3

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 78 - 8

В.Н.Байер, А.И.Мильштейн

РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ВБЛИЗИ ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА

Новосибирск

1978

В.Н.Байер, А.И.Мильштейн

РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ВБЛИЗИ ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА

АННОТАЦИЯ

Найдем массовый оператор электрона движущегося в поле интенсивной плоской волны распространяющейся вдоль магнитного поля. При рассмотрении использована операторная диаграммная техника. Получен радиационный сдвиг уровней и вероятности излучения электрона. Вычисленно сечение комптон-эффекта на электроне, движущемся в магнитном поле. Детально проанализирована область вблизи циклотронного резонанса.

Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, 630090

RADIATIVE EFFECTS
IN THE VICINITY OF CYCLOTRON RESONANCE

V.N.BAIER, A.I.MILSTEIN

A b s t r a c t

Mass operator of a spinor particle moving in an intence plane-wave of general type, which propagates along the magnetic field H has been found (Eqs.(13)-(16)). Extension of the previously developed operator technique is used. Detailed analysis has been made in a specific case, when the plane-wave is monochromatic and circularly polarized. The explicit form of matrix elements of the mass operator on the mass shell is calculated (see Eqs. (22-24)). Some limiting cases are discussed. Cross-section of the Compton scattering on the electron in the magnetic field has been obtained (see general expression, Eqs. (25-27) and explicit form of Compton scattering cross-section for $\frac{H}{H_0} \ll 1$ and $\frac{\omega\lambda}{eH} \equiv \nu \gg 1$ (Eqs. (28), (29)). It is shown that in the vicinity of cyclotron resonance the electron motion becomes quasi-classical. This means that any interesting physical quantity can be found using the known results developed in quasi-classical domain, see Ref./7/ (mass operator (33), and intensity of radiation (35)).

В случае, когда плоская волна распространяется вдоль магнитного поля реализуется очень интересная ситуация: в точке циклотронного резонанса, когда частота волны совпадает с циклотронной частотой движения частицы в магнитном поле (с учетом допплеровского сдвига) имеет место резонансная передача энергии частицы волне и обратно. Этот процесс может иметь место в большом числе физических явлений, в частности при формировании излучения пульсаров, а также в устройствах по усилению электромагнитных волн или по ускорению частиц лазерной волной.

В этой связи несомненный интерес представляет анализ радиационных эффектов в поле указанной конфигурации, включая окрестность циклотронного резонанса. Подход к рассмотрению этой проблемы был сформулирован в работе авторов /I/, где был рассмотрен случай частиц со спином 0 , там же дана краткая библиография работ, касающихся процессов в данном поле. В настоящей работе мы рассмотрим представляющий основной физический интерес случай частиц со спином I/2. Принятый подход /I/ использует оперативную диаграммную технику, в основе которой лежит операторное представление функции Грина заряженной частицы в данном поле с последующим специфическим преобразованием (распутыванием) операторных выражений. Эта техника была ранее развита для рассмотрения радиационных эффектов в случае однородного внешнего поля в работе Каткова, Страховенко и одного из авторов /2/, и для случая плоской электромагнитной волны в работе Каткова, Страховенко и авторов /3/. Рассмотрение радиационных эффектов в поле рассматриваемой конфигурации является существенно более сложной задачей и предыдущие работы сводились к анализу некоторых частных случаев. В настоящей работе получено общее выражение для массового оператора электрона в данном поле, из которого следует как вероятность излучения электрона, так и сдвиг уровней квазиэнергии. Проведен анализ некоторых предельных случаев, в частности получено сечение комптон-эффекта в магнитном поле. Подробно исследованы эффекты вблизи циклотронного резонанса.

Электромагнитное поле будем описывать потенциалом

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu(x_\parallel) + \mathcal{A}_\mu(\varphi) \qquad (I)$$

где $\varphi = \varkappa x$, $\varkappa x_{\parallel} = 0$. Положим, что магнитное поле направлено по оси 3, вдоль которой распространяется волна, тогда

$$A^{1}(x_{\parallel}) = -x^{2}H\,,\quad A^{\mu}(\varphi) = n_{1}^{\mu}a_{1}(\varphi) + n_{2}^{\mu}a_{2}(\varphi) \qquad (2)$$

здесь $\varphi = \varkappa x = x^{0} - x^{3}$, введены вектора $\varkappa^{\mu} = g_{0}^{\mu} + g_{3}^{\mu}$, $n_{1}^{\mu} = g_{1}^{\mu}$, $n_{2}^{\mu} = g_{2}^{\mu}$, где g_{ν}^{μ} – компоненты метрического тензора.

Напряженность электромагнитного поля (I) представим в виде /I/

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + \sum_{k=1}^{2} f_{k}^{\mu\nu} a_{k}'(\varphi),$$

$$f_{k}^{\mu\nu} = \varkappa^{\mu} n_{k}^{\nu} - \varkappa^{\nu} n_{k}^{\mu} \qquad (3)$$

причем $F^{21} = H$, H – магнитное поле, $a_{k}'(\varphi) \equiv \dfrac{da_{k}(\varphi)}{d\varphi}$.

