Ф 78 - 46**

**Ф.М.Израйлев, Дж.Казати, Дж.Форд, Б.В.Чириков**

**СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КВАН -  
ТОВОГО МАЯТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ  
ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ**

**Новосибирск**

**1978**

Ф.М. Израйлев, Дж. Казати,<sup>1)</sup> Дж. Форд,<sup>2)</sup> Б.В. Чириков

СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КВАНТОВОГО МАЯТНИКА  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

А Н Н О Т А Ц И Я

Проводится численное исследование движения квантового маятника, находящегося под действием внешней нелинейной силы, периодически зависящей от времени. Поведение такой квантовой системы сравнивается с поведением соответствующей классической системы. Показывается, что при условиях, когда в классической системе возникает стохастичность движения, поведение квантовой системы в общем похоже на классическое поведение. В частности, на относительно малых временах наблюдается диффузионный рост энергии. Вместе с тем обнаружено расхождение в поведении квантовой системы по сравнению с классической даже в глубоко квазиклассической области. Наиболее интересным оказывается отсутствие локальной неустойчивости движения, являющейся причиной возникновения классической стохастичности.

---

1) Институт физики Миланского университета (Италия)

2) Школа физики Технологического института  
(г. Атланта шт. Джорджия, США)

## § I. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы был достигнут большой успех в изучении поведения динамических систем классической механики (см., например, /1-3/). В частности, было открыто так называемое стохастическое движение в очень простых механических системах. При этом, оказывается, что система движется так, как если бы она находилась под действием некоторой случайной силы, хотя на самом деле такое движение полностью описывается чисто динамическими уравнениями. Стохастическое движение интересно не только с точки зрения проблемы динамической устойчивости, но и для понимания возникновения статистических законов в механике. Однако истинной механикой реальных физических систем является квантовая механика, поэтому важно исследовать, в какой мере стохастический тип движения распространяется и на квантовые динамические системы. До недавнего времени в квантовой механике исследовались в основном устойчивые или полностью интегрируемые системы, такие как атом водорода, простые молекулы, гармонический осциллятор и тому подобное. Что же касается хорошо развитой квантовой статистической механики, то она существенно использует дополнительные статистические предположения типа приближения хаотических фаз.

Совсем недавно появились работы, в которых делаются попытки развить некоторую теорию стохастического движения в квантовых системах. Имеются различные подходы в этом направлении. Так, например, в работе /4/ была предпринята попытка применить метод локальной неустойчивости движения, широко используемый в классической теории стохастичности. Поскольку уравнение Шредингера линейно, изменение волновой функции  $\delta\Psi$  подчиняется тому же самому уравнению, что и для  $\Psi$ . В /4/ изучается зависимость эволюции волновой функции от малых изменений возмущения. Авторы получили некоторые условия, при которых такая зависимость становится очень сильной (экспоненциальной) и они рассматривают их как критерий стохастичности в квантовых системах. Близкий подход используется в работах /5/, где изучается сдвиг невозмущенных уровней энергии под действием малых возмущений. Авторы получили, что при некоторых условиях малое возмущение приводит к очень большому сдвигу, что и означает, по

мнению, стохастичность движения. К последнему направлению при-  
мкнут также работы /13/, в которых изучалась систематика уро-  
вней энергии квантовой системы в квазиклассической области в  
зависимости от неустойчивости движения в классическом пределе.  
Следует отметить, однако, что результат этих работ противоре-  
чит данным /14/ по распределению уровней "случайных" квантовых  
систем.

В работе /6/ была сделана попытка распространить критерий  
перекрывания резонансов, используемый в классической механике, на  
квантовые системы в квазиклассическом приближении. В работах  
/7, 8/ использовался иной критерий стохастичности, а именно  
движение считалось стохастическим, если возмущение связывает  
большое число невозмущенных состояний. Отметим, что в одной из  
этих работ содержится краткий обзор существующих квантовых те-  
орий эргодичности и указывается на неудовлетворительность этих  
теорий для решения проблемы стохастичности в квантовых систе-  
мах. Следует упомянуть также работы /9/, в которых рассматрива-  
ются другие аспекты квантовой динамики.

Основной особенностью стохастического движения классичес-  
кой системы является так называемое перемешивание, которое со-  
ответствует непрерывному спектру как для функции распределения,  
подчиняющейся уравнению Лиувилля, так и для отдельной траекто-  
рии. С другой стороны хорошо известно, что энергетический спектр  
ограниченной в пространстве и консервативной квантовой системы  
всегда дискретен. Отсюда вытекает, что изменение волновой функ-  
ции является квазипериодическим, а это, казалось бы, означает  
отсутствие перемешивания, которое в классической теории явля-  
ется основой стохастичности движения. В настоящее время совер-  
шенно не ясны конкретный механизм и условия перехода от кван-  
тового дискретного спектра к классическому непрерывному спек-  
тру стохастического движения. Неизвестны также и условия приме-  
нимости классической эргодической теории к квантовым системам  
даже в квазиклассической области.

Несмотря на указанные общие трудности, существуют некото-  
рые особые квантовые системы, в которых перемешивание все же,  
возможно, имеет место. Важным примером являются распадающиеся  
системы, скажем сильно возбужденная многоатомная молекула,  
спектр которой может содержать как дискретную так и непрерыв-  
ную компоненты. Другой пример связан с системами, имеющими

бесконечное число уровней и находящихся под действием внешне-  
го периодического возмущения. Так как в последнем случае эне-  
ргия не сохраняется, вполне возможно, что система будет как-  
то аperiodически "блуждать" по всему этому бесконечному набору  
уровней. Можно рассуждать и иначе: так как внешнее возму-  
щение периодически во времени, точным квантовым числом системы  
является так называемая квазиэнергия /10/. Но квазиэнергия  
определяется с точностью до целого числа квантов внешнего воз-  
мущения, т.е. все физически различные значения квазиэнергии  
лежат в конечном интервале  $2\pi\hbar/T$ , где  $T$  - период возму-  
щения. Поскольку система имеет бесконечное число уровней ква-  
зиэнергии, спектр может стать по крайней мере всюду плотным  
или даже непрерывным.

В настоящей работе исследуется система именно последнего  
типа. В качестве критерия стохастичности используется диффу-  
зия по энергии, которая возможна в такой системе вследствие  
бесконечного энергетического спектра. Простая модель такой  
системы описана в § 2; её поведение в классическом пределе  
рассмотрено в § 3; численные результаты движения в квантовом  
случае представлены в § 4 и обсуждаются в §§ 5, 6.

Основной результат проведенных исследований состоит в  
том, что движение рассматриваемой квантовой системы похоже при  
определенных условиях на стохастическое движение классической  
системы. В частности, наблюдается диффузия по энергии, т.е.  
линейный рост средней энергии со временем. Вместе с тем во  
всех случаях, в том числе и в квазиклассической области дви-  
жения (при больших квантовых числах) всегда наблюдается су-  
щественное отличие квантового движения от движения в класси-  
ческом пределе. Так, скорость диффузии всегда оказывается  
значительно меньше классической за исключением короткого на-  
чального периода движения. Нам не удалось также обнаружить  
какой бы то ни было локальной неустойчивости движения, кото-  
рая является причиной стохастичности движения классических  
систем.

