

18

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И ЯФ 77 - 114

В.Я.Иванов, Н.Г.Хавин

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА
ХАРАКТЕРИСТИК ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Новосибирск

1977

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

ПРЕПРИНТ

В.Я.Иванов, Н.Г.Хавин

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК
ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе рассмотрена математическая постановка и численные алгоритмы, реализующие решение самосогласованной задачи расчета интенсивных пучков релятивистских заряженных частиц. Для иллюстрации реализации численных алгоритмов приведено решение методических задач.

1. ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование поведения сильнооточных пучков заряженных частиц приводит к решению нелинейных задач расчета характеристик самосогласованных электростатических полей и траекторий частиц с учетом как внешних, так и собственных электрических и магнитных полей пучков. Методы численного решения данного класса задач изложены в работах [1, 2]. В данной работе рассматривается решение краевых задач для уравнения Пуассона в осесимметричном случае с помощью интегральных уравнений теории потенциала и сплайновой аппроксимации подинтегральной функции, аналогично работе [3], где указанный подход применялся для решения уравнения Лапласа. Численное интегрирование уравнений движения заряженных частиц производится методом Рунге-Кутты 3 порядка. Алгоритм учета объемного заряда и собственного магнитного поля частиц позволяет рассчитывать неламинарные релятивистские пучки. Внешнее магнитное поле задается осевым распределением магнитной индукции B_{z0} , а его значение в пространстве представляется отрезком ряда, для определения коэффициентов которого используется сплайновая аппроксимация функции B_{z0} .

Для иллюстрации эффективности реализации численных алгоритмов в работе рассматривается решение ряда задач методического характера.

Численные алгоритмы решения данного класса задач реализованы в виде программы на языке Фортран мониторной системы "Дубна" для БЭСМ-6"

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Потенциал φ электростатического поля подчиняется уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -\rho/\epsilon_0 \quad (1)$$

с граничными условиями первого

$$\varphi|_{S_1} = a(s) \quad (2)$$

и второго рода

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{S_2} = b(s), \quad (3)$$

заданными на участках S_1 и S_2 границы $S = S_1 \cup S_2$ области. Здесь ϵ_0 - абсолютная диэлектрическая постоянная вакуума, \vec{n} - вектор нормали к границе, ρ - плотность объемного заряда, а $a(s)$ и $b(s)$ - заданные функции, определенные на границе.

Для определения функции ρ принята квазигидродинамическая модель потока заряженных частиц, известная в литературе под названием модели "трубок тока" [2]. Полная система уравнений, описывающих поведение потока частиц состоит из уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \quad (4)$$

и уравнений движения частиц с массой M и зарядом Z

$$\frac{d}{dt} (M\gamma\vec{v}) = -Z\nabla\varphi + \frac{Z}{c} [\vec{v} \cdot \vec{H}] \quad (5)$$

с начальными условиями, заданными на поверхности эмиттера Γ_0

$$\vec{z}|_{\Gamma_0} = \vec{z}, \quad \vec{v}|_{\Gamma_0} = \vec{v}. \quad (6)$$

Здесь $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ - релятивистский фактор,

c - скорость света в вакууме, H - напряженность магнитного поля, $\vec{v}(\vec{z}) = \frac{d\vec{z}}{dt}$ - скорость частиц в точке с координатами \vec{z} . Время t в стационарной задаче является вспомогательным параметром, который, в принципе, можно исключить.

Для уравнения неразрывности необходимо еще задание начальных условий. Введем для этой цели вектор плотности тока рассмотрим два варианта начальных условий:

а) режим инжекции

$$\vec{j}|_{\Gamma_0} = \vec{j}_0(\vec{z}, \vec{v}) \quad (7)$$

при котором \vec{j}_0 - заданная функция, и

б) режим ограничения тока объемным зарядом пучка, при котором применим закон термоэмиссии Богуславского-Ленгмюра

$$\vec{j}|_{\Gamma_0} = 2.33 \cdot 10^{-6} \frac{\varphi^{3/2}}{d^2} \vec{n} \quad (8)$$

где потенциал φ определяется на некотором расстоянии d по нормали \vec{n} к поверхности Эмиттера Γ_0 . Система уравнений (1) - (8) полностью определяет решение самосогласованной задачи. Для решения краевой задачи (1) - (3) воспользуемся интегральным представлением потенциала

$$\varphi(\vec{z}) = \int_V \rho(\vec{z}_1) G(\vec{z}, \vec{z}_1) dV + \int_S \sigma(\vec{z}_2) G(\vec{z}, \vec{z}_2) dS \quad (9)$$