Массовый оператор электрона во внешнем поле может быть представлен в виде (см. /2/ , формула (3.I))

$$M^{(1/2)} = -\frac{ie^{2}}{(2\pi)^{4}} \int \frac{d^{4}k}{k^{2}+i0}\, \gamma^{\mu}\, \frac{\hat{\mathcal{P}} - \hat{k} + m}{(\hat{\mathcal{P}} - \hat{k})^{2} - m^{2} + i0}\, \gamma_{\mu} \qquad (4)$$

где $\mathcal{P}_{\mu} = i\partial_{\mu} - e\mathcal{A}_{\mu}$ $(e>0)$. Проведем стандартную параметризацию подинтегрального выражения

$$\frac{1}{k^{2}+i0}\cdot\frac{1}{[(\hat{\mathcal{P}} - \hat{k})^{2} - m^{2} + i0]} = -\int_{0}^{\infty} s\,ds \int_{0}^{1} du\, e^{-isum^{2}}\, e^{isu(\hat{\mathcal{P}} - \hat{k})^{2} + is(1-u)k^{2}} \qquad (5)$$

Тогда формулу (4) можно переписать в виде:

$$M^{(1/2)} = \frac{ie^{2}}{(2\pi)^{4}} \int_{0}^{\infty} s\,ds \int_{0}^{1} du\, \tilde{M}^{(1/2)} \qquad (6)$$

здесь

$$\tilde{M}^{(1/2)} = \int d^{4}k\, \gamma^{\mu} (\hat{\mathcal{P}} - \hat{k} + m) \exp\{isu[(\hat{\mathcal{P}} - \hat{k})^{2} - m^{2}]\}\, \gamma_{\mu}\, \times$$
$$\times \exp[is(1-u)k^{2}] \qquad (7)$$

Взятие интеграла по k сводится прежде всего к вычислению величины

$$Q^{(1/2)} = \int d^{4}k \exp[isu(\hat{\mathcal{P}} - \hat{k})^{2}] \exp[is(1-u)k^{2}] =$$
$$= \int d^{4}k\, e^{-ikX}\, e^{isu\hat{\mathcal{P}}^{2}}\, e^{ikX}\, e^{is(1-u)k^{2}} \qquad (8)$$

где использован оператор сдвига в импульсном пространстве: для некоторой функции $f(\mathcal{P})$ имеет место

$$e^{-ikX} f(\mathcal{P}) e^{ikX} = f(\mathcal{P} - k),\quad [\mathcal{P}_{\mu}, X_{\nu}] = ig_{\mu\nu}$$

Для вычисления интеграла (8) необходимо преобразовать операторное выражение $\exp(isu\hat{\mathcal{P}}^{2})$. Это преобразование (распутывание) являющееся одним из центральных мест в данном методе, приведено в приложении. Подставив выражение (п.I4) в формулу (8) проведем интегрирование по k . Взятие интеграла по переменным k^{0}, k может быть выполнено с помощью методики, использованной в работе /3/. При этом следует перейти к переменным

$$k_{\varphi} = \frac{1}{2}(k^{0} + k^{3})\,,\quad k_{\xi} = \frac{1}{2}(k^{0} - k^{3}) \qquad (9)$$

причем интегрирование по k_{φ} дает $\delta(k_{\xi} - up_{\xi})$, а это означает, что интегрирование по k_{ξ} сводится к замене $k_{\xi} \to up_{\xi}$. Интегрирование по переменным k^{1} , k^{2} может быть проведено с помощью методики, принятой в работе /2/. В итоге получаем

$$Q^{(1/2)} = -\frac{i\pi^{2}}{s^{2}} \frac{1}{\sqrt{D}}\, e^{i\Phi}\, e^{i[(\mathcal{P}-q)_{\parallel}^{2} \frac{\rho}{eH}]} (1 + \hat{\varkappa}\hat{g})\, e^{isu\frac{e\sigma\mathcal{F}}{2}}\, e^{i\eta\mathcal{P}_{\perp}^{2}} \qquad (10)$$

где использованы обозначения (см. также формулы (п.4), (п.7)):

$$q = x\int_{0}^{1} \Delta(\eta y) e^{-2xBy} dy\, (\mathrm{ctg}\, x + B)\,,\quad \eta = su(1-u),$$

$$\rho(x) = x - a(x),\quad a(x) = \mathrm{arc\,tg}\left[\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x + 2x\left(\frac{1-u}{u}\right)}\right],$$

$$\Phi = su\left[2su\int_0^1 dy_2\int_0^{y_2} dy_1\,\Delta(\eta y_1)\,e^{-2Bx(y_1-y_2)}\,eF\,\Delta(\eta y_2) + \int_0^1 \Delta^2(\eta y)\,dy - x\,\mathrm{ctg}\,x\left(\int_0^1 \Delta(\eta y)\,e^{-2Bxy}\,dy\right)^2\right],$$

$$g = su\int_0^1 \Delta'(\eta y)\,e^{-2eFsyu}\,dy,$$

$$D = \frac{u^2}{x^2}\left[\sin^2 x + x^2\left(\frac{1-u}{u}\right)^2 + \frac{1-u}{u}\,x\sin 2x\right] \tag{II}$$

Здесь $x = sueH$ и матрица $B^{\mu\nu} = \dfrac{E^{\mu\nu}}{H}$.