## § 2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим гальмитониан:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \quad (2.1)$$

где невозмущенный гамильтониан

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m\ell^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.2)$$

описывает свободное вращение маятника с массой  $m$  и длиной  $\ell$ . Угол  $\theta$  задает отклонение маятника от положения устойчивого равновесия. Возмущение  $\hat{V}$  выберем в виде

$$\hat{V} = -\hbar \Omega k \delta_{2\pi}(\lambda) \cos \theta \quad (2.3)$$

где  $\delta_{2\pi}(\lambda)$  — дельта-функция с периодом  $2\pi$ , определяемая следующим Фурье-разложением:

$$\delta_{2\pi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\lambda \right) \quad (2.4)$$

Здесь  $\lambda = \Omega t + \lambda_0$  — фаза,  $T = 2\pi/\Omega$  — период и  $k > 0$  безразмерный параметр возмущения.

Принятое возмущение представляет собой периодические очень короткие толчки. Если период толчков достаточно мал, возмущение можно усреднить по времени, и мы получаем обычный маятник с гамильтонианом:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - m\ell^2 \omega_0^2 \cos \theta \quad (2.5)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\hbar \Omega k}{2\pi m \ell^2}} \quad (2.6)$$

частота малых колебаний маятника в классическом пределе. Следовательно, модель (2.1) можно рассматривать как обычный маятник (2.5) под влиянием некоторого периодического возмущения.

Решение задачи выразим через собственные функции невозмущенного оператора  $\hat{H}_0$ :

$$\Psi(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(t) e^{in\theta} \quad (2.7)$$

Так как возмущение периодическое, уравнения движения можно представить в виде отображения через период возмущения  $T$ . Чтобы получить это отображение, проинтегрируем уравнение Шредингера (2.1) в два приема.

а) Свободное вращение описывается преобразованием:

$$a_n \rightarrow \bar{a}_n = a_n e^{-\frac{i}{\hbar} \omega_n T} \quad (2.8)$$

где

$$\omega_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2m\ell^2} \quad (2.9)$$

б) Толчок. Так как длительность толчка бесконечно мала, можно пренебречь невозмущенной частью гамильтониана в течение толчка. Тогда уравнение Шредингера примет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\hbar \Omega k \delta_{2\pi}(\lambda) \cos \theta \cdot \Psi \quad (2.10)$$

Интегрируя, получим,

$$\bar{\Psi} = \Psi e^{ik \cos \theta} \quad (2.11)$$

Разложим экспоненту в ряд Фурье:

$$e^{ik \cos \theta} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} b_s(k) e^{is\theta} \quad (2.12)$$

и перепишем уравнение (2.11) в виде:

$$\bar{a}_n = \sum_{\substack{r,s=-\infty \\ s+r=n}}^{\infty} a_r(t) b_s(k) \quad (2.13)$$

Комбинируя уравнения (2.9) и (2.13), получим полное отображение:

$$\bar{a}_n = \sum_{\substack{r,s=-\infty \\ s+r=n}}^{\infty} a_r e^{i\frac{\omega_r}{\omega_n} \tau} b_s \quad (2.14)$$

В последнем выражении введена безразмерная переменная

$$\zeta = \frac{\hbar T}{m e^2} \quad (2.15)$$

Строго говоря, сумма в (2.14) бесконечна, однако, коэффициенты  $b_s(k)$ , которые выражаются через функции Бесселя:

$$b_s(k) = i^s J_s(k); \quad b_s = b_s \quad (2.16)$$

быстро убывают при  $s > k$ , так что в (2.12) можно оставить конечное число членов. Отображение (2.14) можно теперь численно интегрировать за большое число точек.

### § 3. КЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

Прежде чем представлять результаты движения квантовой модели, описанной в предыдущем параграфе, рассмотрим поведение модели в классическом пределе. Гамильтониан классической системы имеет вид:

$$H = \frac{I^2}{2m e^2} - m e^2 \omega_0^2 2\pi \delta_{2\pi}(\lambda) \cos \theta \quad (3.1)$$

Вследствие периодичности возмущения уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -m e^2 \omega_0^2 2\pi \delta_{2\pi}(\lambda) \sin \theta \\ \dot{\theta} &= I / m e^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

можно представить как отображение:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= I - \frac{m e^2 \omega_0^2}{\Omega} 2\pi \sin \theta \\ \bar{\theta} &= \theta + (\bar{I} / m e^2) T \end{aligned} \quad (3.3)$$

Вводя новый импульс

$$p = \frac{I}{m e^2} T \quad (3.4)$$

приводим отображение (3.3) к виду

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p - \mathcal{K} \sin \theta \\ \bar{\theta} &= \theta + \bar{p} \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\mathcal{K} = \frac{2\pi \omega_0^2 T}{\Omega} = k \zeta \quad (3.6)$$

Последнее выражение дает связь классического параметра  $\mathcal{K}$  с параметрами квантового маятника. Свойства классического отображения (3.5) были подробно изучены в работах /3, II/. В частности, было установлено, что при  $\mathcal{K} < 1$  движение устойчиво в том смысле, что изменение импульса ограничено ( $|\Delta p| \leq \sqrt{\mathcal{K}}$ ). С другой стороны, для  $\mathcal{K} \gg 1$  движение достаточно точно описывается простым диффузионным законом

$$\langle p^2 \rangle \approx \frac{\mathcal{K}^2}{2} t \quad (3.7)$$

где  $p$  есть значение импульса в момент времени  $t$  в предположении, что начальное значение  $p_0 \approx 0$ . Время  $t$  измерено в числе итераций отображения, а усреднение производится по большому числу траекторий с различными начальными условиями. Из диффузионного закона (3.7) вытекает, что распределение по импульсу имеет гауссовский вид:

$$f(p) = \frac{1}{\sqrt{t} \mathcal{K}} e^{-p^2 / t \mathcal{K}^2} \quad (3.8)$$

Другим важным свойством стохастического движения в классических системах является так называемая локальная неустойчивость движения, которая означает экспоненциальное "разбегание" близких траекторий

$$\langle d \rangle = d_0 e^{ht} \quad (3.9)$$

где  $d = \sqrt{(\delta p)^2 + (\delta \theta)^2}$ , а величина  $h$  характеризует скорость расходимости и называется КС - энтропией /12/. Для отображения (3.5)

$$h \approx \ln\left(\frac{\mathcal{K}}{2}\right) \quad (3.10)$$

при  $\mathcal{K} > 4/3$ .

