

Д 45

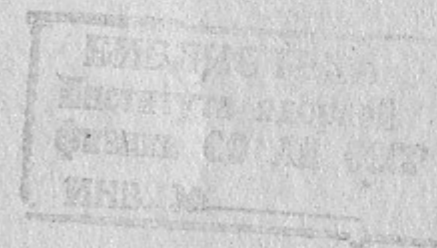
14

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 78 -31

Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

ПРОДОЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПУЧКА ТЯ-
ЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ, ДВИЖУЩЕГОСЯ В НАКО-
ПИТЕЛЕ С ЭЛЕКТРОННЫМ ОХЛАЖДЕНИЕМ



Новосибирск

1978

ПРОДОЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПУЧКА ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ,
ДВИЖУЩЕГОСЯ В НАКОПИТЕЛЕ С ЭЛЕКТРОННЫМ ОХЛАЖДЕНИЕМ

Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе изучается коллективная устойчивость продольного движения азимутально-однородного пучка протонов, движущегося в накопителе с электронным охлаждением и взаимодействующего с некоторой внешней системой. Показано, что благодаря наличию у частиц сильного трения, стабилизация коллективных неустойчивостей обязана не затуханию Ландау (вклад которого в данном случае может быть сильно подавлен), а диффузному расплыванию азимутальных неоднородностей плотности, характерному для систем броуновских частиц с сильным трением. В работе обсуждаются критерии устойчивости, вычисляются декременты и величины пороговых токов неустойчивостей. Анализируется влияние эффектов внутреннего рассеяния протонов и "сплюснутости" распределения охлаждающих электронов по скоростям на коллективную устойчивость пучка. Полученные результаты применяются к интерпретации проводившихся на НАП-М экспериментов по измерению времени затухания азимутальной неоднородности плотности протонов.

LONGITUDINAL STABILITY OF THE COASTING BEAM
IN THE STORAGE RING WITH ELECTRON COOLING.

N.S. Dikansky, D.V. Pestrikov

ABSTRACT

In this paper the longitudinal collective stability of the coasting beam in the storage ring with electron cooling is investigated. It is shown that strong longitudinal friction decrease the contribution of Landau damping and stabilisation of collective instabilities take place due to diffusion of azimuthal harmonics of density which is specific for systems of Brown particles with strong friction. In the paper stability criterion, decrements, threshold currents are calculated. The influence of the interbeam scattering and flattened distribution over electron velocities on the collective stability is discussed. The results obtained in the paper are applied to interpretation of the time dependence of density fluctuations which were obtained in electron cooling experiments.

В ряде приложений метода электронного охлаждения предполагается работа с интенсивным азимутально-однородным пучком тяжелых частиц (в дальнейшем, для краткости, протонов). Известно, что в экспериментах по электронному охлаждению был получен пучок с весьма малым разбросом продольных $\Delta P/P$ и поперечных $\Delta P_{\perp}/P$ импульсов ($\frac{\Delta P}{P} \sim \frac{\Delta P_{\perp}}{P} \sim 10^{-5}$)/I/. В таких машинах величина циркулирующего тока может ограничиваться появлением когерентных неустойчивостей, обусловленных коллективному взаимодействию пучка с окружающими элементами вакуумной камеры накопителя. Традиционные методы исследования коллективной устойчивости пучка, основанные на решении уравнения Власова, здесь не вполне подходят, так как время затухания протонов за счет взаимодействия с охлаждающим электронным пучком может быть сравнимо (или существенно меньше) времени развития неустойчивости. Поэтому для расчета спектра коллективных колебаний и величины порогового тока пучка движущегося в накопителе с электронным охлаждением необходимо исследовать более полное кинетическое уравнение, учитывающее релаксацию гармоник распределения за счет столкновений протонов с охлаждающими электронами.

Целью настоящей работы является изучение условий появления коллективной продольной неустойчивости азимутально-однородного пучка протонов, взаимодействующего с некоторой внешней системой. Этот класс неустойчивостей проявляется наиболее рано из-за квадратичной зависимости величин пороговых токов от разброса импульсов протонов ^{1/2}. Условия появления поперечных неустойчивостей будут изучены отдельно.

I. Пусть $f(\theta, P, t)$ - функция распределения протонов по азимуту θ и отклонениям импульса от равновесного значения P . В стационарном состоянии протоны равномерно распределены по азимуту, чему соответствует функция распределения $f_{st}(P)$, удовлетворяющая уравнению:

$$F_{||}(P) f_{st} - \frac{d_{||}}{2} \frac{\partial^2 f_{st}}{\partial P^2} = 0,$$

в котором $F_{||}(P)$ - продольная компонента силы трения, за счет взаимодействия с охлаждающим электронным пучком, а $d_{||} = \langle \Delta P_{||}^2 \rangle$ суммарная мощность диффузии за счет рассеяния протона на электронах, атомах остаточного газа, за счет эффек-

тов внутреннего рассеяния и так далее. Для упрощения дальнейших расчетов, положим $F_{||}(p) = -\lambda p$. Тогда $f_{st}(p)$ является гауссовой функцией

$$f_{st}(p) = \frac{\exp\left(-\frac{p^2}{P_0^2}\right)}{2\pi^{3/2} R_0 P_0}, \quad P_0^2 = \frac{d_{||}}{\lambda} \quad (1)$$

При возбуждении в пучке коллективного движения функция f получает нестационарную добавку

$$f(\theta, p, t) = f_{st}(p) + \tilde{f}(\theta, p, t),$$

зависящую от азимута и удовлетворяющую кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega_0(p) \frac{\partial f}{\partial \theta} + e E_{||}(\theta, t) \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\lambda p f + \frac{d_{||}}{2} \frac{\partial f}{\partial p} \right), \quad (2)$$

где $\omega_0(p)$ — частота обращения протона в машине, $E_{||}(\theta, t)$ — продольная компонента электрического поля, наведенного пучком во внешней системе.