В выражении для $\tilde{M}^{(1/2)}$ (7) имеются числа двух типов: не содержащие или содержащие K_μ в множителе при экспоненциальном выражении. Члена первого типа мы вычислили, осталось найти члены второго типа. Мы воспользуемся здесь тем же способом,что в работе /3/ (см.формулу (3.9))

$$\int \hat{k}\,e^{isu(\hat{\mathcal{P}}-\hat{k})^2}\,e^{is(1-u)k^2}\,d^4k = \frac{u}{2\eta}\left[X_\mu, Q^{(1/2)}\right] \tag{I2}$$

Вычисляя входящие сюда коммутаторы и подставляя (II), (I2) в (7) имеем для массового оператора в данном поле

$$M^{(1/2)} = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{D}}\,e^{-isum^2}\left\{\left[2m\cos x + R\hat{\mathcal{P}} + \frac{1}{2}\exp\left(-isu\frac{e\sigma F}{2}\right)\hat{\varkappa}\tau_1 + R\tau_2\right]Q_0 - uRQ_0\mathcal{P}_\perp\right\} \tag{I3}$$

где

$$R = -e^{-isu\frac{e\sigma F}{2}} + \hat{\varkappa}\left(\gamma e^{-Bx} g\right),$$

$$\tau_2 = \frac{u}{2\eta}\left(\frac{e^{-2B\rho}-1}{eF}\right)(\mathcal{P}-q)_\parallel,\quad \tau_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho_\xi}\frac{u}{2\eta} + \frac{\partial g}{\partial\rho_\xi}\tau_2,$$

$$Q_0 = e^{i\Phi}\exp\left[i(\mathcal{P}-q)^2_\parallel\frac{\rho}{eH}\right]e^{i\eta\mathcal{P}_\perp^2} \tag{I4}$$

остальные обозначения см. в (II), (п.3).

Полученное выражение для массового оператора должно быть стандартным способом перенормировано (см./2/, формула (3.I5))

$$M_R^{(1/2)} = M^{(1/2)} - M^{(1/2)}(\hat{\mathcal{P}}=m, \mathcal{A}_\mu=0) - (\hat{\mathcal{P}}-m)\frac{\partial M^{(1/2)}}{\partial\hat{\mathcal{P}}}(\hat{\mathcal{P}}=m, \mathcal{A}_\mu=0) \tag{I5}$$

т.е.

$$M_R^{(1/2)} = M^{(1/2)} - \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^\infty\frac{ds}{s}\int_0^1 du\,e^{-isu^2m^2}\left\{m(1+u) - (\hat{\mathcal{P}}-m)(1-u)\left[1-2ism^2u(1+u)\right]\right\} \tag{I6}$$

Найденный массовый оператор может быть использован в различных приложениях. Как показано в работе авторов /4/ изменение квазиэнергии электрона определяется в результате решения секулярного уравнения (это связано с наличием двухкратного выражения)

$$\left|(\varepsilon-\varepsilon_0)\delta_{ij} - \frac{\int d^4x\,\bar{\psi}_{0i}M_R^{(1/2)}\psi_{0j}}{\int d^4x\,\bar{\psi}_{0i}\gamma^0\psi_{0i}}\right| = 0, \tag{I7}$$

где ψ_{0i} – решения уравнения Дирака в данном поле (i,j = I, 2). Знание изменения квазиэнергии (при данном квазиимпульсе) позволяет найти представляющих особый физический интерес радиационный сдвиг уровней $Re\,\Delta\varepsilon$ и вероятность излучения электрона W:

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0 = Re\,\Delta\varepsilon - \frac{iW}{2} \qquad (18)$$

Решение уравнения Дирака в поле рассматриваемой конфигурации было найдено Редмондом /5/. Мы представим это решение в виде (используется ковариантное условие нормировки)

$$\Psi_n = exp\left\{-i\left[\frac{\lambda}{2}\xi + \frac{m^2+b_n^{(1/2)}}{2\lambda} + K\pi - \right.\right. \qquad (19)$$

$$\left.\left. -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\varphi} eA(\varphi')\dot{K}(\varphi')d\varphi'\right]\right\} exp\left(\frac{1}{2}\hat{æ}\hat{\dot{K}}(\varphi)\right)\psi_{n\tau}(x_{\parallel}),$$

где

$$\pi_{\parallel\mu} = i\partial_\mu - eA_\mu(x_{\parallel}),\quad \xi = x^0 + x^3 \quad \left(p_\xi\Psi_n = \frac{\lambda}{2}\Psi_n\right),$$

$$b_n^{(1/2)} = 2neH,\quad K(\varphi) = e^{\frac{eF\varphi}{\lambda}}\int_{-\infty}^{\varphi} e^{-\frac{eF\varphi'}{\lambda}} eA(\varphi')\frac{d\varphi'}{\lambda},\quad \dot{K}(\varphi) \equiv \frac{dK(\varphi)}{d\varphi},$$

$$\psi_{n1}(x_{\parallel}) = \frac{1}{\sqrt{2m(\varepsilon+m)}}\begin{pmatrix}(\varepsilon+m)v_n\\ 0\\ p_z v_n\\ \sqrt{2neH}\,v_{n-1}\end{pmatrix},\quad \psi_{n2}(x_{\parallel}) = \frac{1}{\sqrt{2m(\varepsilon+m)}}\begin{pmatrix}0\\ (\varepsilon+m)v_{n-1}\\ \sqrt{2neH}\,v_n\\ -p_z v_{n-1}\end{pmatrix},$$

$$\varepsilon^2 = m^2 + p_z^2 + 2neH, \qquad (20)$$

$$v_n = \left(\frac{\sqrt{eH}}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\right)^{1/2} e^{ip_x x} e^{-\frac{eH}{2}\left(y+\frac{p_x}{eH}\right)^2} H_n\left(\sqrt{eH}\left(y+\frac{p_x}{eH}\right)\right),$$

здесь H_n – полиномы Эрмита, удобства ради мы перешли от обозначений компонент вектора x^1, x^2, x^3 к x, y, z.