#### § 4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С КВАНТОВОЙ МОДЕЛЬЮ

Движение квантового маятника, описанного в § 2, численно определялось по формулам (2.14). При этом вычислялись следующие величины:

а) функция распределения

$$f(n) = |a_n|^2 \quad (4.1)$$

б) средняя энергия

$$\langle E \rangle = \sum_n \frac{n^2}{2} f(n) \quad (4.2)$$

в) средний импульс

$$\langle I \rangle = \sum_n n f(n) \quad (4.3)$$

Характерные примеры функции распределения даны на рис. I-3, где использованы следующие нормированные координаты:

$$X = \frac{n^2}{tk^2}; \quad f_N(n) = f(n) \sqrt{tk} \cdot k \quad (4.4)$$

Из уравнений (2.15) и (3.4) следует, что  $p = n\tilde{\tau}$ , и гауссовское распределение (3.8) сводится к

$$f_N(n) = \sqrt{tk} k f(n) = e^{-X} \quad (4.5)$$

Это распределение изображено на рис. I-3 прямой "а".

Чтобы представить результаты численных экспериментов в компактной форме, экспериментальное распределение  $f_N(n)$  интерполировалось по следующей формуле (ср. (4.5)):

$$f_N(n) = A e^{-Bx} \quad (4.6)$$

где  $A$  и  $B$  — параметры, определяемые по методу наименьших квадратов. Параметр  $B$  описывает отличие наклона распределения (в полулогарифмическом масштабе) от гауссовского (4.5), а параметр  $A$  связан с долей диффундирующей компоненты  $\omega_d$ . Эту долю можно определить, интегрируя функцию  $f(n)$  по  $n$ :

$$\omega_d = \frac{A}{\sqrt{tk} k} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Bn^2}{tk^2}} dn = \frac{A}{\sqrt{B}} \quad (4.7)$$

Результаты подгонки экспериментального распределения по формуле (4.6) представлены на рис. I-3 прямыми "б" (в конце счета).

Другое характерное свойство рассматриваемого движения — временная зависимость средней энергии (4.2). Для стохастического движения эта зависимость является линейной. Действительно, используя (2.15) и (3.4), можно переписать диффузионный закон (3.7) в виде:

$$\langle E \rangle_r = \frac{k^2}{4} t; \quad D_r \equiv \frac{d\langle E \rangle_r}{dt} = \frac{k^2}{4} \quad (4.8)$$

Экспериментальные зависимости  $\langle E \rangle(t)$  представлены на рис. IА-3А.

Характерной особенностью этой зависимости является значительное (даже для  $k = 40$ ;  $\mathcal{K} = 5$ ) замедление скорости диффузии  $D = \frac{d\langle E \rangle}{dt}$  с течением времени. Очень упрощенно можно считать, что скорость диффузии принимает два значения — начальное  $D_1$  и конечное  $D_2$ , а замедление диффузии происходит в некоторый момент  $t^*$ .

Сводка экспериментальных данных представлена в таблице I, где

$$\xi_1 = \bar{D}_1 / D_r; \quad \xi_2 = \bar{D}_2 / D_r$$

начальная и конечная скорости диффузии, соответственно, усредненные по времени и нормированные на скорость диффузии в классическом пределе  $D_r$  (4.8); величины  $B_1, \omega_d^{(1)}$  относятся к моменту  $t^*$ , а  $B_2, \omega_d^{(2)}$  — к концу счета  $t$ . Более подробные данные об отдельных случаях движения квантового маятника представлены на рис. I-3, IА-3А и в таблицах 2-7, где величина

$\langle E \rangle / (k^2/4)$  в классическом пределе равна  $t$  (4.8), а строка, относящаяся к моменту  $t^*$  отмечена звездочкой.

При счете использовались различные начальные состояния системы (начальные условия): возбужден только нулевой уровень энергии ( $n = 0$ , равномерное распределение по  $\theta$ ); возбуждено несколько ( $\sim 10$ ) нижних уровней энергии с равными или случайными амплитудами; гауссовское распределение. Существенной зависимости движения от начальных условий не наблюдалось. Полное число уровней энергии изменялось от  $100I$  (симметрично относительно нулевого уровня:  $-500 \leq n \leq 500$ ) до  $400I$ . В последнем случае волновая функция выбиралась симметричной ( $Q_{-n} = Q_n$ ) и счет велся, фактически, с  $200I$  уровнем ( $0 \leq n \leq 2000$ ). Точность счета, включая и ошибки, связанные с конечным числом уровней, контролировались по сохранению вероятности. Максимальная ошибка  $\delta$  для полной вероятности не превышала  $3 \cdot 10^{-3}$ , ее значения в отдельных случаях указаны в таблице I. В таблицах приведено также полное число гармоник  $N$  в сумме (2.12), фактически использованных в счете.

## § 5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Приступая к численным экспериментам, описанным выше, мы ожидали, что в квазиклассической области ( $k \gg I$ ) квантовое движение должно быть по крайней мере похоже на классическое. В частности, при  $\mathcal{K} \gg I$  мы ожидали увидеть стохастическое движение с параметрами, описанными в § 3. Данные таблицы I и рис. 1А-3А показывают, что, действительно, при  $\mathcal{K} = 5$  и  $k \geq 5$  в системе происходит диффузия по энергии со скоростью, близкой к ожидаемой, однако только в течение относительно короткого времени  $t^*$ . При  $t > t^*$  скорость диффузии существенно падает. Критическое время  $t^*$  растет приблизительно пропорционально  $k$ . Конечная скорость диффузии ( $\xi_2$ ) также растет с  $k$  по данным таблицы I, приближаясь к классической. Энергетические спектры движения (рис. 1-3) показывают, что уменьшение скорости диффузии происходит, главным образом, за счет сокращения доли диффундирующей компоненты  $\omega_d$ , тогда как наклон спектра ( $\beta$ ) увеличивается относительно мало. Это означает, повидимому, что более или менее длительная диффузия возможна только для очень

специальных начальных состояний системы. При этом остается совершенно неясным, как же будет вести себя квантовая система на достаточно большом времени. Будет ли ее средняя энергия возрастать неограниченно и если да, то с какой скоростью?

Ответ на эти вопросы, а тем более детальная теория квантовой стохастичности требует дальнейших исследований.

Два крайних случая в таблице I, относятся, очевидно, к устойчивому движению в том смысле, что средняя энергия системы в пределах довольно больших флуктуаций не изменяется за время счета. Случай  $k = 40$ ,  $\mathcal{K} = 1$  соответствует классической границе устойчивости (§ 3). В данном случае поведение квантовой системы в квазиклассической области совпадает в отношении устойчивости с поведением в классическом пределе (см. таблицу 7). Случай  $k = 1$ ;  $\mathcal{K} = 5$  является существенно квантовым. Из данных таблиц I, 2 следует, что движение является устойчивым, несмотря на большое  $\mathcal{K}$ . Этот пример показывает, что в квантовых системах имеется дополнительная граница устойчивости помимо классической ( $\mathcal{K} = 1$ ). Такая квантовая граница устойчивости была предсказана Шуряком /6/. В рассматриваемом случае механизм этой квантовой устойчивости вполне понятен из выражений (2.12) и (2.16). Действительно, для  $k \ll I$  все  $b_s(k)$  пренебрежимо малы за исключением  $b_0 \approx 1$ . Это значит, что переходы между невозмущенными уровнями практически отсутствуют. Для определения точного положения квантовой границы устойчивости требуются дальнейшие исследования, однако, можно предположить, что она грубо соответствует условию  $k \sim 1$ .