Для исследования устойчивости распределения $f(\theta, p, t)$ по отношению к малым когерентным колебаниям достаточно, как известно, ограничиться решением уравнения (2) в линейном приближении по взаимодействию с наведенными полями. При этом, если разложить $\tilde{f}(\theta, p, t)$ в ряд Фурье по θ

$$\tilde{f}(\theta, p, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(p) \exp(ik\theta - i\omega t),$$

то (2) распадается на систему независимых уравнений для отдельных гармоник $f_k(p)$:

$$-i(\omega - k\omega_0(p)) f_k + e E_{||}(k, \omega) \frac{\partial f_{st}}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\lambda p f_k + \frac{d_{||}}{2} \frac{\partial f_k}{\partial p} \right). \quad (3)$$

Входящую в (3) величину $E_{||}(k, \omega)$ выразим через импеданс внешней системы

$$E_{||}(k, \omega) = -iek\omega_s Z_k \int_{-\infty}^{\infty} dp f_k(p).$$

Тогда (3) переходит в уравнение:

$$-i(\Delta\omega - k\omega'p) f_k - iNe^2 k\omega_s Z_k \frac{\partial f_{st}}{\partial p} \int_{-\infty}^{\infty} dp f_k = \frac{\partial}{\partial p} \left(\lambda p f_k + \frac{d_{||}}{2} \frac{\partial f_k}{\partial p} \right), \quad (4)$$

где $\Delta\omega = \omega - k\omega_s$, а $\omega_0(p)$ записано в виде $\omega_0(p) = \omega_s + \omega'p$, индексом s отмечаются величины, относящиеся к равновесному движению.

Ниже мы ограничимся рассмотрением взаимодействия пучка с низкодобротными элементами камеры. Поэтому в уравнении (4) частота ω в аргументе Z_k заменена невозмущенным значением $k\omega_s$. Последнее уравнение подставкой

$$x = \frac{p}{P_0}; \quad a = \frac{2i\Delta\omega}{\lambda}; \quad b = -2i \frac{k\delta\omega}{\lambda};$$

$$A = 4i \frac{eIZ_k k}{\sqrt{\pi} R_0 P_0}; \quad f_k(x) = \exp\left(-x^2 + \frac{bx}{2}\right) W(z), \quad z = x - \frac{b}{2}$$

(где $\delta\omega = \omega'p$ — разброс частот обращения в протонном пучке, I — величина циркулирующего тока $I = Ne\omega_s/2\pi$), может быть преобразовано к более удобному для решения виду:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} + a + \frac{b^2}{4} \right] W = A \left(z + \frac{b}{2} \right) e^{-\frac{b}{2} \left(z + \frac{b}{2} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} dz' W e^{-z'(z + \frac{b}{2})} \quad (5)$$

2. Обсудим сначала характер релаксации азимутальной неоднородности плотности протонного пучка малой интенсивности ($I \rightarrow 0$). В этом случае спектр колебаний и собственные функции определяются уравнением (5) без правой части:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} + a + \frac{b^2}{4} \right] W(z) = 0. \quad (5a)$$

Из требования убывания собственных решений при $x \rightarrow \infty$ следует, что $a + b^2/4 = 2m$, а $W(z)$ является полиномом Эрмита порядка m , $W(z) = H_m(z)$, где $m = 0, 1, 2, \dots$

Релаксация произвольного начального распределения, $f_k(x, t=0)$ может быть описана разложением гармоник функции распределения $f_k(x, t)$ в ряд по собственным решениям (5a):

$$f_k(x, t) = e^{-x^2 + \frac{bx}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} c_m H_m(z) e^{-i(k\omega_s - i \frac{k^2 \delta\omega^2}{2\lambda} - im\lambda)t} \quad (6)$$

где коэффициенты C_m вычисляются через начальные гармоники $f_k(x, t)$:

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^m m!} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{\frac{\epsilon z}{2}} H_m(z) f_k(x, t=0). \quad (6a)$$

Комбинируя (6a) и (6) получим фундаментальное решение (5a):

$$f_k(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{\sqrt{\pi}} g_k(x|x', t) f_k(x', t=0), \quad g_k(x|x', 0) = \delta(x-x'), \quad (7)$$

где

$$g_k(x|x', t) = \frac{\exp\left[\frac{\epsilon}{2}(z-z') - \frac{(z-z'e^{-\lambda t})^2}{1-e^{-2\lambda t}} - i k \omega_s t - \frac{\kappa^2 \delta \omega^2}{2\lambda} t\right]}{\sqrt{1-e^{-2\lambda t}}} \quad (8)$$

Интегрируя (6) по импульсам $p = \kappa p_0$, получим временную зависимость κ -й гармоники частоты обращения плотности протонов:

$$n_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp f_k(p, 0) \exp\left[-\frac{i \kappa \omega' p (1-e^{-\lambda t})}{\lambda} - \frac{\kappa^2 \delta \omega^2}{\lambda^2} \psi(\lambda t)\right], \quad (9)$$

где было введено обозначение

$$\psi(\lambda t) = \frac{\lambda t}{2} + \frac{1-e^{-2\lambda t}}{4} - 1 + e^{-\lambda t}$$

Отсюда следует, что на малых временах $\lambda t \ll 1$, зависимость $n_k(t)$ от времени определяется начальным разбросом частот и видом функции распределения $f_k(p, 0)$

$$n_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp f_k(p, 0) \exp[-i \kappa \omega' p t], \quad \lambda t \ll 1,$$