Используя эти волновые функции можно найти величину $\langle\gamma^0\rangle$, входящую в секулярное уравнение (17):

$$\langle\gamma^0\rangle = \frac{\varepsilon}{m} + \frac{m\nu^2\xi^2}{2\lambda\delta^2},\quad \varepsilon - p^z = \lambda, \qquad (21)$$

где

$$\nu = \frac{\omega\lambda}{eH},\quad \delta = 1+\nu.$$

Ввиду громоздкости получающихся выражений мы ограничимся в дальнейшем случаем циркулярно поляризованной волны, для которой результат имеет относительно простой вид. Согласно формуле (17) следует вычислить матричные элементы оператора (16) между волновыми функциями (19). При этом вычислении не теряя общности можно перейти в систему, где $p_z = 0$. Весьма полезными оказываются операторные преобразования, использованные в разделе 3 работы /1/. В результате довольно трудоемких вычислений получаем следующие окончательные формулы для матричных элементов массового оператора в поле рассматриваемой конфигурации

$$\langle M^{(1/2)}\rangle_{ij} = \frac{\alpha}{2\pi}m\int_0^\infty \frac{ds}{s}\int_0^1 du\, e^{-isu^2m^2}\left[\frac{Y_{ij}}{\sqrt{D}}e^{i\Phi_{sp}-\frac{\vartheta}{2}} - (1+u)\delta_{ij}\right],$$

здесь (22)

$$\Phi_{sp} = \Phi_0 + \xi^2\Phi_1;\quad \vartheta = 2\xi^2\frac{(Jm\,R)^2}{\sin^2\varrho}\frac{H_0}{H};$$

$$\Phi_0 = 2n[x(1-u)-\varrho],\quad \Phi_1 = \frac{H_0}{H}\left[\left(\frac{x}{x+y}\right)^2\frac{\sin y}{\sin x}\sin(x+y) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin 2y}{2(1+\nu)^2} - \frac{\nu x y u}{(x+y)(1+\nu)} - ctg\,\varrho\,|R|^2 - \frac{2\,Jm\,R}{1+\nu}\sin y\right];$$

$$Y_{11} = Y_0 + \xi^2 Y_1,\quad Y_0 = a_1 L_n(\vartheta) + a_2 L_{n-1}(\vartheta),$$

$$Y_1 = b_1 L_n(\vartheta) + b_2 L_{n-1}(\vartheta) + b_3 L_{n-1}^1(\vartheta) + b_4 L_{n-2}^1(\vartheta) + b_5 L_n^1(\vartheta),$$

$$a_1 = \frac{e^{-i(\varrho-x)}}{2}\left\{\left(1+\frac{\varepsilon}{m}\right)\left(1+ue^{-2ix}\right) + 2n\frac{H}{H_0}\left[2ie^{-ix}\sin x + \right.\right. \qquad (23)$$

$$\left.\left. + ue^{i\varrho}\left(e^{i\varrho} - \frac{\sin\varrho}{\varrho H}\right)\right]\right\},\quad a_2 = a_1^*(m\to -m),$$

$$b_1 = \frac{\nu}{2}\left(1+\frac{m}{\varepsilon}\right)e^{-i\varrho}\left\{2\sin y\frac{\nu}{1+\nu}z^* + u\frac{e^{-ix}}{\sin\varrho}Re\left[e^{i\varrho}\left(\frac{x\sin y}{x+y}d - R\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{dR^*}{dy} + iR^*\right)\right] + \frac{u}{\varrho H}\left(iRz^* - \frac{e^{-i(x+y)}Re\,R}{1+\nu}\right) + ue^{-iy}\left[z^*\left(\frac{2\,Jm\,Re^{i(\varrho+y)}}{\sin\varrho} - \right.\right.$$

$$-\frac{i\nu}{1+\nu}\Big)+\frac{e^{-ix}}{1+\nu}\Big(-2\,\mathrm{Jm}R+\frac{\nu\cos y}{1+\nu}\Big)\Big]\Big]\Big\},\quad b_2=b_1^*(m\to -m),$$

$$b_3=i\nu\left[c_1+c_2+c_1^*(m\to -m)\right],\quad c_1=\Big(R^*-\frac{\sin y}{1+\nu}\Big)\Big\{\Big(1+\frac{m}{\varepsilon}\Big)\Big[\frac{u}{2}e^{-ix}\Big(\frac{e^{-iy}\sin\varrho}{\eta H(1+\nu)}-$$

$$-\frac{e^{-i(\varrho+y)}}{1+\nu}+\Big(\frac{dR}{dy}-iR\Big)e^{-i\varrho}\Big)-iz^*e^{i\varrho}\Big]-i\frac{m}{\varepsilon}\frac{ue^{i\varrho}}{(1+\nu)}\Big[z+\frac{\sin x\,e^{iy}}{1+\nu}+\sin(y-x)\Big]\Big\},$$