Существует еще один своеобразный тип движения рассматриваемой системы, который мы назвали квантовым резонансом. Он имеет место при  $\tau = 4\pi m$ , где  $m$  — любое целое число. В точном резонансе средняя энергия растет пропорционально  $t^2$ . Механизм квантового резонанса очень прост и связан с видом спектра невозмущенной системы:  $\omega_n = n^2/2$ , при  $\tau = 4\pi m$  все фазы отображения свободного вращения  $\omega_n \tau = 2\pi m n^2$  кратны  $2\pi$  и это отображение становится тождественным. Тогда полное отображение (2.14) сводится к толчку (2.11) и, следовательно, после  $t$  толчков волновую функцию системы можно представить в виде

$$\Psi(\theta, t) = \Psi(\theta, 0) e^{itk \cos \theta} \quad (5.1)$$



Это эквивалентно действию одного толчка с параметром  $tk$ , который вызывает переходы между  $2tk$  уровнями. Отсюда следует, что при достаточно большом  $t$  число возбужденных уровней будет расти пропорционально  $kt$ , а средняя энергия — пропорционально  $(kt)^2$ . Для  $\tau = 4\pi m$  резонанс происходит при любом  $k$ , в том числе и при  $k \ll I$ , т.е. в этом режиме квантовая граница устойчивости ( $k \sim I$ ) отсутствует.

Мы провели также другую серию численных экспериментов, пытаясь обнаружить локальную неустойчивость движения, которая является характерным свойством стохастического движения в классической механике. При этом использовалось свойство симметрии гамильтониана системы (2.1) по отношению к изменению знака импульса. Отсюда следует, что если начальное состояние также обладает этой симметрией, то симметрия сохраняется в процессе движения. В частности, средний импульс  $\langle I \rangle = 0$  все время. Для слабо ассиметричного начального состояния, когда  $\langle I \rangle \neq 0$ , но мало, мы ожидали экспоненциальный рост  $\langle I \rangle$  в стохастической области по аналогии с классической механикой. Оказалось, однако, что это совсем не так! Хотя возмущение (2.3) явно не сохраняет импульс, его среднее значение остается приблизительно постоянным во всех исследованных случаях, включая и случаи, в которых наблюдалась диффузия по энергии. В настоящее время совершенно неясно, с чем связано такое качественно отличное поведение квантовой системы по сравнению с классической.

## § 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью настоящей работы было исследование движения простой квантовой системы, которая, судя по свойствам соответствующей классической системы, должна была бы обладать стохастическим поведением, по крайней мере в квазиклассической области.

Описанные выше численные эксперименты показывают, что, действительно, при определенных условиях движение квантовой системы похоже на стохастическое движение в классической механике. В частности, мы наблюдали диффузию по энергии. Вместе с тем, во всех исследованных случаях, даже глубоко в квазиклассической области, скорость диффузии совпадает с классической только в тече-

ние относительно короткого времени, а затем резко падает.

Таким образом, проведенные численные эксперименты показывают, что поведение квантовой системы в квазиклассической области существенно отличается от поведения соответствующей классической системы, по крайней мере на большом времени движения. Это различие еще более усугубляется полным отсутствием локальной неустойчивости движения, во всяком случае нам не удалось ее обнаружить.

Полученные результаты показывают, что переход от квантовой механики к классической (если он вообще существует!) происходит каким-то значительно более сложным образом, чем это обычно предполагается.

Пользуемся случаем выразить нашу искреннюю признательность Я.Г.Синаю, Э.В.Шуряку, Г.М.Проспери, Г.М.Заславскому, Ф.Вивальди, С.А.Хейфецу за полезные обсуждения и Д.Л.Шепелянскому за помощь в проведении численных экспериментов.

Л и т е р а т у р а

1. V.I. Arnold, A. Avez. Ergodic Problems of Classical Mechanics (Benjamin, New York, 1968); J. Moser, Stable and random motions in dynamical systems (Princeton University Press, 1973)  
З. Нитецки, Введение в дифференциальную динамику, "Мир", М., 1975.
2. Г.М. Заславский "Статистическая необратимость в нелинейных системах. "Наука", М., 1970; J. Ford, in Fundamental Problems in statistical Mechanics, III, edited by E.G.D. Cohen (North-Holland, Amsterdam, 1975)
3. B.V. Chirikov. "A universal instability of many-dimensional oscillator systems" To appear in Physics Reports.
4. Н.М. Пухов, Д.С. Чернавский. Теор. и мат. физика. 7, № 2, (1971) 219.
5. I.C. Percival, J. Phys. B, 6 (1973) L229; J. Phys. A, 7 (1974), 794; N. Pomphrey, J. Phys. B, 7 (1974), 1909; I.C. Percival, N. Pomphrey Molec. Phys. 31 (1976), 97.
6. Э.В. Шуряк. ЖЭТФ, 71, (1976) 2039.
7. K.S.J. Nordholm, S.A. Rice, J. Chem. Phys. 61 (1974), 203.
8. K.S.J. Nordholm, S.A. Rice, J. Chem. Phys. 61 (1974), 768
9. K. Hepp, E.H. Lieb, The laser: a reversible quantum dynamical system with irreversible classical macroscopic motion in Lecture Notes in Physics, v 38, (1975) 178, A. Connes, E. Stormer Acta Mathematica, 134 (1975), 289
10. Я.Б. Зельдович, ЖЭТФ, 51, (1966) 1492; В.И. Ритус, там же, стр. 1544.
11. M.A. Liberman, A.J. Lichtenberg, Phys. Rev. 45 (1972), 1852; L.J. Laslett, Proc. IX Int. Conf. on High Energy Acc. Stanford, 1974.
12. А.Н. Колмогоров, ДАН СССР, 119 (1958) 861; 124 (1959) 754; Я.Г. Синай, Изв. АН СССР, матем. 30 (1966) 15.
13. Г.М. Заславский, Н.Н. Филоненко, ЖЭТФ, 65:8 (1973) 643  
Г.М. Заславский, ЖЭТФ 73:6 (1977) 2089.

14. Ф. Дайсон. Статистическая теория энергетических уровней сложных систем. ИИЛ, 1963, E.P. Wigner, Ann. Math. 53 (1951) 36; 62 (1955) 548; 65 (1957) 203; 67 (1958) 325.