однако для времен больших времени релаксации $\lambda t \gg 1$ гармоники $n_k(t)$ затухают экспоненциально с декрементом $\kappa^2 \delta \omega^2 / 2\lambda$, независимо от формы начального распределения $f_k(p, 0)$. Этот результат отвечает диффузному расплыванию начальной азимутальной неоднородности пучка и вообще характерен для систем, со-

ставленных из броуновских частиц с трением^{/3/}. Сказанное может быть проиллюстрировано на примере релаксации начального распределения

$$f(\theta, p, 0) = \frac{\delta(\theta)}{2\pi^{3/2} p_0} \exp\left(-\frac{p^2}{p_0^2}\right)$$

Суммируя гармоники (9), для плотности $n(\theta - \omega_s t, t)$ получим

$$n(\phi, t) = \theta_3\left(\frac{\phi}{2\pi} \middle| \frac{i}{\pi} \langle \phi^2(t) \rangle\right),$$

где $\phi = \theta - \omega_s t$, $\theta_3(u/\pi)$ - функция Якоби, а дисперсия $\langle \phi^2(t) \rangle$ - определяется формулой:

$$\langle \phi^2(t) \rangle = \frac{\delta \omega^2(0)}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda t})^2 + \frac{4 \delta \omega^2}{\lambda^2} \psi(\lambda t) = \begin{cases} (\delta \omega(0)t)^2, & \lambda t \ll 1 \\ \frac{2 \delta \omega^2 t}{\lambda}, & \lambda t \gg 1. \end{cases}$$

Для накопителей с электронным охлаждением наиболее характерна ситуация, когда $\delta \omega \ll \lambda$. Поэтому в охлажденном пучке время жизни гармоник плотности существенно превышает $\delta \omega^{-1}$.

3. Перейдем теперь к вычислению спектра коллективных колебаний пучка конечной интенсивности ($I \neq 0$). Решение уравнения (5) будем искать разложением $W(z)$ в ряд по полиномам Эрмита:

$$W(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m(z). \quad (10)$$

Коэффициенты разложения C_m , согласно (5), определяются выражением:

$$C_m = J_0 \frac{\Lambda}{\epsilon} \cdot \frac{\frac{\epsilon^2}{4} - 2m}{a + \frac{\epsilon^2}{4} - 2m} \frac{\left(-\frac{\epsilon}{4}\right)^m}{m!} e^{-\frac{3}{16} \epsilon^2}, \quad (11)$$

где

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left(-z^2 - \frac{\epsilon z}{2}\right) W(z).$$

Умножив (10) на $\exp(-z^2 - \frac{\delta z}{\lambda})$ и проинтегрировав по z , приходим к дисперсионному уравнению, определяющему собственные частоты: ω :

$$1 = -i \frac{\Sigma e^q}{q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-q)^m}{m!} \frac{q+m}{\omega + im} \quad (12)$$

Здесь были введены обозначения

$$q = \frac{\kappa^2 \delta \omega^2}{2\lambda^2}; \quad \lambda \omega = \Delta \omega + i \frac{\kappa^2 \delta \omega^2}{2\lambda}$$

$$\Sigma = \frac{e I Z_k}{\lambda^2 R_0} \kappa^2 \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{\Omega_k^2}{\lambda^2}$$

где Ω_k — величина когерентного сдвига частоты в отсутствие трения и разброса частот.

Обсудим сначала ряд общих свойств дисперсионного уравнения (12), вытекающих из особенностей спектра невозмущенного движения и спектральных свойств наведенных полей.

Благодаря дискретности спектра невозмущенного движения ($\Delta \omega \rightarrow -im\lambda - i\kappa^2 \delta \omega^2 / 2\lambda$, $I \rightarrow 0$), правая часть уравнения (12) является аналитической функцией во всей плоскости комплексной переменной ω , а спектр коллективного движения также является дискретным.

Коллективные моды характеризуются двумя числами: номером азимутальной гармоники k и номером решения (12), который при малых токах (см. ниже) приближается к m . Используя систему уравнений для коэффициентов C_m (II) можно показать, что вклад коллективных полей в сумму собственных частот

$$\left(\Delta \omega + i \frac{\kappa^2 \delta \omega^2}{2\lambda} + im\lambda \right)_{\Sigma} = - \frac{\Sigma e^q}{q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-q)^m}{m!} (q+m) = 0$$

равен нулю. При этом сумма декрементов коллективных мод положительна и расходится

$$\delta_{\Sigma} = \sum \left(\frac{\kappa^2 \delta \omega^2}{2\lambda} + m\lambda \right)$$

так же как сумма декрементов мод в отсутствие наведенных полей. Физически, причина этого очевидна — согласно (5) коллективное взаимодействие связывает моды с различными m , приводя к некоторому перераспределению частот невозмущенного движения. Сумма же декрементов, определяемая следом матрицы в (II), при этом не меняется.

Любопытно также отметить, что дисперсионному уравнению (12), строго говоря, отвечает отсутствие у коллективных мод затухания Ландау: при конечном трении стабилизация неустойчивостей, обязанных коллективному взаимодействию, происходит за счет трения и диффузии азимутального положения частиц.

Фактически это, однако, не совсем так, поскольку, как было показано в предыдущем пункте (см. (9)), спектр наведенных полей в течение времени порядка λ^{-1} сохраняет непрерывность, а затухание гармоник плотности обязано разбросу частот в пучке. Поэтому, если разброс $\delta \omega$ велик по сравнению с декрементом ($\delta \omega \gg \lambda$), влияние столкновений на коллективный спектр несущественно и уравнение (12) переходит (с точностью до членов, порядка $\lambda/\delta \omega$) в дисперсионное уравнение, справедливое в отсутствие столкновений:

$$1 = \frac{2e I Z_k}{\sqrt{\pi} R_0 / \kappa \delta \omega \lambda^3} \kappa^2 \frac{d\omega}{d\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\Delta \omega - \varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\kappa^2 \delta \omega^2}\right) \quad (12a)$$

(см. Приложение А). Если разброс частот мал по сравнению с декрементом $\delta \omega \ll \lambda$, что характерно для накопителей с электронным охлаждением, то стабилизация низкочастотных мод ($k/\delta \omega \ll \lambda$) обязана трению и диффузии $\kappa^2 \delta \omega^2 / 2\lambda$, а стабилизация высокочастотных мод ($|k| \gg \lambda/\delta \omega$) обязана затуханию Ландау.