$$c_2=2\mathrm{Re}\Big\{\Big(R^*-\frac{\sin y}{1+\nu}\Big)e^{i\varrho}\Big[\frac{u}{\nu}e^{ix}\Big(\frac{R}{\eta H}-\frac{e^{i\varrho}(R-R^*)}{\sin\varrho}\Big)+2iz-\frac{ue^{i(x-y)}}{1+\nu}\Big]\Big\},$$

$$b_4=\frac{\nu}{2}\Big(1-\frac{m}{\varepsilon}\Big)\Big(R^*-\frac{\sin y}{1+\nu}\Big)e^{2i\varrho}\Big[2ze^{i\varrho}+iue^{i(x-\varrho)}\Big(\frac{dR}{dy}-iR\Big)+2u\Big(\frac{\sin\varrho}{\eta H}-e^{i\varrho}\Big)\Big(\frac{ie^{i(x+y)}}{2(1+\nu)}-z\Big)\Big],$$

$$b_5=-b_4^*(m\to -m);\quad Y_{12}=\xi^2\Big[\frac{1}{\tau}\Big(b_2L_{n-1}(\vartheta)+b_4L^1_{n-2}(\vartheta)+$$

$$+i\nu c_1^*(m\to -m)L^1_{n-1}(\vartheta)\Big)-\tau\Big(b_1L_n(\vartheta)+b_5L^1_n(\vartheta)+i\nu c_1L^1_{n-1}(\vartheta)\Big)\Big];$$

$$Y_{22}=Y_{11}(m\to -m),\quad Y_{21}=Y_{12}(m\to -m);$$

где

$$R=e^{i(\varrho+y)}\sin\varrho\Big(c^*+\frac{\nu}{1+\nu}\Big),\quad c=\frac{x\sin(x+y)}{(x+y)\sin x}e^{iy}-1,$$

$$z=\frac{e^{-i\varrho}\sin x\,R}{\sin\varrho},\quad \tau=\sqrt{\frac{\varepsilon-m}{\varepsilon+m}},\quad x=sueH,\ y=\lambda\omega\eta,$$

$$\nu=\frac{\omega\lambda}{eH},\quad H_0=\frac{m^2}{e},\quad \varepsilon^2=m^2+2n\frac{H}{H_0}$$

остальные обозначения см. в (II).

Полученный результат (22) дает общую картину радиационных эффектов (вероятность излучения, сдвиг уравней) при движении электрона в поле рассматриваемой конфигурации. Рассмотрим теперь массовый оператор в ряде предельных случаев.

При $\xi^2 \ll$ I имеем описание процессов в магнитном поле любой напряженности в присутствии слабой плоской волны. Для получения явного выражения для $\langle M^{(1/2)}\rangle_{ij}$ следует провести

разложение по ξ^2. Нулевой член разложения описывает радиационные эффекты в магнитном поле, члены пропорциональные ξ^2 после деления на поток $\lambda/\langle \mathcal{P}_0\rangle$ и замены $\xi^2\to\frac{4\pi\alpha}{m^2\omega}$ даёт полное сечение комптон-эффекта на поляризованном электроне в магнитном поле произвольной напряженности. Для электрона находящегося в состоянии I (см.(20)) полное сечение комптон-эффекта есть

$$\sigma_1=-\frac{4\alpha^2}{m^2\Lambda}\,\mathrm{Jm}\int_0^\infty\frac{ds}{s}\int_0^1 du\,\frac{e^{i\varphi_0}}{\sqrt{D}}\Big[\frac{dY_0}{d\xi^2}+\Big(i\varphi_1-\frac{\vartheta}{\xi^2}\Big)Y_0+Y_1\Big]_{\xi^2=0} \qquad (25)$$

где $\Lambda=\frac{\omega\lambda}{m^2}$, остальные величины определены в (23).

Для поляризации электрона 2

$$\sigma_2=\sigma_1(m\to -m) \qquad (26)$$

и для неполяризованных электронов

$$\sigma_{Comp}=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2) \qquad (27)$$

При любом другом выборе поляризованных состояний электрона следует связь соответствующую линейную комбинацию ψ_1 и ψ_2 и матричных элементов $\langle M^{(1/2)}\rangle_{ij}$.

Комптон-эффект на электроне во внешнем магнитном поле обсуждался ранее Милтоном и др. /6/, которым удалось в рамках операторной техники Швингера для электрона в магнитном поле учесть в низшем порядке теории возмущений взаимодействия с электромагнитной монохроматической волной, распространяющейся вдоль поля H. Полученное нами выражение является существенно более компактным.

В случае $H/H_c \ll$ I и $\nu=\frac{\lambda\omega}{eH}\gg$ I можно получить явное выражение для сечения комптон-эффекта σ. При этом вклад в интеграл (25) дает область малых x. Проведя разложение и выполнив интегрирование найдем:

$$\sigma=\sigma_c+\sigma_H \qquad (28)$$

здесь

$$\sigma_0 = \frac{\pi\alpha^2}{m^2\Lambda}\left\{\left[1-\rho-\frac{\rho+2}{\Lambda}-\frac{2}{\Lambda^2}\right]\ln(1+2\Lambda)+\frac{1+4\rho}{2}+\frac{2}{\Lambda}+\frac{4\Lambda^2\rho-1}{2(1+2\Lambda)^2}\right\},$$

$$\sigma_H = -\frac{2\pi\alpha^2\xi_2}{m^2\Lambda\nu}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\Lambda}+\frac{1}{\Lambda^2}\right)\ln(1+2\Lambda)+\frac{\Lambda}{2}-\frac{2}{\Lambda}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2(1+2\Lambda)}-\right.$$
$$-\frac{5}{4}\frac{1}{(1+2\Lambda)^2}+\frac{1}{4(1+2\Lambda)^3}+\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{1}{\Lambda}-1\right)\ln(1+2\Lambda)+\Lambda+1-\frac{5}{1+2\Lambda}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{5}{2(1+2\Lambda)^2}-\frac{1}{2(1+2\Lambda)^3}-\frac{\varepsilon^2}{m^2}\left(\frac{1}{\Lambda}\ln(1+2\Lambda)-\frac{3}{1+2\Lambda}+\frac{1}{(1+2\Lambda)^2}\right)\right]\right\} \tag{29}$$