Таблица 1

$\mathcal{K}$	$k$	$\tau$	$t$	$\varepsilon_1$	$t^*$	$\varepsilon_2$	$B_1$	$B_2$	$\omega_d^{(1)}$	$\omega_d^{(2)}$	$\delta$	$N$
5	1	5	750	-	0	$1.9 \cdot 10^{-6}$	-	66.2	-	0.020	$-6 \cdot 10^{-6}$	23
5	5	1	150	1.30	10	0.035	1.27	2.93	0.56	0.12	$2 \cdot 10^{-5}$	27
5	10	0.5	1000	0.78	20	0.012	1.23	3.93	0.79	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	33
5	20	0.25	500	0.65	40	0.12	1.23	1.55	0.46	0.038	$-9 \cdot 10^{-4}$	61
5	40	0.125	250	0.98	40	0.53	0.86	0.99	0.52	0.33	$10^{-3}$	101
1	40	0.025	150	-	0	$-1.8 \cdot 10^{-4}$	-	116	-	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$-10^{-3}$	101

Таблица 2.

$$\mathcal{K} = 5; \quad k = 1; \quad \tau = 5$$

$t$	$\frac{\langle E \rangle}{(k^2/4)}$	$\varepsilon$	$B$	$\omega_d$
150	1.62	$3.2 \cdot 10^{-4}$	13.1	0.023
300	1.38	$-7.5 \cdot 10^{-6}$	29.5	0.029
450	1.18	$-4.6 \cdot 10^{-5}$	40.0	0.015
600	0.86	$-2.5 \cdot 10^{-5}$	55.4	0.015
750	1.18	$1.9 \cdot 10^{-6}$	66.2	0.020

Таблица 3.

$$\mathcal{K} = 5; \quad k = 5; \quad \tau = 1$$

$t$	$\frac{\langle E \rangle}{(k^2/4)}$	$\varepsilon$	$B$	$\omega_d$
30	2.5	0.32	1.27	0.56
60	3.0	0.23	1.36	0.22
90	3.5	0.17	1.96	0.24
120	3.2	0.11	2.43	0.16
150	2.0	0.035	2.93	0.12

Таблица 4.

$$\mathcal{K} = 5; \quad k = 10; \quad \tau = 0,5$$

$t$	$\frac{\langle E \rangle}{(k^2/4)}$	$\varepsilon$	$B$	$\omega_d$
* 20	17	0.78	1.23	0.79
200	27	0.024	1.43	0.015
400	27	0.013	2.17	$6.3 \cdot 10^{-3}$
600	33	0.017	2.71	$2.0 \cdot 10^{-3}$
800	31	0.015	3.33	$1.9 \cdot 10^{-3}$
1000	26	0.012	3.93	$1.3 \cdot 10^{-3}$

Таблица 5.

$$\mathcal{K} = 5; \quad k = 20; \quad \tau = 0.25$$

$t$	$\frac{\langle E \rangle}{(k^2/4)}$	$\varepsilon$	$B$	$\omega_d$
* 40	28	0.65	1.23	0.46
100	38	0.35	1.19	0.27
200	52	0.21	1.23	0.094
300	64	0.15	1.28	0.039
400	75	0.14	1.40	0.036
500	78	0.12	1.55	0.038

Таблица 6.

$$\mathcal{K} = 5; \quad k = 40; \quad \tau = 0.125$$

$t$	$\frac{\langle E \rangle}{(k^2/4)}$	$\varepsilon$	$B$	$\omega_d$
* 40	40.8	0.98	0.86	0.52
50	46.6	0.90	0.81	0.42
100	76.2	0.68	0.80	0.31
150	105	0.64	0.68	0.33
200	124	0.59	0.93	0.35
250	140	0.53	0.99	0.33

Таблица 7.

$$\mathcal{K} = 1; \quad k = 40; \quad \tau = 0.025$$

$t$	$\frac{\langle E \rangle}{(k^2/4)}$	$\varepsilon$	$B$	$\omega_d$
30	2.67	$5.6 \cdot 10^{-3}$	29.1	0.28
60	3.00	$2.9 \cdot 10^{-3}$	53.2	0.27
90	2.04	$1.8 \cdot 10^{-3}$	76.4	0.24
120	2.31	$-5.4 \cdot 10^{-4}$	94.2	0.14
150	1.44	$-1.8 \cdot 10^{-4}$	116	0.15