$\vec{z}_1 \in V, \vec{z}_2 \in S,$

где $\sigma(\vec{z}_2)$ - некоторая неизвестная функция - плотность поверхностных зарядов, - определенная на поверхности S , ограничивающей объем V системы. Ядро $G(\vec{z}_i, \vec{z}_j) = 1/4\pi\epsilon_0 R$, где R - расстояние между точками \vec{z}_i и \vec{z}_j . Производная от φ по некоторому направлению \vec{n} дается выражением

$$\frac{\partial\varphi(\vec{z})}{\partial n} = \int_V \rho(\vec{z}_1) \frac{\partial}{\partial n} G(\vec{z}, \vec{z}_1) dV + \int_S \sigma(\vec{z}_2) \frac{\partial}{\partial n} G(\vec{z}, \vec{z}_2) dS \quad (10)$$

В аксиально симметричном случае выражения (9) - (10) могут быть проинтегрированы в цилиндрической системе координат (z, z, θ) по угловой переменной θ . При этом формула (9), например, перейдет в

$$\varphi(z, z) = \int_{S_0} \rho(z_1, z_1) G(z, z; z_1, z_1) dS_0 + \int_{\ell_0} \sigma(z_2, z_2) G(z, z; z_2, z_2) d\ell_0, \quad (9')$$

где $G(z, z; z', z') = \frac{z' K(t)}{\sqrt{\epsilon_0} [(z+z')^2 + (z-z')^2]^{1/2}}, \quad (11)$

$$t^2 = \frac{4zz'}{(z+z')^2 + (z-z')^2} \quad (12)$$

S_0 - сечение объема V меридианной плоскостью, ограниченное контуром l_0 , а $K(t)$ - полный эллиптический интеграл I рода. Учет граничных условий (2) - (3) приводит к системе интегральных уравнений Фредгольма I и II рода [3] относительно неизвестной функции $\bar{\sigma}$.

3. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ

Граница области S представляется в виде отрезков прямых и дуг окружностей или эллипсов в параметрическом виде. Она может быть незамкнутой и неодносвязной. Параметрические уравнения в случае прямых имеют вид

$$\tau(\tau) = a(1-\tau) + c\tau, \quad (I3)$$

$$z(\tau) = b(1-\tau) + d\tau, \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

а в случае эллипсов (окружностей)

$$\tau(\tau) = a \sin \tau + b, \quad (I4)$$

$$z(\tau) = c \cos \tau + d, \quad \alpha \leq \tau \leq \beta$$

Интервал изменения параметра τ для каждой из кривых разбивается на равные интервалы, а точки разбиения служат узлами коллокации при дискретизации интегральных уравнений. Подинтегральная функция $\bar{\sigma}$ аппроксимируется кубическим сплайном, аналогично работе [4]

$$\bar{\sigma}(\tau) = M_{j-1} \frac{(\tau_j - \tau)^3}{6h_j} + M_j \frac{(\tau - \tau_{j-1})^3}{6h_j} + (\bar{\sigma}_{j-1} - M_{j-1} \frac{h_j^2}{6}) \frac{\tau_j - \tau}{h_j} + (\bar{\sigma}_j - M_j \frac{h_j^2}{6}) \frac{\tau - \tau_{j-1}}{h_j} \quad (I5)$$

где $\bar{\sigma}_j = \bar{\sigma}(\tau_j)$, $h_j = \tau_j - \tau_{j-1}$, $\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$, $j = 1, \dots, N$. Полученная после дискретизации система линейных уравнений решается методом исключения Гаусса с выбором главного элемента, а вычисление интегралов производится с помощью квадратурной формулы Гаусса.

Система уравнений движения в осесимметричном случае имеет вид

$$\gamma \ddot{z} = \gamma E_z (1 - \frac{\dot{z}^2}{c^2}) - \gamma \frac{\dot{z} \dot{\theta}}{c^2} E_z + \gamma z \dot{\theta} B_z + \gamma z \dot{\theta}^2 - \gamma \dot{z} B_0, \quad (I6)$$

$$\gamma \ddot{\theta} = -\gamma \frac{\dot{z} \dot{\theta}}{c^2} E_z + \gamma E_z (1 - \frac{\dot{z}^2}{c^2}) - \gamma z \dot{\theta} B_z + \gamma \dot{z} B_0,$$

$$\gamma \ddot{\theta} = -\gamma \frac{\dot{z} \dot{\theta}}{c^2} E_z - \gamma \frac{\dot{z} \dot{\theta}}{c^2} E_z + \gamma \frac{\dot{z} B_z - \dot{z} B_z}{z} - 2\gamma \frac{\dot{z} \dot{\theta}}{z},$$

где $\gamma = \frac{z}{M}$, $E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$, $E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$

Используя теорему Буша [5], можно проинтегрировать последнее из уравнений (I6)

$$\dot{\theta} = -\frac{z}{\gamma M} \frac{(\psi - \psi_0)}{2\pi z^2} \quad (I7)$$

где ψ - поток магнитной индукции через площадь круга радиуса z , а ψ_0 - его начальное значение в некоторой плоскости. Здесь точка означает дифференцирование по времени. Интегрирование уравнений движения, которые можно представить в векторном виде $Y' = F(Y)$, осуществляется методом Рунге-Кутты

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4] \quad (I8)$$

$K_1 = F(Y_i)$, $K_2 = F(Y_i + K_1/2)$, $K_3 = F(Y_i + K_2/2)$, $K_4 = F(Y_i + K_3)$ в котором шаг интегрирования h автоматически выбирается пропорциональным размером ячейки дискретизации объемного заряда. Процесс дискретизации состоит в следующем. Поверхность эмиттера разбивается на N трубок тока, а из центра каждой площадки выпускается траектория. Объемный заряд q , сосредоточенный в объеме ΔV , вычисляется по формуле $q = \sum J_i \Delta t_i$, где J_i - ток i -й трубки, прошедшей через объем ΔV за время Δt . Плотность объемного заряда $\rho = q/\Delta V$. Такой алгоритм допускает наличие различных типов частиц и возможность пересечения трубок тока.

Так как учет объемного заряда делает задачу расчета поля нелинейной, ее решение производится методом последовательных

приближений. При этом ток каждой трубки, участвующий в алгоритме расчета объемного заряда на i -й итерации, вычисляется по формуле

$$j^{(i)} = \omega \tilde{j}^{(i)} + (1-\omega)j^{(i-1)}, \quad 0 < \omega \leq 1, \quad (19)$$

где ω - заданный коэффициент релаксации объемного заряда, а $\tilde{j}^{(i)}$ - плотность тока, вычисленная по формулам (7) или (8). Расчет продолжается до получения достаточно малых отклонений в положении траекторий для двух последовательных приближений. После окончания итерационного процесса, в полученном самосогласованном поле производится расчет "ореола" пучка, для чего специальная подпрограмма с помощью датчика псевдослучайных чисел формирует начальные условия для траекторий с некоторым разбросом по энергиям и углам вылета частиц в заданном диапазоне. Необходимость расчета "ореола" становится очевидной, например, для электронных пушек с управляющей сеткой, на которой часть налетающего потока частиц рассеивается случайным образом. Параметры такого рассеяния определяются размерами и формой ячейки сетки, а также характеристиками налетающего потока частиц. Кроме того, подобный алгоритм, позволяет учитывать начальный тепловой разброс эмитируемых частиц.

Внешнее магнитное поле задается в виде дискретного набора значений составляющей магнитной индукции B_{z0} на оси системы. Значение магнитного поля в пространстве определяется по формулам [2]

$$\begin{aligned} B_r(r, z) &= -\frac{z}{2} B_0'(z), \\ B_z(r, z) &= B_0(z) - \frac{z^2}{4} B_0''(z), \\ \Psi(r, z) &= \pi r^2 \left[B_0(z) - \frac{z^2}{8} B_0''(z) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где $B_0(z)$ - кубический сплайн, интерполирующий функцию B_{z0} , заданную таблично. Производные B_0' и B_0'' определяются дифференцированием сплайна $B_0(z)$.

Составляющая B_0 собственного магнитного поля пучка определяется по формуле

$$B_0(r, z) = \frac{\mu_0}{z} \int_0^z j_z(z) z dz, \quad (21)$$

где μ_0 - абсолютная магнитная проницаемость для вакуума, j_z - продольная составляющая тока пучка. Такой алгоритм позволяет учитывать поворот траекторий и движение их в направлении, противоположном первоначальному. В случае поворота, компонента j_z тока пучка входит в формулу (21) с отрицательным знаком.

4. РЕШЕНИЕ МЕТОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Для иллюстрации эффективности разработанных численных алгоритмов рассмотрим решение ряда задач с известным аналитическим решением.

1. Рассчитывались самосогласованное поле и траектории в аксиально-симметричной пушке Пирса [6] с цилиндрическим пучком. Аналитическое значение для плотности тока j имеет вид

$$j = 2.33 \cdot 10^{-6} \frac{U_A^{3/2}}{d^2} \quad (22)$$

где U_A - потенциал анода, d - расстояние анод-катод. В расчете были выбраны следующие параметры: $U_A = 10$ кВ, $d = 8$ см, радиус катода $R = 1$ см. Аналитическое значение полного тока в данном случае $I = \pi j R^2 = 0.1143$ а. Результат численного решения после проведения 4 итераций по объемному заряду дал значение $I = 0.1120$ а. Траектории частиц были практически параллельными. Время решения задачи 10 минут.

2. Рассматривалась задача о расширении нерелятивистского электронного пучка в эквипотенциальном пространстве. Аналитическое выражение для граничной траектории пучка $z(z)$ приводится в работе [7]

$$z(z) = z_0 + z \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{e z^2 J_0}{m \cdot z_0 (v \gamma)^3} \quad (23)$$

где ζ_0 - начальный радиус пучка, α_0 - начальный угол наклона граничной траектории относительно оси Z , J_0 - ток пучка, e - заряд, v - скорость, а m_0 - масса электрона. Формула (23) выведена в предположении о том, что провисанием потенциала вдоль оси Z можно пренебречь. Для начальных данных: $J_0 = 1$ а, $\zeta_0 = 1$ см, $\alpha_0 = 0$, $Z = 20$ см, начальная энергия пучка $W = 10$ КэВ, - аналитическое решение (23) дает значение $\zeta = 1.744$ см, а численное $\zeta \approx 1.76$ см. относительная погрешность вычисления величины расширения пучка $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_0$ составляет 2,2%.

3. Рассматривалась аналогичная задача о расширении релятивистского электронного пучка. Исходные данные были выбраны следующими: $W_0 = 1500$ КэВ, $J_0 = 1200$ а, $\zeta_0 = 1$ см, $\alpha_0 = 0$, $Z = 21$ см. Аналитическое значение: $\zeta = 1,56$ см, а численное $\zeta = 1,58$ см. Относительная погрешность вычисления величины составляет 5,3% после проведения 3-х итераций. Следует отметить, что формула (23) является приближенной и для столь значительных токов провисанием потенциала вдоль оси Z , по-видимому, пренебрегать нельзя. Время решения данной задачи составляло около 13 минут.

4. Рассмотрим задачу о распространении релятивистского электронного пучка в эквипотенциальном пространстве с однородным магнитным полем $B_z = const$. Можно показать, что если угол наклона граничной траектории $\alpha_0 = 0$, то величину магнитного поля можно подобрать такой, что действия объемного заряда и магнитного поля будут взаимно скомпенсированы и пучок останется цилиндрическим. В численном расчете были выбраны следующие параметры: радиус пучка $\zeta = 1$ см, ток пучка $J = 2000$ А, начальная энергия $W = 1000$ КэВ. Если величину магнитного поля выразить в гауссах, оценочная формула для равновесного поля будет иметь вид

$$B_z = \frac{37}{\zeta} \left(\frac{Jc}{v\gamma} \right)^{1/2} \quad (24)$$

Для выбранных параметров эта величина составляет 1000 гс. При этом в расчете пучок оставался практически параллельным.

5. Для иллюстрации возможностей программы была рассмотрена задача более сложная, чем предыдущие, и не имеющая аналитического решения. Сравнение проводилось по результатам расчета этой же задачи с помощью достаточно широко известной компилирующей системы КСИ-БЭСМ [1], реализующей численные алгоритмы конечно-разностного метода решения краевых задач. Рассчитывалось движение электронного пучка в однородном электрическом поле напряженностью $E = 80$ кВ/см и внешнем магнитном поле с синусоидальным законом изменения магнитной индукции. Счетные параметры задачи были следующими: амплитуда магнитного поля $B_{max} = 500$ гс, ток пучка $J = 1000$ А, начальная энергия $W_0 = 50$ КэВ, начальный радиус пучка $\zeta = 2$ см, длина расчетной области $Z_{max} = 8$ см. После проведения 10 итераций по объемному заряду при моделировании пучка 16 трубками тока различие в результатах вычисления, с помощью двух указанных методов выходных координат траекторий частиц составило около 2%.

6. В качестве одного из результатов практической апробации изложенной в данной работе методики приведем некоторые результаты расчетов электронно-оптического тракта ускорителя ЭЛИТ-3А, схематически изображенного на рис.1. В области длиной $L = 100$ см для фокусировки пучка установлены две линзы на постоянных магнитах. Были проведены расчеты ряда вариантов оптики системы для параметров, изменяющихся в следующих диапазонах: ток пучка $J = 50+130$ А, полное ускоряющее напряжение $U = 1200+2000$ кВ, максимальная амплитуда магнитного поля $B_{max} = 400+800$ гс. Эксперименты, проведенные на ЭЛИТ-3А группой сотрудников под руководством С.Б. Вассермана для параметров пучка: $J = 50$ А, $U = 1400$ кВ и результаты расчетов для этих же параметров по токоосаждению в ускорительном нанале, а также по формуле пучка на выходе из ускорителя практически совпадают.

Л и т е р а т у р а

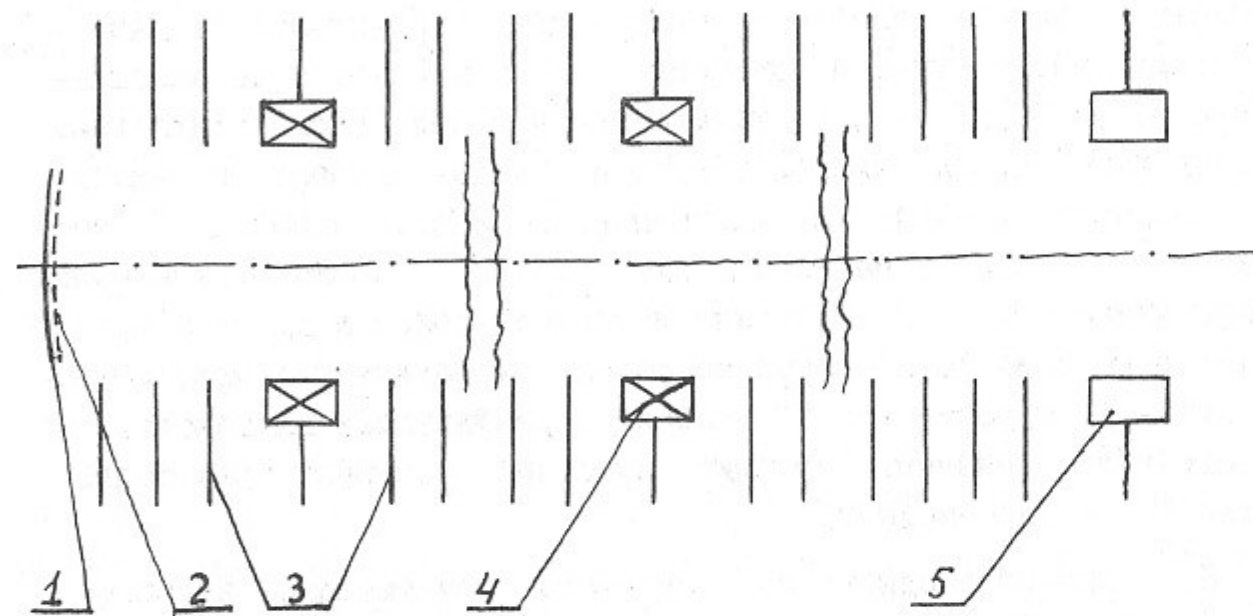


Рис.1. Схема оптики ЭЛИТ-3А 1-катод; 2-сетка; 3-электроды;
4-линзы постоянных магнитов; 5-электромагнитная линза
В заключении авторы искренне благодарят В.Е.Балакина за
весьма ценные обсуждения и замечания.

1. В.П.Ильин "Численные методы решения задач электрооптики" Изд. "Наука" 1974.
2. С.И.Молоковский, А.Д.Сушков "Интенсивные электронные и ионные пучки". Изд. "Энергия" 1972.
3. В.Я.Иванов, В.П.Ильин Решение смешанных краевых задач для уравнения Лапласа методом интегральных уравнений. - Сб. Типовые программы решения задач математической физики, Новосибирск, Изд. ВЦ СО АН СССР, 1975, с 5-35.
4. Дж.Альберг, Э.Нильсон, Дж.Уолш "Теория сплайнов и ее приложения" Изд. "Мир" Москва, 1972.
5. И.В.Алямовский "Электронные пучки и электронные пушки" Изд. "Советское радио" Москва, 1966.
6. Дж.Р.Пирс "Теория и расчет электронных пучков" Изд. "Советское радио" Москва 1956.
7. И.Н.Мешков, В.В.Чириков, ЖТФ, 35, 12 (1965).

Работа поступила - 14 ноября 1977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 21.XI-1977 г. МН 03076
Усл. 0,8 печ.л., 0,6 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № II4.

Отпечатано на ротационте ИЯФ СО АН СССР