где $\xi_2 = \pm 1$ для правой (левой) поляризации волны

$$\Lambda = \frac{\omega\left[\langle P_0\rangle-\langle P_3\rangle\right]}{m^2}, \quad \langle P_0\rangle^2 = \langle P^3\rangle^2+m^2+2neH$$

Величина σ_0 совпадает по форме с сечением комптон-эффекта на поляризованном электроне, если $\Lambda = \frac{kp}{m^2}$, k и p -импульсы фотона и электрона (см./3/, формула (3.4)), $-\rho$ - спиновой корреляционный член. В силу двухкратного выражения по спину электронное состояние с произвольной поляризацией может быть представлено как линейная суперпозиция волновых функций (20):

$$\psi = e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2}\psi_1 + e^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\vartheta}{2}\psi_2 \tag{30}$$

в этом случае, в системе, где $p^3 = 0$, спиновой корреляционный член в циркулярно поляризованной волне есть $\rho = \xi_2(\vec{\zeta}\vec{n}) = \frac{m}{\varepsilon}\cos\vartheta - \frac{\sqrt{2neH}}{\varepsilon}\sin\vartheta\cos\varphi$. Величина σ_H является поправкой к сечению. Для неполяризованной волны (а также в случае линейной поляризации) в σ_H остается только член пропорциональный ρ. Этот член согласуется с найденным в /6/. Остальной вклад в σ_H в работе /6/ отсутствует, так как там рассматривалась неполяризованная волна.

Как мы уже отмечали, в рассматриваемой конфигурации поля имеет место резонансная ситуация (циклотронный резонанс,

в котором частота волны совпадает с циклотронной частотой частицы в магнитном поле, $\nu = -1$). Рассмотрим этот вопрос в случае, когда $H/H_0 \ll 1$, $\nu \sim 1$ $\left(\Lambda = \frac{\lambda\omega}{m^2} \ll 1\right)$, $n\frac{H}{H_0} \ll 1$

В случае $\xi/\delta \sim 1$ сдвиг квазиуровней имеет вид:

$$\Delta\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{\left(1+\frac{\nu^2\xi^2}{2\delta^2}\right)}\left[-\frac{i\alpha m\Lambda\xi^2\nu^2}{2\pi\delta^2}\int_0^\infty\frac{dy}{y^4}\frac{\sin^2 y - y^2\cos 2y}{1+\frac{\xi^2\nu^2}{\delta^2}\left(1-\frac{\sin^2 y}{y^2}\right)} \pm \pm\frac{\alpha}{2\pi}\frac{eH}{2m}\right] \tag{31}$$

Здесь в первом члене основной вклад в интеграл по u дал интервал $u \sim \frac{H}{H_0} \ll 1$, а во втором члене (вклад аномального момента) дала область $x \sim H/H_0 \ll 1$. Мнимая часть выражения (31) определяет вероятность излучения электрона в поле данной конфигурации в классическом пределе (этот результат был получен в /1/). Первый член разложения этой вероятности по степеням ξ^2 (с учетом процедуры, использованной при выводе формулы (25)) дает сечение томпсоновского рассеяния циркулярно поляризованной волны на электроне в магнитном поле:

$$\sigma_T = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}\frac{\nu^2}{(1+\nu)^2} \tag{32}$$

В случае, когда $\xi/\delta \gg 1$ основной вклад в интеграл по y дает интервал $y \ll 1$. Проводя в выражениях (22) - (24) соответствующие разложения (члены с b_3, b_4, b_5 вклада не дают) имеем для сдвига квазиэнергии

$$\Delta\varepsilon_{1,2} = \frac{\alpha m\delta^2}{\pi\xi^2}\left\{\frac{1}{3}\int_0^\infty\frac{dv(5+7v+5v^2)}{(1+v)^3}\left[-L_{2/3}\left(\frac{2v}{3\varkappa}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{i}{\sqrt{3}}K_{2/3}\left(\frac{2v}{3\varkappa}\right)\pm\frac{H}{H_0\varkappa}\int_0^\infty\frac{dv\,v}{(1+v)^3}\left[L_{1/3}\left(\frac{2v}{3\varkappa}\right)+\frac{i}{\sqrt{3}}K_{1/3}\left(\frac{2v}{3\varkappa}\right)\right]\right]\right\} \tag{33}$$

где $\varkappa = \frac{\xi H}{\delta H_0}$, K_ν - функция Бесселя мнимого аргумента (функция Макдональда), функция L_ν определена в /7/, стр. 181. Последний член в фигурных скобках является спиновым.