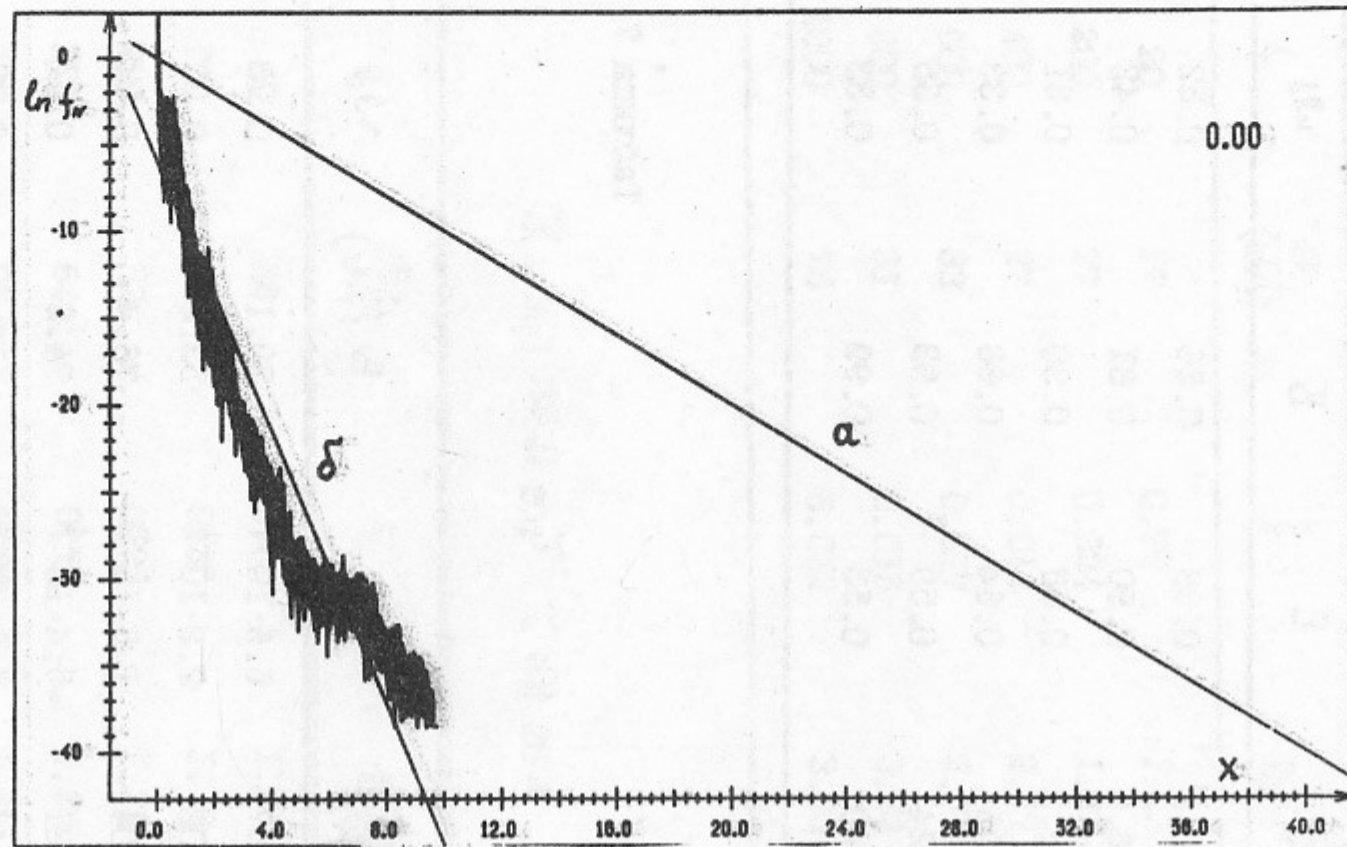


Рис. I. Функция распределения энергии системы по невозмущенным уровням в нормированных координатах  $f_N(n)$  и  $X$  (см. (4.4)). Прямая "а" соответствует теоретической формуле (4.5);  $k = 10$ ,  $t = 1000$ . Ломаная линия — экспериментальный результат, прямая "delta" — подгонка по формуле (4.6).

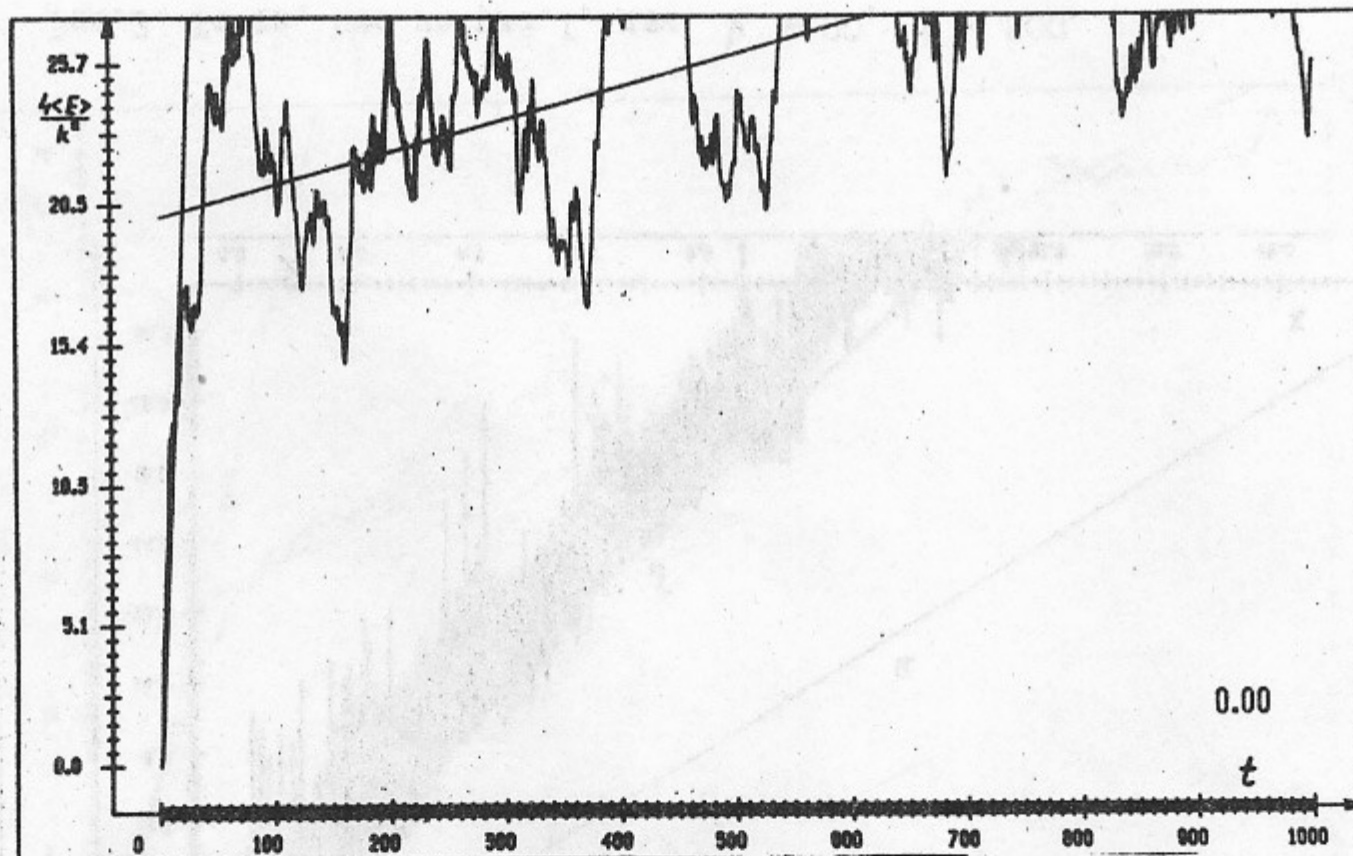


Рис. IА. Зависимость средней энергии  $\langle E \rangle$  от времени для значений рис. I. Ломаная кривая — экспериментальное значение, две прямые — интерполяция на линейную зависимость в моменты времени  $t^*$  (см. §4) и  $t = 1000$  (конец счета).