Исследованию уравнения (12a) к настоящему времени посвящено значительное число работ. Поэтому ниже мы ограничимся рассмотрением устойчивости низкочастотных мод ($|k| < \lambda/\delta \omega$), для которых (12) не сводится к (12a).

Характер движения определяется соотношением параметров Ω_k , λ , $\delta \omega$. При малом токе протонов (либо большом разбросе частот $\delta \omega$)

$$\frac{ze\bar{i}}{R_0} \left| Z_k \frac{d\omega}{dp} \right| < \delta\omega^2 \quad (I3)$$

неустойчивых решений нет.

Действительно, отсутствию решений (I2), расположенных в верхней полуплоскости $\Delta\omega$ отвечает нулевое приращение фазы функции

$$D(\Delta\omega) = 1 + i \frac{ze^q}{q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-q)^m}{m!} \frac{q+m}{\omega+im}$$

при изменении $\Delta\omega$ вдоль действительной оси. Так как

$$\frac{e^q}{q} \left| z \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-q)^m}{m!} \frac{q+m}{\omega+im} \right| < \frac{|z|}{q}$$

условию (I3) отвечает отсутствие корней $D(\Delta\omega)$ на действительной оси $\Delta\omega$, откуда и следует отсутствие неустойчивых решений уравнения (I2).

При малом токе протонов ($e^q |z| \ll q$) декременты ($\delta = -\text{Im} \omega$) могут быть рассчитаны по теории возмущений. В первом приближении по $e^q |z| / q$ из (I2) получим:

$$i \Delta\omega_{mn} = \lambda(m+q) \left[1 - \frac{\Omega_k^2}{\lambda^2} \frac{(-q)^m}{m!} e^q \right]$$

Декремент наиболее медленно затухающей моды ($m=0$) линейно зависит от отношения тока протонов к току электронов:

$$\delta = \frac{\kappa^2 \delta\omega^2}{2\lambda} + \frac{eI \text{Re} Z_k}{\lambda M c^2} \frac{\kappa^2 \omega_s^2}{\gamma \beta^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_z^2} \right) \quad (I4)$$

Здесь M — масса протона, $\beta = v/c$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор, γ_z — соответствует критической энергии. Отметим, что в рассматриваемом случае наличие диссипации во внешней системе не влияет на устойчивость коллективного движения.

Условия (I3) носит необходимый характер и, в реальных ситуациях, отвечает весьма малым накопленным токам. Для получения условий устойчивости при больших токах требуется дополнительное исследование (I2).

Чтобы избежать необходимости привлечения численного анализа, рассмотрим наиболее характерный для накопителей с электронным охлаждением случай, когда разброс частот обращения мал по сравнению с декрементом, ($\delta\omega \ll \lambda$). Тогда, удерживая в (I2) старшие по q члены, можем переписать дисперсионное уравнение в виде

$$1 = \frac{z}{w(w+i)} \quad (I2a)$$

Откуда

$$w_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - z}$$

а декременты определяются формулой

$$\delta = \frac{\lambda}{2} + \frac{\kappa^2 \delta\omega^2}{2\lambda} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(I u_1 - \frac{\lambda^2}{4} \right)^2 + I^2 V_1^2} + \frac{\lambda^2}{4} - I u_1 \right\}} \quad (I5)$$

где $u_1 + i V_1$ — квадрат когерентного сдвига частоты на единицу тока протонов:

$$u_1 + i V_1 = \frac{e Z_k}{M c^2} \frac{\kappa^2 \omega_s^2}{\gamma \beta^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_z^2} \right)$$

Коллективное движение устойчиво $\delta > 0$ при выполнении неравенства:

$$I u_1 + \frac{\kappa^2 \delta\omega^2}{2} > \frac{I^2 V_1^2}{\lambda^2} \quad (I6)$$

Примерный вид области устойчивости изображен на Рис. I. Величина порогового тока неустойчивости определяется формулой

$$I_{th} = \frac{\lambda^2 u_1}{2 V_1^2} + \frac{\lambda^2 |u_1|}{2 V_1^2} \sqrt{1 + 2 \left(\frac{\kappa \delta\omega}{\lambda} \frac{V_1}{u_1} \right)^2} \quad (I7)$$

Выражение (I7) особенно упрощается в двух предельных случаях. Если потери во внешней системе малы

$$\left| \frac{V_1}{u_1} \right| \ll \frac{\lambda}{\kappa \delta\omega}$$

$$\bar{I}_{th} = \frac{\lambda^2}{2V_1^2} (U_1 + |U_1|) + \frac{\kappa^2 \delta \omega^2}{2|U_1|} \quad (I8)$$

и величина порогового тока существенным образом зависит от знака U_1 . При $U_1 < 0$, что соответствует

$$\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_i^2}\right) \text{Re } Z_k < 0$$

условию появления неустойчивости "отрицательной массы", если импеданс внешней системы не зависит от частоты, \bar{I}_{th} пропорционально квадрату разброса частот обращения и определяется хорошо известной формулой [2]:

$$\bar{I}_{th} = \frac{1}{2} \left(\frac{Mc^2}{e}\right) \left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2 \gamma^2 \beta^2 \left| \frac{\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_i^2}}{\text{Re } Z_k} \right| \quad (I8a)$$

Выше порога происходит экспоненциальное нарастание гармоник $f_k(p)$ с инкрементом:

$$\gamma^{-1} = \sqrt{\frac{e I \kappa^2}{R_0} |\text{Re } Z_k \frac{d\omega_0}{dp}| + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\kappa^2 \delta \omega^2}{2\lambda}} \quad (I9a)$$

В области $U_1 > 0$ величина порогового тока не зависит от разброса частот обращения и растет пропорционально квадрату отношения декремента некогерентного трения λ к скорости потерь в системе:

$$\bar{I}_{th} = \left(\frac{\lambda}{\kappa \omega_s}\right)^2 \left(\frac{Mc^2}{e}\right) \frac{\text{Re } Z_k}{(\text{Im } Z_k)^2} \frac{\gamma^2 \beta^2}{\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_i^2}} \quad (I8b)$$

Этому случаю соответствует декремент

$$\delta = \begin{cases} \frac{\kappa^2 \delta \omega^2}{2\lambda} + \frac{I U_1}{\lambda} - \frac{I^2 V_1^2}{\lambda^3}, & I U_1 \ll \lambda^2/4 \\ \frac{\lambda}{2} \left(1 \pm \sqrt{I/\bar{I}_{th}}\right), & I U_1 \gg \lambda^2/4, \end{cases} \quad (I9b)$$

где \bar{I}_{th} определяется (I8b).

Отметим еще любопытную особенность спектра коллективных мод пучка, взаимодействующего с бездиссипативной системой ($V_1 = 0$). При малом числе частиц $\Omega_k^2 \ll \lambda^2/4$, величина когерентного сдвига частоты $\text{Re } \Delta \omega$ равна нулю, а декременты определяются:

$$\delta = \frac{\lambda}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\Omega_k^2}{\lambda^2}}\right)$$

С дальнейшим увеличением тока декремент достигает постоянного значения $\lambda/2$ ($\Omega_k^2 > \lambda^2/4$), а величина когерентного сдвига частоты как

$$\text{Re } \Delta \omega = \pm \sqrt{\Omega_k^2 - \frac{\lambda^2}{4}}$$

возрастает с током пучка. При этом, для токов $I > \bar{I}_{th}$ ($\lambda/\delta \omega$)² где \bar{I}_{th} — определяется I8a), хотя неустойчивости нет, частицы короткое время $\sim 2/\lambda$ совершают фазовые колебания с частотой $\sim \Omega_k$.

Рассмотрим теперь случай, когда потери в системе велики:

$$\left| \frac{V_1}{U_1} \right| \gg \frac{\lambda}{\kappa \delta \omega}$$

При этом величина порогового тока неустойчивости линейно зависит от разброса частот в пучке

$$\bar{I}_{th} = \frac{\lambda}{\kappa \omega_s} \frac{\Delta P}{P} \frac{\gamma^2 \beta^2}{\sqrt{2} \text{Im } Z_k} \left(\frac{Mc^2}{e}\right), \quad (I8b)$$

а декременты δ квадратично зависят от тока протонов:

$$\delta \approx \frac{\lambda}{2} + \frac{\kappa^2 \delta \omega^2}{2\lambda} \pm \frac{\lambda}{2} \pm \frac{I^2 V_1^2}{\lambda^3}. \quad (I9b)$$

В целом, зависимость величины порогового тока от U_1 изображена на Рис.2.

Проведенный анализ показывает, что за исключением случая, когда пучок взаимодействует с слабо диссипативной системой, для которой $U_1 > 0$, коллективное взаимодействие пучка с окружающими элементами вакуумной камеры может приводить к неус-

тойчивости с весьма малыми пороговыми токами. Следует, однако, заметить, что инкременты этих неустойчивостей, как можно видеть из (19а, 19б, 19в) сравнимы с $k^2 \delta \omega^2 / 2\lambda$, если ток пучка не слишком превышает пороговое значение.

4. Выше, при вычислении порогового тока неустойчивости предполагалось, что величина разброса по импульсам в протонном пучке не зависит от тока протонов. При охлаждении пучка до малых поперечных размеров это не так, поскольку, с ростом плотности, величины разброса по импульсам увеличивается за счет взаимного рассеяния протонов с передачей энергии поперечных колебаний в продольное движение. Этот эффект рассматривался в работе [4], где для величины установившегося разброса по импульсам в охлажденном пучке было получено выражение:

$$\frac{\Delta P}{P_s} = \left(\frac{\Delta P}{P_s}\right)_0 + \frac{eI}{I_0} \frac{L \chi_p c}{\gamma^2 \beta^2 a_x a_z \sqrt{\theta_p^2 + \left(\frac{\Delta P}{P_s}\right)^2}} \frac{Mc^2}{\langle Fv \rangle} \quad (20)$$

Здесь $(\Delta P/P_s)_0$ — величина разброса при нулевом токе пучка; $\langle Fv \rangle$ — средняя по орбите мощность трения, L — кулоновский логарифм; $I_0 = Mc^3/e = 3.4 \cdot 10^7$ А; θ_p — установившийся разброс поперечных скоростей протонов (равновесию протонов и электронов отвечает $\theta_p \approx \sqrt{m/M} \theta_{eff}$, где m — масса электрона, $\theta_{eff} v_s$ — эффективный разброс поперечных скоростей в электронном пучке).

Так как входящая в (20) "фазовая плотность" $I/a_x \sqrt{(\Delta P/P_s)^2 + \theta_p^2}$ сама, вообще говоря, зависит от $\Delta P/P_s$, вычисление разброса по импульсам из (20) технически сложно. Поэтому, для упрощения анализа мы будем считать плотность пучка достаточно высокой, чтобы можно было пренебречь первым слагаемым в (20). Тогда (20) можно переписать в виде

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{eI}{I_0} \frac{L \chi_p c \sqrt{M/m}}{\gamma^2 \beta^2 R^2 \psi^2 \theta_{eff} [\theta_p^2 + (\Delta P/P_s)^2]} \frac{Mc^2}{\langle Fv \rangle} \quad (20a)$$

где $R\psi$ — дисперсионная функция накопителя. Из (20a) видно, что при малых токах величина $\Delta P/P_s$ линейно растет с током пучка I . Однако, начиная с

$$I > j_c \frac{R^2 \psi^2}{2\pi\beta} \frac{m}{M} \theta_{eff}^2 \quad (21)$$

где j_c — плотность тока электронов, эта зависимость переходит в:

$$\frac{\Delta P}{P} = \left[\frac{eI}{I_0} \frac{L \chi_p c}{\gamma^2 \beta^2 R^2 \psi^2 \theta_p} \frac{Mc^2}{\langle Fv \rangle} \right]^{1/3} \quad (20б)$$

В реальных ситуациях условие (21) может выполняться при довольно малых токах (например, для параметров НАП-М [5]: $\beta = 0,35$, $R_0 = 750$ см, $\gamma_e = 1,1$, $\psi = 0,8$, $\langle Fv \rangle = 1,5$ МэВ/сек, $\theta_{eff} \sim 10^{-3}$ и $j_e = 0,3$ А/см², $I > 25$ мкА), поэтому ниже мы ограничимся рассмотрением именно этого случая.

Помимо сказанного, для получения по возможности более реалистических оценок величин пороговых токов и инкрементов неустойчивостей следует учесть также, что в охлаждающем электронном потоке разброс продольных скоростей электронов $\Delta_{||e}$ существенно меньше разброса поперечных скоростей $\Delta_{\perp e}$ ($\Delta_{||e} \ll \Delta_{\perp e}$). При этом, хотя продольная компонента силы трения не является линейной функцией отклонения импульса от равновесного значения, полученные выше результаты остаются качественно верными, если заменить λ на величину

$$\lambda = \frac{\langle Fv \rangle}{2 \Delta P v_s} \quad (22)$$

отвечающую времени релаксации λ^{-1} распределения протонов по продольным скоростям с учетом сплюснутости распределения электронов.

Таким образом, увеличение разброса по импульсам за счет взаимного рассеяния протонов приводит к увеличению разброса частот обращения ($\delta \omega \sim I^{1/3}$) и уменьшению декремента затухания ($\lambda \sim I^{-1/3}$). Поэтому для предельно больших токов, когда разброс $\delta \omega$ сравнивается с λ , роль влияния столкновений на коллективную устойчивость падает и стабилизация неустойчивостей будет обязана затуханию Ландау. Комбинируя (20б) и (22) можно получить, что, например, для параметров НАП-М $\delta \omega$ превышает λ начиная с токов $I \sim 3-4$ мА.

Величины порогового тока неустойчивости определяются неравенством (16). Однако простые выражения для I_{th} удается по-

лучить лишь для случаев, когда потери во внешней системе либо предельно велики, либо малы.

Если потери велики

$$\left| \frac{V_1}{U_1} \right| \gg \frac{\lambda}{k_1 \delta \omega}$$

величина порогового тока неустойчивости, как видно из (18в) определяется средней мощностью трения $\lambda \Delta p \sim \langle Fv \rangle$ и не меняется с увеличением плотности накопленного пучка

$$I_{th} = \frac{\gamma \langle Fv \rangle}{2^{3/2} k_1 \omega_s e |I_m Z_k|} \quad (18в)$$

В противоположной ситуации

$$\left| \frac{V_1}{U_1} \right| \ll \frac{\lambda}{k_1 \delta \omega}$$

величина порогового тока зависит от знака U_1 .

В области $U_1 < 0$ внутреннее рассеяние протонов за счет увеличения разброса по импульсам может приводить к увеличению порогового тока:

$$I_{th} = \left(\frac{Mc^2}{e} \left| \frac{1}{j^2} - \frac{1}{j_0^2} \right| \right)^3 \frac{M}{m} \left[\frac{\gamma^2 \beta^2 L z_p c}{2 I_0 R_0^2 \psi^2 \theta_{eff}} \frac{Mc^2}{\langle Fv \rangle} \right]^2 \quad (23)$$

если величина импеданса $Re Z_k$ не слишком велика.

Для $U_1 > 0$, из-за уменьшения декремента λ , внутреннее рассеяние уменьшает величину порогового тока. Несколько громоздкое выражение для I_{th} можно легко получить подстановкой (22) в (18б). В целом, изменение зависимости $I_{th}(U_1)$, обусловленное эффектами внутреннего рассеяния, показано на Рис.2 (пунктирная кривая).

5. Одним из применений полученных результатов может быть вычисление величины установившегося энергетического разброса протонов по данным измерений времени затухания азимутальных гармоник плотности. Такие измерения были проведены в недавней серии экспериментов на НАП-М /5/. Однако при пересчете декре-

мента затухания в энергетический разброс, время затухания гармоники полагалось обратно пропорциональным разбросу частот обращения, что справедливо лишь в случае слабого трения $\delta \omega \gg \lambda$.

Для параметров НАП-М справедливо обратное условие ($\lambda = \approx 300$ Гц $\gg \delta \omega \approx 12$ Гц при $\Delta p/p_0 \approx 5 \cdot 10^{-5}$). При этом время затухания первой гармоники τ определяется формулой (14), которая с учетом (22) может быть переписана в виде:

$$\tau^{-1} = \gamma \omega_s^2 \eta^2 \frac{Mc^2}{\langle Fv \rangle} \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right)^3 + \frac{2e I Z \omega_s \tau \Delta p}{\langle Fv \rangle p_0} \quad (24)$$

где было введено обозначение $Z = \frac{1}{j^2} - \frac{1}{j_0^2}$.

Измерения времени затухания τ проводились в диапазоне токов $I = 4-40$ мкА. В этом диапазоне увеличение разброса по импульсам за счет эффектов внутреннего рассеяния довольно хорошо описывается линейным приближением формулы (20), которая для круглого пучка $a_x = a_z = 2,5 \cdot 10^{-2}$ см и значения $\theta_{eff} = 10^{-3}$, согласующегося с измеренной величиной $\langle Fv \rangle = 1,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{сек}} / 5$, для параметров НАП-М дает:

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right)_0 + 5 \cdot 10^{-7} I \text{ (мкА)} \quad (25)$$

Оставшиеся параметры $(\Delta p/p_0)_0$ и импеданс связи Z подбирались такими, чтобы (24) описывало экспериментальные данные наилучшим образом. В результате подгонки были получены значения: $(\Delta p/p_0)_0 \approx 3 \cdot 10^{-5}$ и $Z \approx 770$ Ом.

Такое значение Z совпадает с импедансом круглой камеры

$$Z = \frac{30}{r} \left(1 + 2 \ln \frac{b}{a} \right)$$

радиусом $b = 3,5$ см по отношению к пучку радиуса $a = 2,5 \cdot 10^{-2}$ см. Зависимость $\tau^{-1}(I)$, отвечающая формуле (24) нанесена на Рис.3 (сплошная кривая). Видно, что она находится в хорошем согласии с экспериментальными данными (нанесены на том же рисунке знаками +).

Отметим, что экстраполяция \tilde{I}^{-1} по формуле (24) в область малых токов $\tilde{I} \rightarrow 0$ дает значение установившегося разброса по импульсам на порядок большее, полученного в работе /5/.

В качестве другого приложения результатов приведем оценки величин порогового тока для пучка протонов с энергией 200 МэВ, движущегося в НАП-М. При этом мы ограничимся оценками для неустойчивости "отрицательной массы" и неустойчивости, связанной с взаимодействием пучка с резонатором.

Для неустойчивости "отрицательной массы" при заданном разбросе по импульсам $\Delta p/p_0 = 10^{-5}$ формула (18а) дает $\tilde{I}_m Z = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ В}$, что, например, при импедансе связи $Z = 100 \text{ Ом}$ отвечает $\tilde{I}_m = 23 \text{ мкА}$. В условиях, когда существенно внутреннее рассеяние из (23) получим $\tilde{I}_m = 10^3/Z^2 (A)$, что при импедансе $Z = 100 \text{ Ом}$ дает $\tilde{I}_m = 1 \text{ мА}$.

Если пучок взаимодействует с резонатором, то

$$Z(\omega) = Z_0 \frac{\alpha_0 \omega_{\text{рез}} \Gamma}{\omega_{\text{рез}}^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma}$$

где $\omega_{\text{рез}}$ — резонансная частота, а $\omega_{\text{рез}}/\Gamma$ — добротность резонатора. В случае резонансного взаимодействия $\omega_{\text{рез}} = \kappa \omega_0$, $Z = -iZ_0$ и формула (18в) дает $\tilde{I}_m Z_0 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ В}$.

Авторы пользуются случаем выразить свою благодарность В.В.Пархомчуку за многочисленные критические замечания, а также Я.С.Дербеневу и И.Н.Мешкову за интерес к работе.

Приложение А

Предельный переход $\lambda \rightarrow 0$ в уравнении (12) легко проследить, если воспользоваться для входящей в (12) суммы представлением в виде интеграла Меллина:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-q)^m}{m!} \frac{q+m}{y+i(q+m)} = \int_C \frac{ds}{2\pi i} \frac{q^{-s} \Gamma(s)(q-s)}{y+i(q-s)}, \quad (\text{A.1})$$

где $\lambda y = \Delta \omega$, а контур интегрирования C проходит правее мнимой оси s и левее полюса знаменателя в (A.1).

Нам, таким образом, нужно вычислить

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} e^q \int_C \frac{ds}{2\pi i} \frac{q^{-s} \Gamma(s)(q-s)}{y+i(q-s)} = \Phi(y). \quad (\text{A.2})$$

Заменяя в (A.2) переменную интегрирования $s = t+q$ и воспользовавшись формулой Стирлинга

$$\Gamma(t+q) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{q}} (q+t)^{q+t} e^{-q-t}, \quad q \gg 1$$

можем записать

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \frac{i}{\sqrt{2\pi} q} \int_{C_1} \frac{dt + e^{-t}}{y-it} \left(1 + \frac{t}{q}\right)^{t+q} = \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi} q} \int_{C_1} \frac{dt + e^{-t}}{y-it} e^{t^2/2q}, \quad q \gg 1. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Переходя в (A.3) к новой переменной $\varepsilon = i\lambda t$ и объединяя (A.3) и (12), приходим к дисперсионному уравнению

$$1 = \frac{2e \tilde{I} Z \kappa}{\sqrt{\pi} R_0 |K \delta \omega|^3} \kappa^2 \frac{d\omega_0}{d\rho} \int_{C_2} \frac{d\varepsilon \varepsilon}{\Delta \omega - \varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\kappa^2 \delta \omega^2}\right), \quad (\text{A.4})$$

справедливому для систем с слабым трением (по сравнению с $\delta \omega$) трением. Контур интегрирования C_2 проходит ниже полюса знаменателя (A.4).

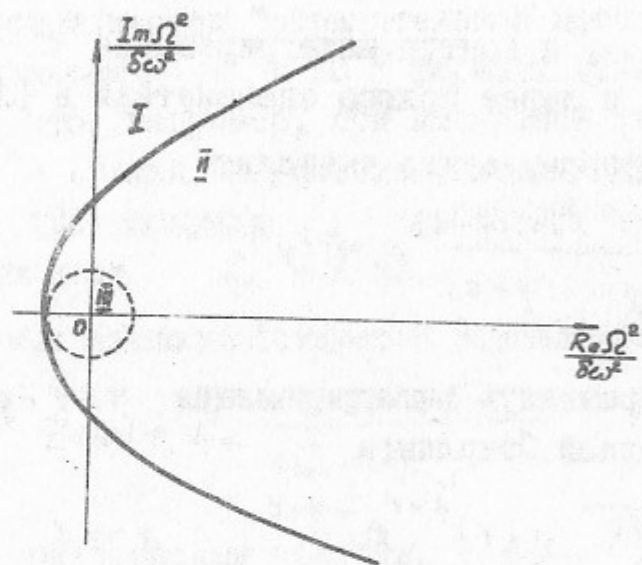


Рис.1. Схематическое изображение области устойчивости, отвечающее условию (16). В областях II, III движение устойчиво. Область III отвечает условию (13).

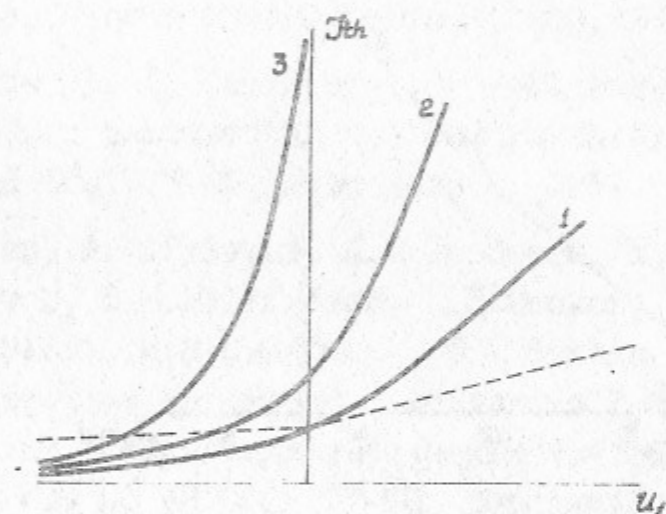


Рис.2. Зависимость порогового тока неустойчивости от u_1 (единицы произвольные). Кривые 1, 2, 3 отвечают $V_1^{(1)} > V_1^{(2)} > V_1^{(3)} = 0$. Пунктирная линия показывает изменение кривой 1, обусловное эффектам взаимного рассеяния протонов.

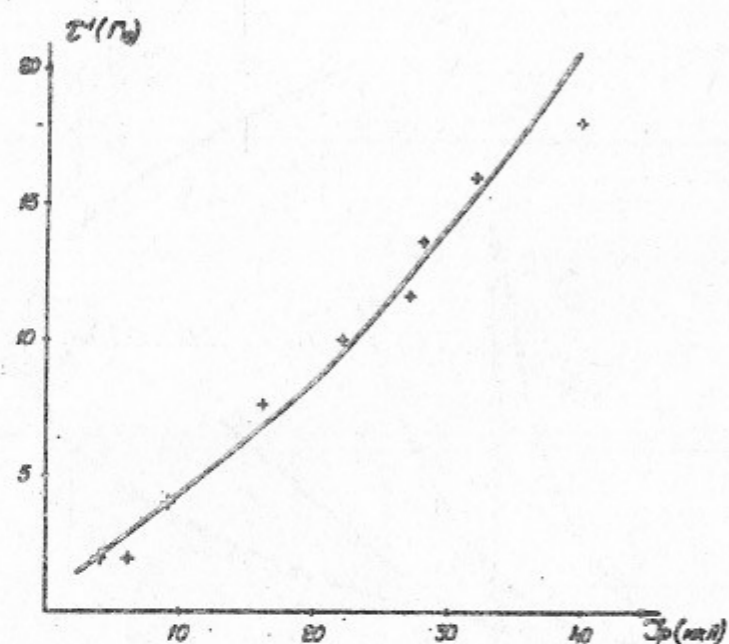


Рис. 3. Зависимость времени исчезновения первой гармоники плотности протонов от тока протонного пучка. $I_e = 0,3$ А.
 ++++ эксперимент, сплошная линия отвечает формуле (24).

1. Г.И.Будкер, Н.С.Диканский, В.И.Куделайнен, И.Н.Мешков, В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков, А.Н.Скринский, Б.Н.Сухина. *Experimental study of electron cooling. Particle Accelerators*, V 7, N 4, 1976.
2. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Труды Международной конференции по ускорителям высоких энергий, ЦЕРН, стр.115, 1959; *S. E. Nielsen, A. M. Sessler, K. R. Symon*, там же, стр.239.
3. А.Исихара. Статистическая физика, стр.196, Мир, Москва, 1973.
4. В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков. Энергетический разброс тяжелых частиц в накопителях с электронным охлаждением. Препринт ИЯФ СО АН СССР 77-37, Новосибирск, 1977.
5. Г.И.Будкер, А.Ф.Булусhev, Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский, В.И.Кононов, В.И.Куделайнен, И.Н.Мешков, В.В.Пархомчук, Д.В.Пестриков, А.Н.Скринский, Б.Н.Сухина. Состояние работ по электронному охлаждению. Доклад на X Международной конференции по ускорителям заряженных частиц. Протвино, 1977, Препринт ИЯФ СО АН СССР 77-70, Новосибирск, 1977.

Работа поступила - 20 декабря 1977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 12.IV-1978 г. № 02799
Усл. 1,6 печ.л., 1,3 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 31.

Отпечатано на ротапинтере ИИФ СО АН СССР