Приведем здесь также асимптотические разложения для (33)

$$\Delta\varepsilon_{1,2} = \frac{\alpha m \delta^2}{\pi \xi^2}\left[\frac{8\varkappa^2}{3}\ln\frac{1}{\varkappa} - i\frac{5}{2\sqrt{3}}\varkappa \pm \frac{H}{2H_0}\right] (\varkappa \ll 1),$$

$$\Delta\varepsilon_{1,2} = \frac{2\alpha m \delta^2}{9\xi^2}\left[\frac{7}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)(3\varkappa)^{2/3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - i\right) \pm \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2(3\varkappa)^{2/3}}\frac{H}{H_0}\right]$$

$$(\varkappa \gg 1). \quad (34)$$

Обсудим полученные результаты. По мере приближения к резонансу энергия электрона растет (см.(2I)), так что движение частицы становится квазиклассическим. Именно поэтому формула (33) согласуется с радиационным сдвигом энергии при движении электрона большой энергии в магнитном поле, найденном в квазиклассическом приближении (см./7/, формула (I2.7)). Нетрудно убедиться, что в системе, где $\langle p^z \rangle = 0$ (см.формулу (2I)), входящий в формулу (33) параметр $\varkappa = \frac{H}{H_0}\frac{\xi}{\delta}$ совпадает с характерным параметром $\chi = \frac{H}{H_0}\langle P^0\rangle/m$, входящим в формулы, описывающие магнитнотормозное излучение.

Квазиклассический характер движения электрона позволяет найти также другие свойства излучения, в частности, полную интенсивность излучения электрона вблизи резонанса. Воспользовавшись известными результатами, полученными в магнитном поле, имеем

$$I = \frac{\alpha m^2}{3\pi\sqrt{3}}\int_0^\infty \frac{u(4+5u+4u^2)}{(1+u)^3} K_{2/3}\left(\frac{2u}{3\varkappa}\right) \quad (35)$$

В этом выражении опущен спиновой член, который дает малый вклад в интенсивность излучения при $H/H_0 \ll$ I.

Приведем для полноты асимптотические значения выражения для интенсивности I:

$$I = \frac{2}{3}\alpha m^2 \varkappa^2 + \ldots \qquad (\varkappa \ll 1)$$

$$I = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \alpha m^2 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)(3\varkappa)^{2/3} + \ldots (\varkappa \gg 1) \quad (36)$$

так что вблизи резонанса $I \infty \delta^{-2/3}$. Заметим еще, что максимум спектрального распределения интенсивности лежит при частоте $\sim m\left(\frac{H}{H_0}\right)(\xi/\delta)^2$.

Приложение

Рассмотрим оператор $e^{is\hat{\mathcal{P}}^2} = e^{is(\mathcal{P}^2 + \frac{e\sigma\mathcal{F}}{2})}$, $\sigma\mathcal{F} = \sigma_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\nu\mu}$, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Представим этот оператор в виде:

$$e^{is\hat{\mathcal{P}}^2} = L(s)e^{isb}e^{isa} \quad (\text{П.I})$$

где $a = \mathcal{P}_0^2 - \mathcal{P}_3^2 \equiv \mathcal{P}_\perp^2$, $b = -(\mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_2^2 + \frac{e\sigma\mathcal{F}}{2}) = -\mathcal{P}_{\parallel}^2 + \frac{\sigma f}{2} + \frac{\sigma F}{2}$.
Продифференцировав (П.I) по s и умножив результат слева на L^{-1} и справа на $e^{-isa}e^{-isb}$ получим

$$iL^{-1}\frac{dL}{ds} = b(\varphi) - e^{isb(\varphi)}f(s)e^{-isb(\varphi)} \quad (\text{П.2})$$

где $f(s) = e^{isa}b(\varphi)e^{-isa}$, Использовав переменные $\varphi = x^0 - x^3$, $\xi = x^0 + x^3$ получим

$$\mathcal{P}_\perp^2 = 4p_\xi p_\varphi \quad (\text{П.3})$$

где $p_\varphi = i\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $p_\xi = i\frac{\partial}{\partial\xi}$. Теперь видно, что e^{isa} есть оператор сдвига по переменной φ, так что

$$f(s) = b(\tilde{\varphi}_s), \quad \tilde{\varphi}_s = \varphi - 4p_\xi s \quad (\text{П.4})$$

Представим оператор $\mathcal{P}_{\parallel}$ в виде:

$$\mathcal{P}_{\parallel} = i\partial_{\parallel} - eA(x_{\parallel}) - eA(\varphi) = \pi_{\parallel} - eA(\varphi)$$

С учетом того, что

$$[\pi_{\parallel i}, \pi_{\parallel k}] = -ieF_{ik}, \quad \frac{\sigma f(\varphi)}{2} = -i\hat{\varkappa}\hat{A}'(\varphi), \quad [\hat{\varkappa}, \sigma F] = 0, \quad (\text{П.5})$$

можно преобразовать уравнение (П.2) к виду:

$$iL^{-1}\frac{dL}{ds} = -\Delta^2 + 2\Delta e^{-2eFs}\mathcal{P}_{\parallel} + i\hat{\varkappa}(\Delta' e^{-2eFs}\gamma) \quad (\text{П.6})$$

где использована матричная форма записи $(\Delta F\gamma)\equiv\Delta^{\mu}F_{\mu\nu}\gamma^{\nu}$,

$$\Delta_{\mu}(s) = e\left[\mathcal{A}_{\mu}(\tilde{\varphi}_s) - \mathcal{A}_{\mu}(\varphi)\right] \qquad (\text{П.7})$$