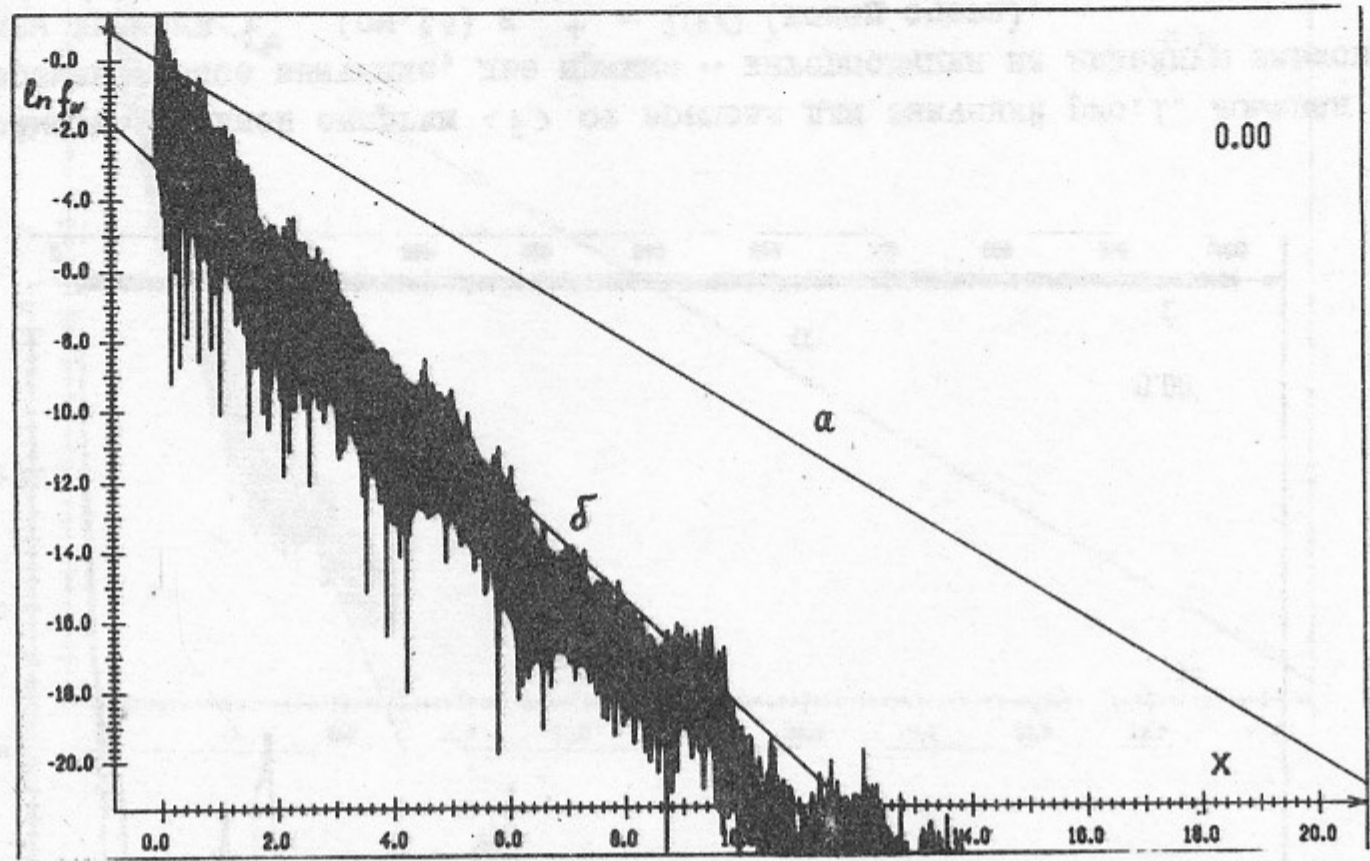


Рис.2. То же, что на рис.1, для  $k = 20$ ,  $t = 500$ .

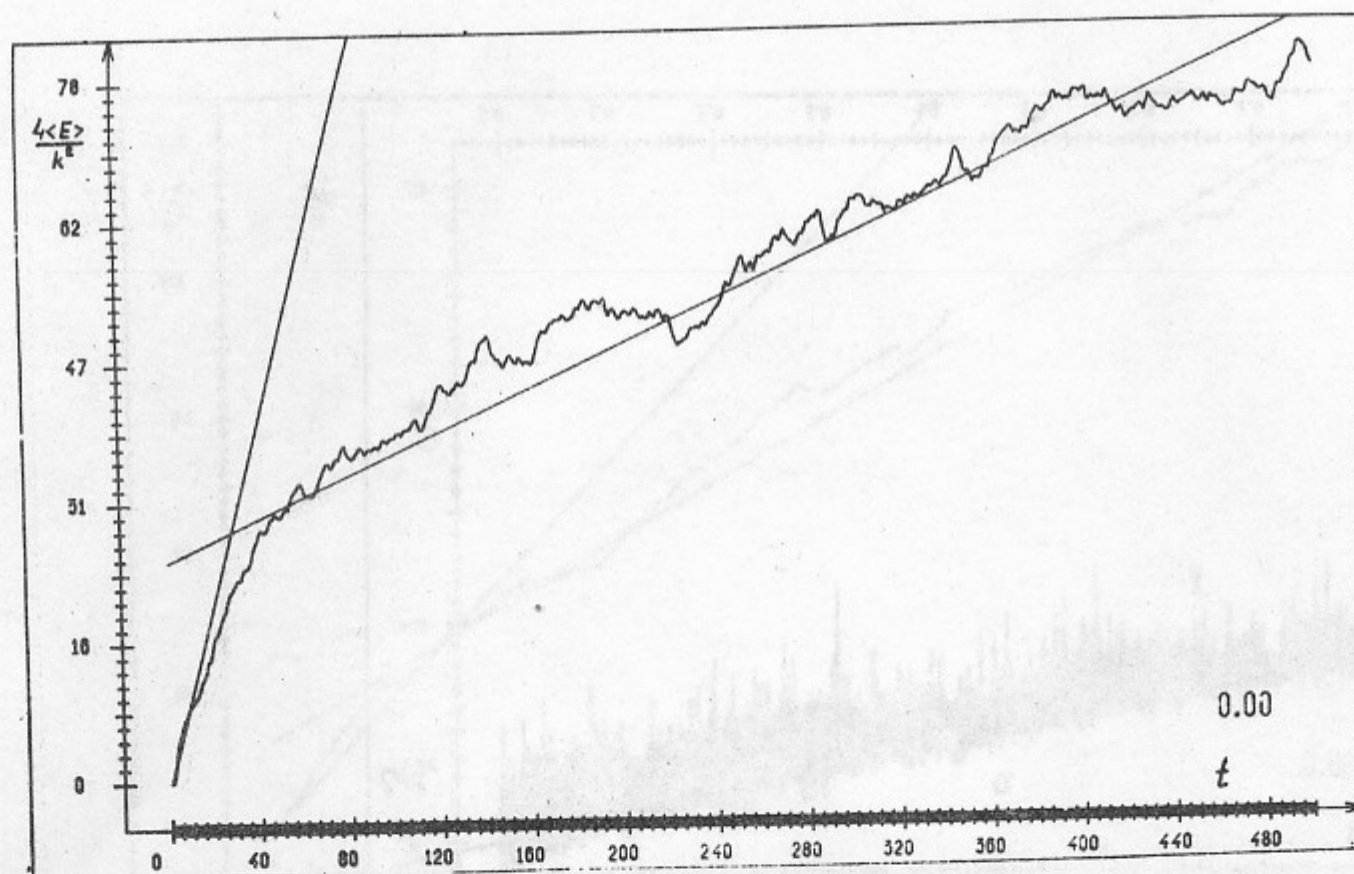


Рис.2А. Зависимость  $\langle E \rangle$  от времени для значений рис.2.

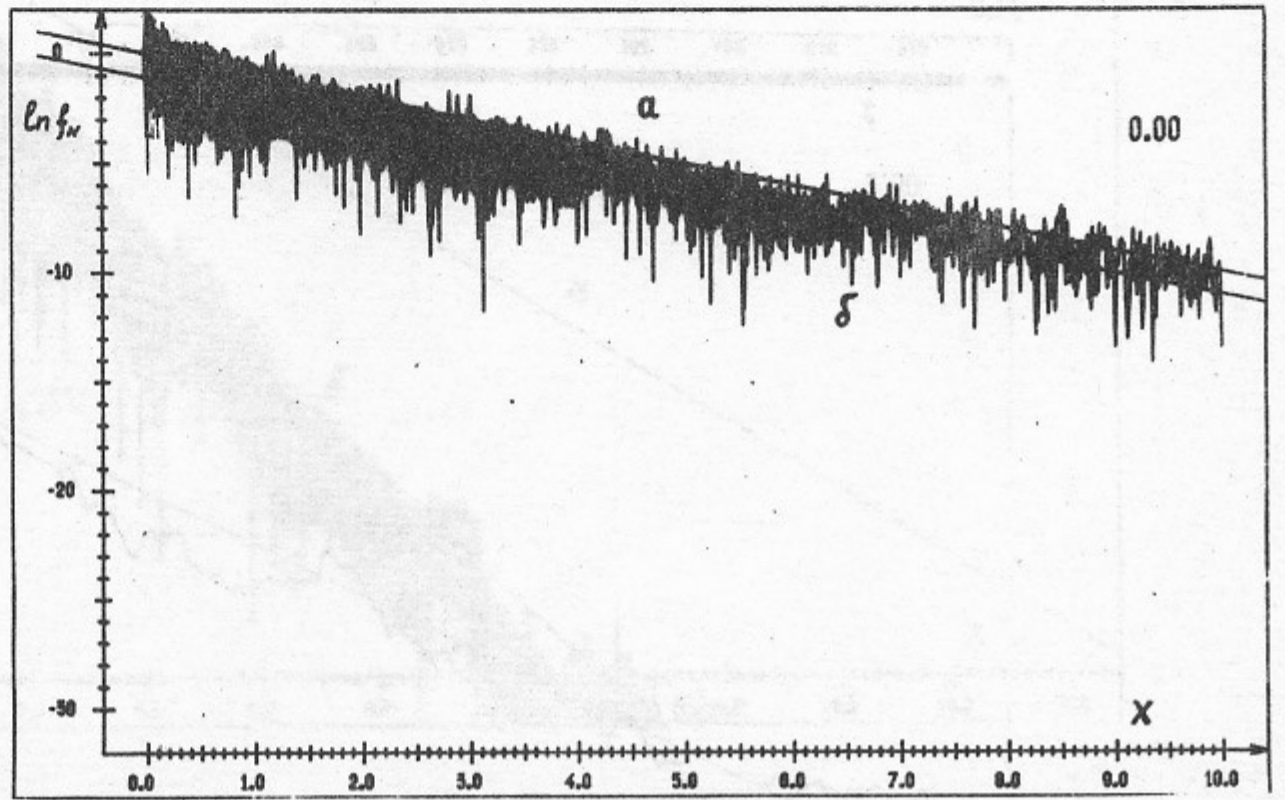


Рис.3. То же, что на рис.1, для  $k = 40$ ,  $t = 250$

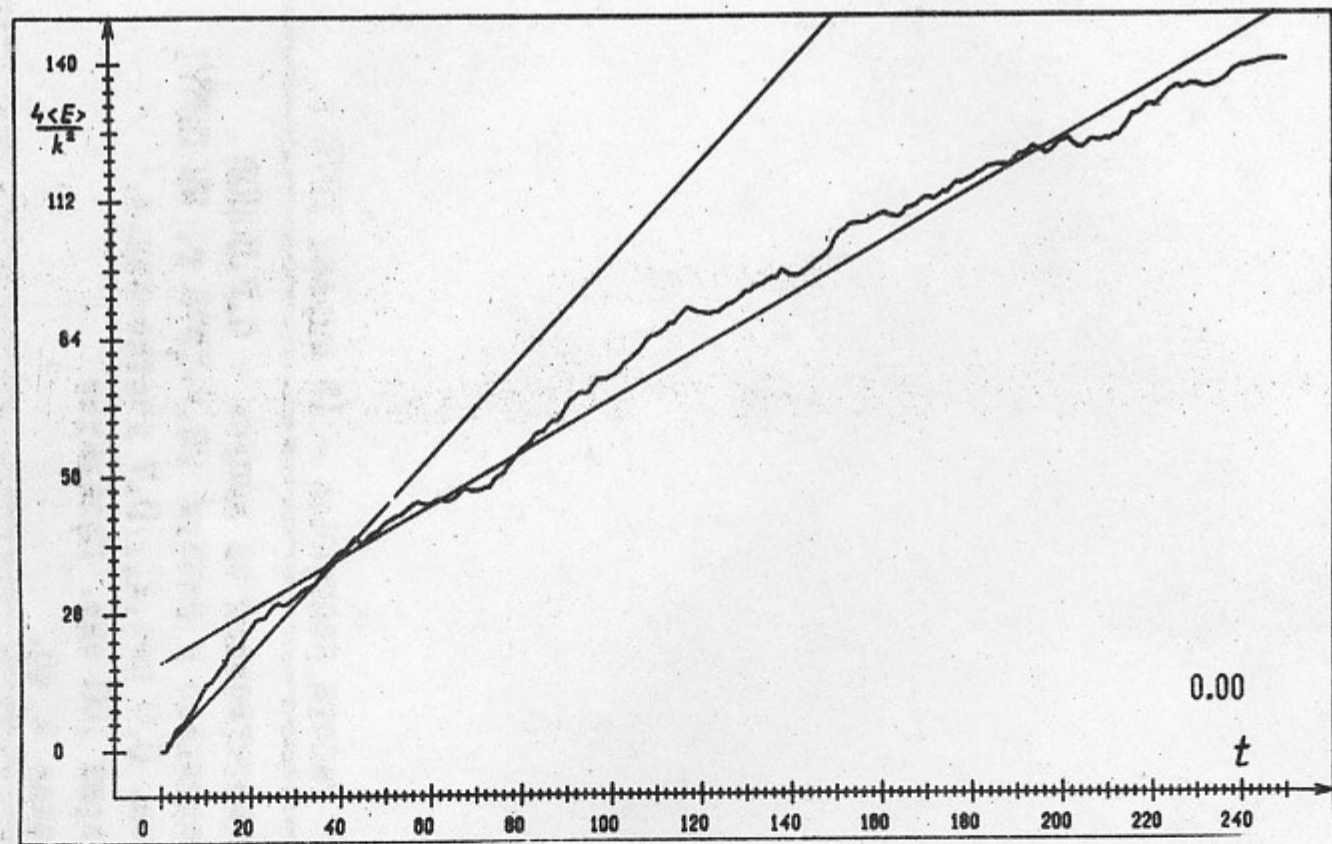


Рис.3А. Зависимость  $\langle E \rangle$  от времени для значений рис.3.

Работа поступила - 19 апреля 1978 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ  
Подписано к печати 22.У-1978 г. МН 02871  
Усл. 0,9 печ.л., 0,7 учетно-изд.л.  
Тираж 160 экз. Бесплатно  
Заказ № 46.

---

Отпечатано на ротаприте ИЯФ СО АН СССР