При выводе (П.6) мы воспользовались соотношением

$$e^{is\frac{e\sigma\mathcal{F}}{2}}\gamma_{\mu}\,e^{-is\frac{e\sigma\mathcal{F}}{2}} = \left(e^{-2eFs}\gamma\right)_{\mu} \qquad (\text{П.8})$$

которое нетрудно получить, продифференцировав левую часть равенства по s и использовав коммутационное соотношение между $\sigma_{\mu\nu}$ и γ_{λ}. Решение уравнения (П.6) есть

$$L=(1+\hat{\varkappa}\hat{g}(s))\exp\left[is\int_0^1\Delta^2(ys)dy\right]T^{(-)}\exp\left[-2is\int_0^1\Delta(sy)e^{-2eFsy}\mathcal{P}_{\parallel}dy\right] \qquad (\text{П.9})$$

где символ $T^{(-)}$ обозначает антихронологическое произведение по "времени" s, $g(s)=s\int_0^1\Delta'(sy)e^{-2eFsy}\gamma\,dy$, $\Delta'=\partial\Delta/\partial\varphi$, Учтено, что $(\hat{\varkappa})^2=0$. Входящее в (П.9) $T^{(-)}$ произведение может быть вычислено, так как коммутатор операторов, стоящих в показателе экспоненты есть c-число (/7/, раздел 6.3). Нетрудно убедиться, что

$$T^{(-)}\exp\left[\int_0^1 B(s)ds\right] = \exp\left[\int_0^1 B(s)ds\right]\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\,\vartheta(s_2-s_1)\left[B(s_1),B(s_2)\right]\right\} \qquad (\text{П.10})$$

Подставив (П.10) в (П.9), а затем в (П.I) получаем

$$e^{is\hat{\mathcal{P}}^2} = (1+\hat{\varkappa}\hat{g}(s))\exp\left[is\int_0^1\Delta^2(sy)dy\right]\times$$
$$\times\exp\left[-2is\int_0^1\Delta(sy)e^{-2eFsy}\mathcal{P}dy\right]\times$$
$$\times\exp\left[2is^2\int_0^1 dy_1\int_0^1 dy_2\,\vartheta(y_2-y_1)\Delta(sy_1)e^{-2eFs(y_2-y_1)}\Delta(sy_2)\right]\times$$
$$\times\, e^{is\frac{e\sigma\mathcal{F}}{2}}e^{is\mathcal{P}_{\parallel}^2}e^{is\mathcal{P}_{\perp}^2} \qquad (\text{П.II})$$

Для дальнейшего удобно преобразовать (П.II) к виду, не содержащему линейных по $\mathcal{P}$ членов. С этой целью воспользуемся формулой

$$\exp\left[is(\mathcal{P}-q)_{\parallel}^2\right] = \exp\left\{i\left[q^2 s + 2s^2\int_0^1 dy_2\int_0^1 dy_1\,\vartheta(y_2-y_1)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\, q\,e^{2eFs(y_2-y_1)}q\right]\right\}\exp\left[-2iqs\int_0^1 e^{-2eFsy}\mathcal{P}dy\right]e^{is\mathcal{P}_{\parallel}^2} \qquad (\text{П.I2})$$

которую легко получить по описанному выше методу. Положив

$$q=q_s\equiv\frac{\int_0^1\Delta(sy)e^{-2eFsy}dy}{\int_0^1 e^{-2eFsy}dy} = \int_0^1\Delta(sy)e^{-2eFsy}dy\left[eFs + eHs\,\mathrm{ctg}\,eHs\right] \qquad (\text{П.I3})$$

приходим к следующему представлению

$$e^{is\hat{\mathcal{P}}^2} = (1+\hat{\varkappa}\hat{g}(s))e^{i\Phi(s)}e^{is\frac{e\sigma\mathcal{F}}{2}}e^{is(\mathcal{P}-q_s)_{\parallel}^2}e^{is\mathcal{P}_{\perp}^2} \qquad (\text{П.I4})$$

где

$$\Phi(s) = 2s^2\int_0^1 dy_2\int_0^{y_2}dy_1\,\Delta(sy_1)e^{2eFs(y_2-y_1)}\Delta(sy_2) +$$
$$+\, s\int_0^1\Delta^2(sy)dy - eHs^2\,\mathrm{ctg}\,eHs\left[\int_0^1\Delta(sy)e^{-2eFsy}dy\right]^2 \qquad (\text{П.I5})$$

Литература

I. V.N.Baier, A.I.Milstein J.Phys.A, 11, N 2, 1978

2. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко ЖЭТФ 67, 453, I974.

3. В.Н.Байер, В,М.Катков, В.И.Мильштейн, В.М.Страховенко ЖЭТФ 69, 783, I975.

4. В.Н.Байер, А.И.Мильштейн ДАН СССР 23I, II00, I976.

5. P.Redmond. J.Math.Phys 6, 1163, 1965.

6. K.Milton, W.Tsai, L De Raad, N.Dass. Phys.Rev.D10, 1299, 1974.

7. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин. Изучение релятивистских электронов. Атомиздат. Москва I973.

Работа поступила - I0 декабря I977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати I6.02.78г. МН 02687
Усл. I,I печ.л., 0,9 учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно
Заказ №8

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР