И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 111

В.Ф.Дмитриев

К ТЕОРИИ СМЕСИ БОЗЕ - ФЕРМИ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Новосибирск
1977

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

ПРЕПРИНТ

В.Ф.Дмитриев

К ТЕОРИИ СМЕСИ БОЗЕ-ФЕРМИ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе найдены точные выражения для массовых операторов и функций Грина бозевских частиц в длинноволновой области при $T=0$ в смеси He^3-He^4. Показано, что спектр возбуждений совпадает с полученным на основе уравнений гидродинамики сверхтекучей жидкости с примесями He^3. Вычислены корреляционные функции плотность-плотность. Отмечено, что правило сумм Томаса-Райхе-Куна не насыщается найденными гидродинамическими модами.

К ТЕОРИИ СМЕСИ БОЗЕ-ФЕРМИ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

I. Введение

Смеси He^3 и He^4 при низких температурах дают уникальную возможность изучения свойств квантовых бозе-ферми жидкостей. Не удивительно, поэтому, что их исследованию посвящено много экспериментальных и теоретических работ, обзор которых можно найти, например, в монографии [1].

Свойства квантовых жидкостей при низких температурах определяются спектром элементарных возбуждений. Фермиевская ветвь спектра в смеси имеет обычный вид $\varepsilon \approx v_F(p-p_F)$ вблизи поверхности ферми. Бозевские ветви спектра в области малых импульсов имеют звуковые решения. Вопрос о характере длинноволновых возбуждений исследовался в работах [2], [3] на основе уравнений сверхтекучей гидродинамики, описывающей поведение всей жидкости в целом и кинетического уравнения для фермиевских квазичастиц. Было выяснено, что при $T = 0$ в системе могут существовать при определенных константах взаимодействия две звуковых ветви, отвечающие нулевому и первому звукам. При $T \neq 0$ также существуют две ветви отвечающие первому и второму звукам, причем второй звук в этом случае проявляется, в основном, как колебания относительной концентрации $He^3 - He^4$. Вывод уравнений движения был сделан в работе [4].

В данной работе мы покажем, как результаты, следующие из гидродинамики, могут быть получены на микроскопическом уровне, с использованием техники гриновских функций введенной для бозе-систем в работе [5]. При нулевой температуре массовые операторы бозевских частиц в чистой бозе-жидкости можно разложить по степеням ω и $\vec{k}$ до второго порядка, просуммировав в этой области все члены теории возмущений [6]. В смеси $He^3 - He^4$ бозевские массовые операторы имеют особенность, обусловленную вкладом фермионных петель. Эту особенность можно выделить явно, а оставшуюся неособую часть массовых операторов можно разложить по ω и $\vec{k}$ так же, как и в чистой бозе-жидкости. Коэффициенты разложения простым образом выражаются через термодинамические производные и полученное дисперсионное уравнение в результате совпадает с аналогичным уравнением, найденным на основе уравнений сверхтекучей гидродинамики.

Разложение массовых операторов по степеням ω и $\vec{k}$ было получено в [6] путем анализа ряда теории возмущений. Существует более простой способ действий, использующий тождества Уорда. Предположение о наличии в системе бозе-конденсата означает, что основное состояние спонтанно нарушает калибровочную симметрию. В этом случае, кроме обычных тождеств Уорда, связывающих массовые операторы с вершиной, описывающей рассеяние квазичастиц друг на друге, можно получить дополнительные тождества, связывающие массовые операторы с вершинами описывающими испускание и поглощение надконденсатных частиц. Из этих тождеств непосредственно следует утверждение об отсутствии щели в спектре квазичастиц, в согласии с теоремой Голдстоуна. Кроме того, они позволяют найти первые коэффициенты разложения массовых операторов по степеням ω и $\vec{k}$ без громоздкого анализа ряда теории возмущений. Такое разложение дает только действительную часть спектра. Эффекты затухания возникают в более высоких порядках по ω и $\vec{k}$ и поэтому в нашем приближении отсутствуют.

В п.2 вводятся определения функций Грина бозевских и фермиевских частиц и находятся выражения для скачка в распределении фермиевских частиц по импульсам на поверхности ферми и для эффективной массы квазичастиц. В пп. 3 и 4 получены массовые операторы и функции Грима бозевских частиц при $T = 0$ и найдены скорости звуков. В п.5 получены массовые операторы и скорости звуков при $T \neq 0$ в гидродинамической области. В п.6 вычисляются корреляционные функции плотность-плотность и обсуждаются правила сумм. Показано, что правила сумм для сжимаемостей выполняются точно, а правило сумм Томаса-Райхе-Куна выполняется только для корреляционной функции $-i\langle T(\rho(\vec{r},t)\rho(\vec{r}',t))\rangle$ - содержащей полную плотность $\rho(\vec{r},t) = \rho_3(\vec{r},t) + \rho_4(\vec{r},t)$.

2. Функции Грина

Гамильтониан системы взаимодействующих бозе и ферми частиц имеет вид:

$$\hat{H} = \int d^3r \left[\psi_\sigma^+(\vec{r}) \frac{\hat{p}^2}{2m_3} \psi_\sigma(\vec{r}) + \varphi^+(\vec{r}) \frac{\hat{p}^2}{2m_4} \varphi(\vec{r}) \right] + \frac{1}{2} \int d^3r\, d^3r' \left[U_{33}(\vec{r}-\vec{r}')\psi_\sigma^+(\vec{r})\psi_{\sigma'}^+(\vec{r}')\psi_{\sigma'}(\vec{r}')\psi_\sigma(\vec{r}) \right.$$
$$\left. + U_{44}(\vec{r}-\vec{r}')\varphi^+(\vec{r})\varphi^+(\vec{r}')\varphi(\vec{r}')\varphi(\vec{r}) \right] + \int d^3r\, d^3r'\, U_{34}(\vec{r}-\vec{r}')\psi_\sigma^+(\vec{r})\psi_\sigma(\vec{r})\varphi^+(\vec{r}')\varphi(\vec{r}'), \qquad (I)$$

где $\psi_\sigma^+(\vec{r})$ - оператор рождения фермиевской частицы с проекцией спина σ , $\varphi^+(\vec{r})$ - оператор рождения бозевской частицы. $U(\vec{r}-\vec{r}')$ - двухчастичное взаимодействие, которое можно принять одинаковым для всех трех типов взаимодействия.

Мы будем предполагать, что в системе имеется бозе-конденсат, т.е.

$$\langle \varphi(\vec{r}) \rangle = \sqrt{n_0} \neq 0.$$

Число надконденсатных частиц не сохраняется, поэтому удобно вообще не следить за сохранением числа частиц и перейти от гамильтониана $\hat{H}$ к

$$\hat{H}' = \hat{H} - \mu_3 \hat{N}_3 - \mu_4 \hat{N}_4', \qquad (2)$$

где N_4' - число надконденсатных бозе-частиц. В этом случае, число частиц в конденсате будет определяться условием,

$$\frac{\partial E'}{\partial n_0} = \mu_4, \qquad (3)$$

E' - энергия основного состояния H'.

Для бозевских операторов надконденсатных частиц удобно пользоваться обозначениями, введенными в [6].

$$\varphi^\alpha(\vec{r}) = \begin{cases} \varphi'^+(\vec{r}) & \alpha = + \\ \varphi'(\vec{r}) & \alpha = - \end{cases}$$

Функция Грина надконденсатных частиц определяется как

$$G_\alpha^\beta(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = -i\langle T\left(\psi^\alpha(\vec{r},t)\left(\psi^\beta(\vec{r}',t')\right)^+\right)\rangle.$$

$G_\alpha^\beta(q)$, $q = (\omega, \vec{q})$, имеет очевидные свойства:

$$G_\alpha^\beta(q) = G_\beta^\alpha(q) = G_{-\alpha}^{-\beta}(-q), \tag{4}$$

и обычным образом связана с массовыми опраторами

$$G_\alpha^{-1\,\beta}(q) = G_\alpha^{0-1\,\beta}(q) - \Sigma_\alpha^\beta(q) \tag{5}$$

Явное выражение G -функций через массовые операторы имеет вид [5],

$$G_-^-(q) = G_+^+(-q) = \frac{\omega - \mu_4 + \frac{\vec{q}^2}{2m_4} + \Sigma_+^+(q)}{D};$$

$$G_-^+(q) = G_+^-(q) = -\frac{\Sigma_-^+(q)}{D}; \tag{6}$$

$$D = \left(\omega - \frac{\Sigma_-^-(q) - \Sigma_+^+(q)}{2}\right)^2 - \left(\mu_4 - \frac{\vec{q}^2}{2m_4} - \frac{\Sigma_-^-(q) + \Sigma_+^+(q)}{2} + \Sigma_-^+(q)\right)\left(\mu_4 - \frac{\vec{q}^2}{2m_4} - \frac{\Sigma_-^-(q) + \Sigma_+^+(q)}{2} - \Sigma_-^+(q)\right).$$

Фермиевская функция Грина имеет обычный вид

$$G(P) = \frac{1}{\omega + \mu_3 - \frac{P^2}{2m_3} - \Sigma(P)}. \tag{7}$$

Вблизи поверхности ферми ее можно представить в виде суммы полюсного и регулярного слагаемых

$$G(P) = \frac{a}{\omega - v_F\cdot(P-P_F) + i\delta\cdot\mathrm{sign}(P-P_F)} + G^{Reg}, \tag{8}$$

$v_F = \frac{P_F}{m_3^*}$, m_3^* - эффективная масса фермиевских, квазичастиц.

Рассмотрим теперь двухчастичную функцию Грина $G^{II}_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}(x_1x_2x_3x_4) = -\langle T\left(\psi_{\sigma_1}(x_1)\psi^+_{\sigma_2}(x_2)\psi_{\sigma_3}(x_3)\psi^+_{\sigma_4}(x_4)\right)\rangle$. В нашем случае эта функция кроме обычной вершинной части Γ будет иметь полюсное слагаемое, которое удобно выделить явно. Графически различные

вклады в G^{II} -функцию можно изобразить следующим образом (рис.I).

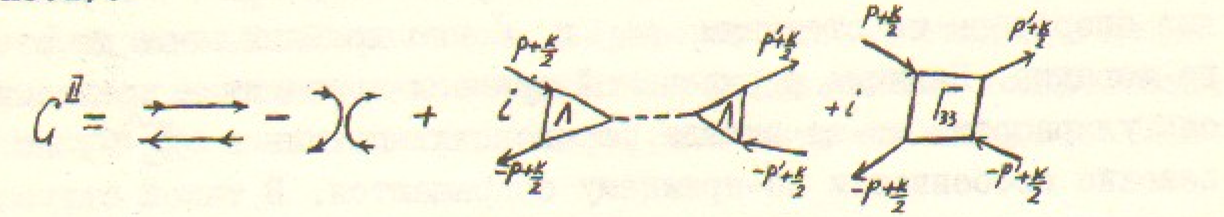


Рис.I.

Аналогичную структуру имеет и бозевская двухчастичная G -функция (рис.2)

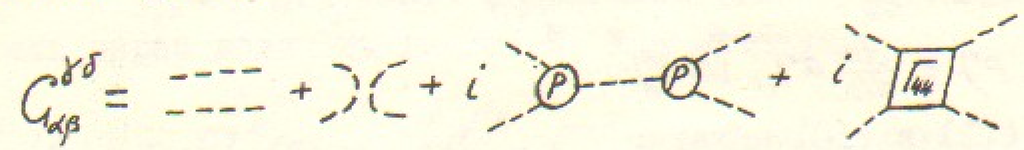


Рис.2.

Вершины $\Lambda^\alpha(P,K)$ и $P^\alpha_{\gamma\delta}(P,K)$ описывают испускание надконденсатных бозонов соответственно фермионами и бозонами.

Полюсная часть фермиевской G -функции (8) содержит два параметра, a -скачок в распределении частиц на поверхности ферми и m_3^* -эффективную массу квазичастиц. Параметр a выражается через вершину Γ_{33} обычным образом. Из тождества Уорда (п.5) и (8) имеем:

$$\frac{1}{a} = \frac{\partial G^{-1}}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 1 + \frac{1}{2}Sp_\sigma\int\frac{d^4P'}{(2\pi)^4 i}\left\{G(P')G(P')\right\}^\omega \Gamma_{33}^\omega(P',P). \tag{9}$$

Символ $\{\ \}^\omega$ означает ω-предел сингулярного произведения фермиевских G -функций. Соотношение же для эффективной массы несколько изменяется. Из (п.4) и (8) находим

$$\frac{\vec{P}}{m_3^* a} = -\frac{\partial G^{-1}}{\partial \vec{P}}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\vec{P}}{m_3} + \frac{1}{2}Sp_\sigma\int\frac{d^4P'}{(2\pi)^4 i}\frac{\vec{P}'}{m_3}\left\{G(P')G(P')\right\}^k \Gamma_{33}^k(P',P) \tag{10}$$

Для дальнейшего необходимо выразить Γ_{33}^k через Γ_{33}^ω . Чтобы получить эту связь, заметим, что в отличие от фермиевских петель, сингулярности возникающие от бозевских петель не дают вклада в комбинации массовых операторов, входящих в знаменатель D бозевских G-функций [6]. По этой причине, в случае чистой бозе-жидкости, можно разложить при $T=0$ массовые операторы по степеням ω и $\vec{k}$ по крайней мере до второго порядка. Наличие фермиевской примеси приводит к появлению сингулярности, из-за вклада фермиевских петель в $\Sigma_\alpha^\beta(k)$, но бозевские особенности по-прежнему сокращаются. В такой ситуации можно произвести перенормировку фермиевских вкладов точно так же, как и в чистой ферми жидкости, т.е. выразить все величины через Γ_{33}^ω, которая содержит вклады как регулярных частей фермиевских петель, так и бозевских петель. Связь между Γ_{33}^k и Γ_{33}^ω остается такой же, как для ферми-жидкости.

$$\Gamma_{33}^k(p',p) = \Gamma_{33}^\omega(p',p) - \int \frac{d\Omega''}{4\pi} F(p',p'')\,\Gamma_{33}^k(p'',p) \qquad \text{(II)}$$

где $F(p,p'') = \frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\, a^2 \Gamma_{33}^\omega(p,p'')$ *)

Подставив (II) в (I0) находим,

$$\frac{\vec{p}}{m_3^* a} = \frac{\vec{p}}{m_3} - \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \frac{\vec{p}'}{m_3^* a} F(p',p) + \frac{1}{2} Sp_\sigma \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4 i} \frac{\vec{p}'}{m_3} \left\{ G^2(p') \right\}^\omega \Gamma_{33}^\omega(p',p)$$

Далее, используя (п.II) получаем

$$\frac{\vec{p}}{m_3^*} + \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \frac{\vec{p}'}{m_3^*} F(\vec{p}',\vec{p}) - \frac{\vec{p}}{m_3} = a \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}\, \vec{q}\, G_-^\alpha(q) G_+^\beta(-q)\, \Gamma_{43\,\alpha\beta}^\omega(q,p)$$

Введем обозначение

$$-a \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}\, \vec{q}\, G_-^\alpha(q) G_+^\beta(-q)\, \Gamma_{43\,\alpha\beta}^\omega(q,p) = \vec{p}\,\frac{\delta m_3}{m_3^*} \qquad \text{(I2)}$$

Тогда

$$m_3^* = m_3(1 + F_1/3) + \delta m_3 \qquad \text{(I3)}$$

где F_1 – первая гармоника разложения $F(\vec{p},\vec{p}')$ по полиномам Лежандра. Таким образом, из (I3) следует, что определенная в (I2) δm_3 есть добавка к эффективной массе квазичастиц, обязанная взаимодействию с бозонами.

---

*) отметим, что эта функция несколько отличается от соответствующих функций в [3]. Отличие связано с тем, что в нашем случае $F(\vec{p},\vec{p}')$ вычисляется при постоянных μ_3, μ_4, n_0.

3. Массовые операторы

Для нахождения массовых операторов бозе-частиц при малых ω и $\vec{k}$ воспользуемся выведенными в Приложении тождествами. Складывая два тождества (п.4) для различных значений α имеем,

$$\frac{\Sigma_-^\gamma(k) - \Sigma_+^\gamma(k)}{2} = \frac{1}{2\sqrt{n_0}} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4 i} \left(\omega - \frac{\vec{k}\vec{q}}{m_4}\right) G_-^\gamma\!\left(q+\tfrac{k}{2}\right) G_+^\delta\!\left(-q+\tfrac{k}{2}\right) \left(P_{\gamma\delta}^+(q,k) + P_{\gamma\delta}^-(q,k) \right). \qquad \text{(I4)}$$

Поскольку произведение $G_-^\gamma G_+^\delta$ не является сингулярным, мы можем положить в нем $k=0$. Все сингулярности содержатся в $\Pi_{\gamma\delta}(q,k) = P_{\gamma\delta}^+(q,k) + P_{\gamma\delta}^-(q,k)$. Уравнение для $\Pi_{\gamma\delta}(q,k)$ удобно написать через величины взятые в k-пределе.

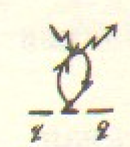
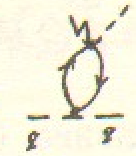
$$\Pi_{\gamma\delta}(q,k) = \Pi_{\gamma\delta}^k(q) + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4 i} \Gamma_{43\gamma\delta}^k(q,p)\, G_{1p}\!\left(p+\tfrac{k}{2}\right) G_{1p}\!\left(p-\tfrac{k}{2}\right) B(p,k), \qquad \text{(I5)}$$

где $B(p,k) = \Lambda^+(p,k) + \Lambda^-(p,k)$, $G_{1p}(p) = \dfrac{a}{\varepsilon - v_F\cdot(p-p_F) + i\delta\cdot \mathrm{sign}(p-p_F)}$

Сравним теперь графики для $\Pi_{\gamma\delta}^k(q)$ с графиками для $\Sigma_\gamma^{-\delta}(q)$. В каждом порядке по $\sqrt{n_0}$ все графики для $P_{\gamma\delta}$ и $P_{\gamma\delta}^-$ получаются из графиков соответствующего порядка по $\sqrt{n_0}$ для $\Sigma_\gamma^{-\delta}$ заменой одной выходящей или входящей конденсатной линии на линию надконденсатной частицы с нулевым импульсом и частотой. Перебирая все возможные способы выбора внешней линии получим [6],

$$\Pi_{\gamma\delta}^k(q) = 2\sqrt{n_0}\,\frac{\partial \Sigma_\gamma^{-\delta}(q)}{\partial n_0}.$$

Необходимость выбора k – предела вытекает из того факта, что однородный конденсат является пределом стационарного слабонеоднородного внешнего поля. Это можно увидеть и в теории возмущений, сравнивая графики для $\Sigma_\gamma^\delta(q)$ и $P_{\gamma\delta}^-(q,0)$ рис.3.

$\Sigma_\gamma^\delta(q) \sim$  , $P_{\gamma\delta}^-(q,0) \sim$ 

а) б)

Рис.3.

График на рис.3а отличен от нуля только если фермионная петля берется в K - пределе.

Подставляя (I5) в (I4) и используя (I2), (п.7) и связь между Γ_{43}^{k} и Γ_{43}^{ω} находим после несложных преобразований, что при малых ω

$$\frac{\Sigma_-^-(K) - \Sigma_+^+(K)}{2} \simeq -\omega\frac{\partial n_4'}{\partial n_0} + \int\frac{d\Omega}{4\pi}\left(-\omega\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4} + \frac{\vec{K}\cdot\vec{P}_F}{m_4}\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\frac{\delta m_3}{m_3^2(1+F_1/3)}\right)\frac{\omega}{\omega - K\cdot v_F}B(P,K), \quad (I6)$$

где n_4' - плотность надконденсатных частиц, $\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4} = -\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\alpha\frac{\partial\Sigma(P_F)}{\partial\mu_4}$. В чистой бозе-жидкости остается, естественно, только первый член.

Уравнение для $B(P,K)$ также удобно написать через величины, взятые в K - пределе.

$$B(P,K) = B^k(P) + \int\frac{d\Omega'}{4\pi}F^k(P,P')\frac{\omega}{\omega - K\cdot v_F}B(P',K) \quad (I7)$$

Сравнивая графики для $B^k(P)$ и для $\Sigma(P)$ находим, что

$$B^k(P) = 2\sqrt{n_0}\,\frac{\partial\Sigma(P)}{\partial n_0}$$

В случае, когда во взаимодействии $F(P,P')$ есть только нулевая и первая гармоники, $B(P,K)$ имеет вид: $B(P,K) = B_0 + B_1\cdot X$, $X = \cos(\hat{P\cdot K})$

Для B_0 и B_1 получаем из (I7) следующие решения:

$$B_0(P,K) = 2\sqrt{n_0}\,\frac{\partial\Sigma(P)}{\partial n_0}(1+F_0)\frac{1 + F_1/3 - F_1 Z^2 Q_1(Z)}{1 + F_1/3 - F_0 Q_1(Z) - F_1 Z^2 Q_1(Z) - F_0 F_1/3\, Q_1(Z)} \quad (I8a)$$

$$B_1(P,K) = 2\sqrt{n_0}\,\frac{\partial\Sigma(P)}{\partial n_0}(1+F_0)\frac{F_1 Z Q_1(Z)}{1 + F_1/3 - F_0 Q_1(Z) - F_1 Z^2 Q_1(Z) - F_0 F_1/3\, Q_1(Z)}, \quad (I8б)$$

где $Z = \frac{\omega}{k v_F}$, $Q_0(Z)$, $Q_1(Z)$ - функции Лежандра второго рода.

Подставляя решение (I8) в (I6) и учитывая, что $\alpha\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\frac{\partial\Sigma(P_F)}{\partial n_0} = -\frac{\partial n_3}{\partial n_0}$ и $(1+F_0)\frac{\partial n_3}{\partial\mu_3} = \frac{dn_3}{d\varepsilon_F}$, находим

$$\frac{\Sigma_-^-(K) - \Sigma_+^+(K)}{2} = -\omega\frac{\partial n_0'}{\partial n_0} + \frac{\partial n_3}{\partial n_0}\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_3}\right)^{-1}\frac{\omega\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}\left[(1+F_1/3)ZQ_0(Z) - F_1 Z^2 Q_1(Z)\right] - k v_F\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\frac{\delta m_3}{m_4}Z^2 Q_1(Z)}{1 + F_1/3 - F_0 Q_1(Z) - F_1 Z^2 Q_1(Z) - F_0 F_1/3\, Q_1(Z)}. \quad (I9)$$

Из этого выражения мы видим, что в бозевских массовых операторах появляется полюс формально отвечающий нулевому звуку в чистой ферми-жидкости. Функция Грина в этом случае имеет два полюса, соответствующие нулевому и первому звукам. Эти полюса могут находиться далеко от полюсов (I9) из-за взаимодействия между ветвями, поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться точным выражением (I9), справедливым во всей интересующей нас области Z.

Для получения второго слагаемого в знаменателе D бозевской G - функции снова воспользуемся тождествами (п.4) и вычтем их друг из друга при различных знаках α.

$$\mu_4 - \frac{\Sigma_-^-(K) + \Sigma_+^+(K)}{2} + \Sigma_-^+(K) = \frac{1}{2\sqrt{n_0}}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}\left(\omega - \frac{\vec{K}\cdot\vec{q}}{m_4}\right)G_-^{\gamma}\left(q+\frac{K}{2}\right)G_+^{\delta}\left(-q+\frac{K}{2}\right)\left(P_{\gamma\delta}^+(P,K) - P_{\gamma\delta}^-(P,K)\right).$$

Подставив сюда разность $P_{\gamma\delta}^+(P,K) - P_{\gamma\delta}^-(P,K)$ из (п.6) получаем после несложных преобразований

$$\mu_4 - \frac{\Sigma_-^-(K) + \Sigma_+^+(K)}{2} + \Sigma_-^+(K) = -\frac{n_4' K^2}{2n_0 m_4} + \frac{1}{2n_0}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}\Big[\left(\omega - \frac{\vec{K}\cdot\vec{q}}{m_4}\right)^2 G_-^-\left(q+\frac{K}{2}\right)G_+^+\left(-q+\frac{K}{2}\right) + \left(\omega^2 - \frac{(\vec{K}\cdot\vec{q})^2}{m_4^2}\right)\cdot$$

$$\cdot G_-^+\left(q+\frac{K}{2}\right)G_+^-\left(-q+\frac{K}{2}\right) - \int\frac{d^4q'}{(2\pi)^4 i}\left(\omega - \frac{\vec{K}\cdot\vec{q}'}{m_4}\right)G_-^{\gamma}\left(q'+\frac{K}{2}\right)G_+^{\delta}\left(-q'+\frac{K}{2}\right)\Gamma_{44\,\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q',q,K)\,G_\alpha^-\left(q+\frac{K}{2}\right)G_\beta^+\left(-q+\frac{K}{2}\right)\left(\omega - \frac{\vec{K}\cdot\vec{q}}{m_4}\right)\Big]$$

Выделяя в Γ_{44} сингулярную часть и используя (п.3) получим в низшем по ω и $\vec{K}$ порядке.

$$\mu_4 - \frac{\Sigma_-^-(K) + \Sigma_+^+(K)}{2} + \Sigma_-^+(K) = -\frac{n_4' K^2}{2n_0 m_4} + \frac{\omega^2}{2n_0}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}\Big[G_-^{\alpha}(q)G_\alpha^-(q) - \int\frac{d^4q'}{(2\pi)^4 i}G_-^{\gamma}(q')G_+^{\delta}(-q')\Gamma_{44\,\gamma\delta}^{\omega\,\alpha\beta}(q',q)\cdot$$

$$\cdot G_\alpha^-(q)G_\beta^+(-q)\Big] + \frac{K_\ell K_j}{2n_0 m_4^2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}\Big[-\alpha G_-^{\alpha}(q)G_\alpha^-(q)q_\ell q_j - \int\frac{d^4q'}{(2\pi)^4 i}q_\ell' G_-^{\gamma}(q')G_+^{\delta}(-q')\Gamma_{44\,\gamma\delta}^{\omega\,\alpha\beta}(q',q)G_\alpha^-(q)G_\beta^+(-q)q_j\Big] -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{n_0}}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}\frac{d^4p}{(2\pi)^4 i}\left(\omega - \frac{\vec{K}\cdot\vec{q}}{m_4}\right)G_-^{\gamma}(q)G_+^{\delta}(-q)\Gamma_{43\,\gamma\delta}^{\omega}(q,P)\,G_P\left(P+\frac{K}{2}\right)G_P\left(P-\frac{K}{2}\right)\left(\Lambda^-(P,K) - \Lambda^+(P,K)\right).$$

Выразив в коэффициенте при ω^2 величину Γ_{44}^{ω} через Γ_{44}^{κ} и воспользовавшись затем (п.8) и (п.7) приводим этот коэффициент к виду:

$$\frac{\omega^2}{2n_0}\left[\frac{\partial n_4'}{\partial\mu_4}-\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}\right)^2\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_3}\right)^{-1}\right]$$

Член с $K_\ell K_j$ с помощью (п.IO) преобразуется следующим образом

$$-\frac{K_\ell K_j}{2n_0 m_4^2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}\left[q_\ell q_j\frac{\partial C_-^{-}(q)}{\partial q_0}+\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4 i}p_\ell\left\{C^2(p)\right\}^{\omega}\Gamma_{34}^{\omega\alpha\beta}(p,q)\,C_\alpha^-(q)C_\beta^+(-q)q_j\right].$$

Интеграл от первого члена по q_0 дает ноль. Для вычисления второго члена будем исходить из равенства:

$$\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4 i}p_\ell\left\{C^2(p)\right\}^{\kappa}\Gamma_{34}^{\kappa\alpha\beta}(p,q)=0.$$

Используя (IO) находим

$$\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4 i}p_\ell\left\{C^2(p)\right\}^{\kappa}\Gamma_{34}^{\kappa\alpha\beta}(p,q)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4 i}p_\ell\left\{C^2(p)\right\}^{\kappa}\left[\Gamma_{34}^{\omega\alpha\beta}(p,q)-\int\frac{d\Omega'}{4\pi}a^2\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\Gamma_{33}^{\kappa}(p,p')\Gamma_{34}^{\omega\alpha\beta}(p',q)\right]=$$

$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4 i}p_\ell\left\{C^2(p)\right\}^{\kappa}\Gamma_{34}^{\omega\alpha\beta}(p,q)+\int\frac{d\Omega'}{4\pi}a^2\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}p_\ell'\Gamma_{34}^{\omega\alpha\beta}(p',q)-\frac{m_3}{m_3^* a}\int\frac{d\Omega'}{4\pi}a^2\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}p_\ell'\Gamma_{34}^{\omega\alpha\beta}(p',q)=$$

$$=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4 i}p_\ell\left\{C^2(p)\right\}^{\omega}\Gamma_{34}^{\omega\alpha\beta}(p,q)-\frac{m_3}{m_3^*}a\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\int\frac{d\Omega'}{4\pi}p_\ell'\Gamma_{34}^{\omega\alpha\beta}(p',q)=0.$$

Таким образом,

$$-\frac{K_\ell K_j}{2n_0 m_4^2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4 i}\frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}p_\ell\left\{C^2(p)\right\}^{\omega}\Gamma_{34}^{\omega\alpha\beta}(p,q)C_\alpha^-(q)C_\beta^+(-q)q_j=-\frac{K_\ell K_j}{2n_0 m_4^2}\frac{m_3}{m_3^*}\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}a\int\frac{d\Omega'}{4\pi}\frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}p_\ell'\Gamma_{34}^{\omega\alpha\beta}(p',q)\cdot$$

$$\cdot C_\alpha^-(q)C_\beta^+(-q)q_j=\frac{K_\ell K_j}{2n_0 m_4^2}\frac{m_3}{m_3^*}\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\frac{\delta m_3}{m_3^*}\int\frac{d\Omega}{4\pi}p_\ell p_j=\frac{K^2}{2n_0 m_4^2}\frac{m_3}{m_3^*}\frac{\delta m_3}{m_3^*}\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\frac{p_F^2}{3}=\frac{K^2}{2n_0 m_4^2}\frac{\delta m_3}{m_3^*}m_3 n_3.$$

Используя затем (п.7) и (I2) приводим (20) к следующему виду

$$\mu_4-\frac{\Sigma_-^{-}(k)+\Sigma_+^{+}(k)}{2}+\Sigma_-^{+}(k)=\frac{\omega^2}{2n_0}\left[\frac{\partial n_4'}{\partial\mu_4}-\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}\right)^2\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_3}\right)^{-1}\right]-\frac{K^2}{2n_0 m_4}n_4'\left(1-\frac{m_3 n_3}{m_4 n_4}\frac{\delta m_3}{m_3^*}\right)-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{n_0}}\int\frac{d\Omega}{4\pi}\left(-\omega\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}(1+F_0)+\vec{K}\cdot\vec{v}_F\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\frac{\delta m_3}{m_4}\right)\frac{\vec{K}\cdot\vec{v}_F}{\omega-\vec{K}\cdot\vec{v}_F}aA(p,K), \qquad (21)$$

где $A(p,K)=\Lambda^-(p,K)-\Lambda^+(p,K).$

Уравнение на $A(p,K)$ можно получить из (п.3), выделением из Γ_{43} сингулярной части. Используя опять (п.7) и (I2) находим:

$$A(p,K)=\frac{\omega}{\sqrt{n_0}}\frac{\partial\Sigma(\mu)}{\partial\mu_4}(1+F_0)+\frac{\vec{K}\cdot\vec{v}_F}{\sqrt{n_0}}\frac{\delta m_3}{m_4}+\int\frac{d\Omega'}{4\pi}F(p,p')\frac{\vec{K}\cdot\vec{v}_F}{\omega-\vec{K}\cdot\vec{v}_F}A(p,K). \qquad (22)$$

Оставляя в $F(p,p')$ нулевую и первую гармоники, для гармоник $A(p,K)$ получаем такие решения

$$A_0(p,K)=\frac{1}{\sqrt{n_0}}\cdot\frac{\omega\frac{\partial\Sigma(\mu)}{\partial\mu_4}(1+F_0)\left(1+F_1/3-F_1z^2Q_1(z)\right)+K v_F\frac{\delta m_3}{m_4}F_0 zQ_1(z)}{1+F_1/3-F_0Q_1(z)-F_1z^2Q_1(z)-F_0F_1/3\,Q_1(z)};$$

$$A_1(p,K)=\frac{1}{\sqrt{n_0}}\cdot\frac{\omega\frac{\partial\Sigma(\mu)}{\partial\mu_4}(1+F_0)F_1 zQ_1(z)+K v_F\frac{\delta m_3}{m_4}\left(1-F_0Q_1(z)\right)}{1+F_1/3-F_0Q_1(z)-F_1z^2Q_1(z)-F_0F_1/3\,Q_1(z)}. \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (2I) находим, наконец

$$\mu_4-\frac{K^2}{2m_4}-\frac{\Sigma_-^{-}(k)+\Sigma_+^{+}(k)}{2}+\Sigma_-^{+}(k)\approx\frac{\omega^2}{2n_0}\left[\frac{\partial n_4}{\partial\mu_4}-\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}\right)^2\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_3}\right)^{-1}\right]-\frac{K^2}{2n_0 m_4}n_4\left(1-\frac{m_3 n_3}{m_4 n_4}\frac{\delta m_3}{m_3^*}\right)-$$

$$-\frac{1}{2n_0}\frac{\omega^2\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}\right)^2\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_3}\right)^{-1}(1+F_0)(1+F_1/3)Q_1(z)-2\omega Kv_F\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}\frac{\delta m_3}{m_4}(1+F_0)zQ_1(z)-K^2v_F^2\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\frac{\delta m_3^2}{m_4^2}\left[\frac{1}{3}(1-F_0Q_1(z))-z^2Q_1(z)\right]}{1+F_1/3-F_0Q_1(z)-F_1z^2Q_1(z)-F_0F_1/3\,Q_1(z)} \qquad (24)$$

Последний сомножитель в D удовлетворяет следующему уравнению

$$\mu_4-\frac{K^2}{2m_4}-\frac{\Sigma_-^{-}(k)+\Sigma_+^{+}(k)}{2}-\Sigma_-^{+}(k)\approx-2n_0\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}-2\sqrt{n_0}\,a\frac{\partial\Sigma(\mu)}{\partial n_0}\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\int\frac{d\Omega}{4\pi}\frac{\omega}{\omega-\vec{K}\vec{v}_F}aB(p,K) \qquad (25)$$

где мы воспользовались тем, что $\Sigma_-^{+}(0)=n_0\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}$.

Подставляя сюда $B(p,K)$ из (I8 а, б), получаем:

$$\mu_4-\frac{K^2}{2m_4}-\frac{\Sigma_-^{-}(k)+\Sigma_+^{+}(k)}{2}-\Sigma_-^{+}(k)\approx-2n_0\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}-2n_0\left(\frac{\partial n_3}{\partial n_0}\right)^2\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_3}\right)^{-1}\frac{(1+F_1/3)zQ_1(z)-z^2Q_1(z)F_1}{1+F_1/3-F_0Q_1(z)-F_1z^2Q_1(z)-F_0F_1/3\,Q_1(z)} \qquad (26)$$

4. Скорости звуков при $T = 0$.

Для нахождения скоростей звуков мы должны решить уравнение

$$D(\omega, k) = 0.$$

Подставляя в D выражения для массовых операторов (I9), (24) и (26) получим, после приведения некоторого количества подобных, следующее уравнение

$$\omega^2\Big\{\Delta\cdot\Big[(1+F_1/3)\,zQ_0(z)-F_1 z^2Q_1(z)\Big]-\Big[\Big(\frac{\partial n_4}{\partial n_0}\Big)^2+\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}\frac{\partial n_4}{\partial \mu_4}\Big](1+F_0)(1+F_1/3)\,Q_1(z)\Big\}-$$

$$-2\omega k v_F\frac{\delta m_3}{m_4}(1+F_0)\,zQ_1(z)\Big[\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_0}\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\frac{\partial n_4}{\partial n_0}-\frac{\partial n_3}{\partial \mu_3}\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}\Big]+k^2v_F^2\frac{\delta m_3^2}{m_4^2}\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\Big[\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}(1+F_0)\Big(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_0}\Big)^2\cdot$$

$$\cdot\Big(\frac{zQ_0(z)}{3}-z^2Q_1(z)\Big)+\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}\Big(1/3-z^2Q_1(z)-\frac{F_0Q_1(z)}{3}\Big)\Big]-\frac{k^2n_4^*}{m_4}\Big\{\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}\Big[(1+F_1/3)\,zQ_0(z)-F_1z^2Q_1(z)- \tag{27}$$

$$-(1+F_0)(1+F_1/3)\,Q_1(z)\Big]+\Big(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_0}\Big)^2\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}(1+F_0)\Big[(1+F_1/3)\,zQ_0(z)-F_1z^2Q_1(z)\Big]\Big\}=0.$$

Здесь $\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_0} = a\,\frac{\partial \Sigma(p_F)}{\partial n_0}$ – производная от энергии фермиевских частиц на поверхности ферми,

$$\Delta=\Big(\frac{\partial n_4}{\partial n_0}\Big)^2+\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}\cdot\frac{\partial n_4}{\partial \mu_4}-\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}\Big(\frac{\partial n_3}{\partial \mu_4}\Big)^2\Big(\frac{\partial n_3}{\partial \mu_3}\Big)^{-1}+2\frac{\partial n_4}{\partial n_0}\frac{\partial n_3}{\partial \mu_4}\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_0}(1+F_0)+\frac{\partial n_4}{\partial \mu_4}\Big(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_0}\Big)^2\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}(1+F_0),$$

$n_4^* = n_4 - \frac{m_3}{m_4}n_3\frac{\delta m_3}{m_3^*}$. Последнее выражение описывает частичное уменьшение плотности He^4 участвующего в звуковом движении из-за того, что часть жидкости ушла на образование эффективной массы δm_3 квазичастиц He^3.

В уравнении (27) все частные производные берутся по n_0, μ_3 и μ_4 при двух из них постоянных. Удобно в дальнейшем перейти к обычным переменным n_3 и n_4, а переменную n_0 исключить совсем воспользовавшись условием (3). Для этого напишем полное изменение плотностей n_3 и n_4, как функций n_0, μ_3 и μ_4.

$$dn_3=\frac{\partial n_3}{\partial n_0}dn_0+\frac{\partial n_3}{\partial \mu_3}d\mu_3+\frac{\partial n_3}{\partial \mu_4}d\mu_4;$$

$$dn_4=\frac{\partial n_4}{\partial n_0}dn_0+\frac{\partial n_4}{\partial \mu_3}d\mu_3+\frac{\partial n_4}{\partial \mu_4}d\mu_4;$$

и из (3)

$$d\mu_4=\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}dn_0+\frac{\partial^2E'}{\partial n_0\partial \mu_3}d\mu_3+\frac{\partial^2E'}{\partial n_0\partial \mu_4}d\mu_4;$$

или, поскольку $\frac{\partial^2E'}{\partial n_0\partial \mu_3}=-\frac{\partial n_3}{\partial n_0}$ и $\frac{\partial^2E'}{\partial n_0\partial \mu_4}=-\frac{\partial n_4}{\partial n_0}$,

$$\frac{\partial n_4}{\partial n_0}d\mu_4=\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}dn_0-\frac{\partial n_3}{\partial n_0}dn_0.$$

Исключая из этих равенств dn_0 и пользуясь тем, что $\frac{\partial n_3}{\partial n_0}=-\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_0}$ и $\frac{\partial n_3}{\partial \mu_3}(1+F_0)=\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}=\frac{m_3^*p_F}{\pi^2}$, находим

$$\Big(\frac{\partial \mu_4}{\partial n_4}\Big)_{n_3}=\frac{\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}+\Big(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_0}\Big)^2\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}(1+F_0)}{\Delta};\quad \Big(\frac{\partial \mu_3}{\partial n_3}\Big)_{n_4}=\Big(\frac{\partial n_3}{\partial \mu_3}\Big)^{-1}\cdot\frac{\Big(\frac{\partial n_4}{\partial n_0}\Big)^2+\frac{\partial n_4}{\partial \mu_4}\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}}{\Delta};$$

$$\Big(\frac{\partial \mu_3}{\partial n_4}\Big)_{n_3}=\Big(\frac{\partial \mu_4}{\partial n_3}\Big)_{n_4}=\frac{\frac{\partial n_4}{\partial n_0}\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_0}(1+F_0)-\frac{\partial n_3}{\partial \mu_4}\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}\Big(\frac{\partial n_3}{\partial \mu_3}\Big)^{-1}}{\Delta}; \tag{28}$$

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}=\frac{1}{1+F_0}\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\Big[\frac{\partial \mu_3}{\partial n_3}\frac{\partial \mu_4}{\partial n_4}-\Big(\frac{\partial \mu_3}{\partial n_4}\Big)^2\Big].$$

Деля уравнение (27) на Δ и на $k^2v_F^2$ получаем:

$$z^2\Big[(1+F_1/3)\,zQ_0(z)-F_1z^2Q_1(z)-\frac{\partial \mu_3}{\partial n_3}\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}(1+F_1/3)\,Q_1(z)\Big]-2\frac{\delta m_3}{m_4}z^2Q_1(z)\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\frac{\partial \mu_3}{\partial n_4}+$$

$$+\frac{\delta m_3^2}{m_4^2}\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\Big\{\frac{\partial \mu_4}{\partial n_4}\Big(\frac{zQ_0(z)}{3}-z^2Q_1(z)\Big)-\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\frac{Q_1(z)}{3}\Big[\frac{\partial \mu_4}{\partial n_4}\frac{\partial \mu_3}{\partial n_3}-\Big(\frac{\partial \mu_3}{\partial n_4}\Big)^2\Big]\Big\}-$$

$$-\frac{n_4^*}{m_4v_F^2}\Big\{\frac{\partial \mu_4}{\partial n_4}\cdot\Big[(1+F_1/3)\,zQ_0(z)-F_1z^2Q_1(z)\Big]-\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}(1+F_1/3)\,Q_1(z)\cdot\Big[\frac{\partial \mu_3}{\partial n_3}\frac{\partial \mu_4}{\partial n_4}-\Big(\frac{\partial \mu_3}{\partial n_4}\Big)^2\Big]\Big\}=0.$$

Для дальнейшего сравнения с результатами [3] введем обозначения.

Определим новую константу F_0' следующим соотношением:

$$\frac{\partial \mu_3}{\partial n_3}\frac{dn_3}{d\varepsilon_F} = 1 + F_0'$$

кроме того, введем скорость звука $S_1^2 = \frac{n_4}{m_4}\frac{\partial \mu_4}{\partial n_4}$ и $\alpha_1 = \frac{n_4}{m_3^* S_1^2}\left(\frac{\partial \mu_3}{\partial n_4}\right)$.

В этих обозначениях уравнение (29) приводится к виду:

$$z^2\left[1 + F_1/3 - \tilde{F}_0(1+F_1/3)Q_1(z) - F_1 z^2 Q_1(z)\right] - \frac{3m_3^* n_3}{m_4 n_4}\frac{S_1^2}{v_F^2}\alpha_1^2 (1 + F_1/3) z^2 Q_1(z) - 2\frac{\delta m_3}{m_4}\cdot$$

$$\cdot\frac{3n_3}{n_4}\alpha_1 z^2 Q_1(z) + \frac{\delta m_3^2}{m_3^* m_4}\frac{3n_3}{n_4}\frac{S_1^2}{v_F^2}\left[1/3 - z^2 Q_1(z) - \frac{\tilde{F}_0}{3}Q_1(z)\right] - \frac{S_1^2}{v_F^2}\left(1 - \frac{m_3 \delta m_3}{m_4 m_3^*}\frac{n_3}{n_4}\right)\cdot \tag{30}$$

$$\cdot\left[1 + F_1/3 - \tilde{F}_0(1+F_1/3)Q_1(z) - F_1 z^2 Q_1(z)\right] = 0.$$

где $\tilde{F}_0 = F_0' - \frac{3m_3^* n_3}{m_4 n_4}\frac{S_1^2}{v_F^2}\alpha_1^2$.

Если теперь перейти от переменной n_4 к переменной $\rho = m_3 n_3 + m_4 n_4$, то окончательное уравнение принимает вид:

$$\left(z^2 - \frac{S^2}{v_F^2}\right)\left[(1+F_1/3)(1-\tilde{F}_0 Q_1(z)) - F_1 z^2 Q_1(z)\right] - \frac{3m_3^* n_3}{\rho}\frac{S^2}{v_F^2}\left[\alpha^2(1+F_1/3)z^2 Q_1(z) + \right. \tag{31}$$

$$\left. + 2\alpha z^2 Q_1(z) - \frac{1}{3}(1 - \tilde{F}_0 Q_1(z)) + z^2 Q_1(z)\right] = 0$$

где $S^2 = \frac{\rho}{m_4 n_4}S_1^2$, $\alpha = \alpha_1 - \frac{m_3}{m_3^*}$.

Уравнение (31) полностью совпадает с уравнением, полученным Халатниковым [3] для случая нулевого звука. В пределе малых концентраций He^3 оно переходит в уравнение

$$1 - \left(\tilde{F}_0 + \frac{\tilde{F}_1 z^2}{1 + F_1/3}\right)Q_1(z) = 0,$$

где $\tilde{F}_1 = F_1 - \frac{m_3^* n_3}{\rho}(\alpha + 1)$.

5. Гидродинамический предел

Рассмотрим теперь случай ненулевых температур, но столь низких, что вкладом бозевских возбуждений в термодинамические величины можно пренебречь. Формально это приближение соответствует пренебрежению особым вкладом бозевских петель в массовые операторы, так же, как и при $T = 0$. Мы будем рассматривать гидродинамическую область, т.е. такие ω и K, что $\omega\tau \ll 1$, где τ – время между столкновениями квазичастиц. Эта область исчезает при $T \to 0$, однако скорости первого и второго звуков имеют при $T = 0$ вполне определенные значения. Именно эти значения мы и будем находить, считая при этом выполненными условия гидродинамического приближения $\omega\tau \ll 1$. Этому условию всегда можно удовлетворить выбирая достаточно малые ω.

При ненулевой температуре мы должны уже пользоваться температурными гриновскими функциями. Для них соотношения (п.1 – п.6) практически не изменяются, мы должны лишь заменить $\int\frac{d\omega}{2\pi i} \to T\sum_{\omega_n}$, где $\omega_n = 2\pi n T$, и считать частоту, стоящую в функциях грина чисто мнимой $i\omega_n$. Однако, поскольку мы интересуемся пределом $T \to 0$, то мы можем перейти от суммирования к интегрированию, $T\sum_{\omega_n} \to \int\frac{d\omega}{2\pi}$. В этом случае все общие формулы остаются прежними по форме и нужно лишь помнить что у всех частот $Re\,\omega = 0$ и интегрирование идет по мнимой оси. Перенормировка фермиевских вкладов в этом случае проводится так же, как и при $T = 0$.

Для нечетной части массового оператора $\Sigma_-(K)$ находим:

$$\frac{\Sigma_-(K) - \Sigma_+(K)}{2} \simeq -\omega\frac{\partial n_4'}{\partial n_0} + \int\frac{d\Omega}{4\pi}\left(-\omega\frac{\partial n_3}{\partial \mu_4} + \vec{K}\cdot\vec{v}_F\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\frac{\delta m_3}{m_3^*(1+F_1/3)}\right)\frac{\omega}{\omega - \vec{K}\cdot\vec{v}_F}\,aB(P,K) \tag{32}$$

Это выражение совпадает по форме с (16), за исключением того, что в (32) ω мнимые. Величина $\varphi(P,K) = \frac{\omega}{\omega - \vec{K}\cdot\vec{v}_F}aB(P,K)$ представляет собой изменение функции распределения фермиевских квазичастиц при испускании или поглощении надконденсатного бозона. В гидродинамическом пределе в откликах функции распределения отличны от нуля только нулевая и первая гармоники разложения их по полиномам Лежандра $P_l(\cos(\vec{p}\vec{k}))$, связанные с сохранением полного числа фермиевских квазичастиц и их полного импульса[ж]. Уравнение для $\varphi(\vec{p},\vec{k})$ получается непосредственно из (I7)

$$(\omega-\vec{k}\vec{v}_F)\varphi(\vec{p},\vec{k}) = 2\omega\sqrt{n_0}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_0} + \omega\int\frac{d\Omega'}{4\pi}F^{k}(\vec{p},\vec{p}')\varphi(\vec{p}',\vec{k}), \qquad (33)$$

где $\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial n_0} = a\dfrac{\partial\Sigma(p_F)}{\partial n_0}$. Оставляя в этом уравнении нулевую и первую гармоники $\varphi(\vec{p},\vec{k})$ находим для них следующие решения:

$$\varphi_0(p,k) = 2\sqrt{n_0}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_0}(1+F_0)\frac{\omega^2}{\omega^2 - c_3^2K^2}\;; \qquad (34)$$

$$\varphi_1(p,k) = 2\sqrt{n_0}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_0}(1+F_0)\frac{\omega K v_F(1+F_1/3)}{\omega^2 - c_3^2\cdot K^2}\;;$$

где $c_3^2 = \dfrac{v_F^2}{3}(1+F_0)(1+F_1/3)$.

Подставляя (34) в (32) находим в этом приближении

$$\frac{\Sigma_-(k) - \Sigma_+^{+}(k)}{2} = -\omega\frac{\partial n_4'}{\partial n_0} - \omega\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_0}(1+F_0)\frac{\omega^2\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4} - K^2\frac{n_3}{m_4}\frac{\delta m_3}{m_3^2}}{\omega^2 - c_3^2K^2} \qquad (35)$$

Общее выражение для второго сомножителя в D также совпадает с общим выражением (2I) при $T = 0$

$$\mu_4 - \frac{\Sigma_-(k) + \Sigma_+^{+}(k)}{2} + \Sigma_-^{+}(k) = \frac{\omega^2}{2n_0}\left[\frac{\partial n_4}{\partial\mu_4} - \left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}\right)^2\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_3}\right)^{-1}\right] - \frac{K^2n_4'}{2n_0m_4}\left(1-\frac{m_3n_3}{m_4n_4}\frac{\delta m_3}{m_3^2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{n_0}}\int\frac{d\Omega}{4\pi}\left(-\omega\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}(1+F_0) + \vec{k}\cdot\vec{v}_F\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\frac{\delta m_3}{m_4}\right)\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}_F}{\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}_F}\,aA(p,k)$$

Уравнение для отклика $g(p,k) = \dfrac{\vec{k}\cdot\vec{v}_F}{\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}_F}\,aA(p,k)$ получается из (22)

$$(\omega-\vec{k}\cdot\vec{v}_F)g(p,k) = -\frac{\omega\,\vec{k}\vec{v}_F}{\sqrt{n_0}}\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_3}\right)^{-1} + \frac{(\vec{k}\cdot\vec{v}_F)^2}{\sqrt{n_0}}\frac{\delta m_3}{m_4} + \vec{k}\vec{v}_F\int\frac{d\Omega'}{4\pi}F(p,p')g(p',k) \qquad (36)$$

ж) Следует отметить, что второе справедливо лишь при достаточно низких температурах, когда можно пренебречь столкновениями с бозевскими квазичастицами. Этим ограничивается область применимости результатов работы [3].

Оставляя в этом уравнении нулевую и первую гармоники, находим для них

$$g_0(p,k) = \frac{\omega K^2}{\sqrt{n_0}}\;\frac{-c_3^2\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}\left(\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\right)^{-1} + \frac{v_F^2}{3}\frac{\delta m_3}{m_4}}{\omega^2 - c_3^2K^2}\;;$$

$$g_1(p,k) = \frac{Kv_F}{\sqrt{n_0}}\cdot\frac{-\omega^2\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_3}\right)^{-1} + \frac{K^2v_F^2}{3}(1+F_0)\frac{\delta m_3}{m_4}}{\omega^2 - c_3^2K^2}. \qquad (37)$$

Используя эти выражения находим для массовых операторов:

$$\mu_4 - \frac{K^2}{2m_4} - \frac{\Sigma_-(k) + \Sigma_+^{+}(k)}{2} + \Sigma_-^{+}(k) = \frac{\omega^2}{2n_0}\left[\frac{\partial n_4}{\partial\mu_4} - \left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}\right)^2\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_3}\right)^{-1}\right] - \frac{K^2n_4}{2n_0m_4}\left(1-\frac{\rho_3}{\rho_4}\frac{\delta m_3}{m_3^2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2n_0}\cdot\frac{\omega^2c_3^2K^2\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}\right)^2\left(\frac{\partial n_3}{\partial\mu_3}\right)^{-1} - 2\omega^2\frac{K^2v_F^2}{3}(1+F_0)\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}\frac{\delta m_3}{m_4} + \frac{K^4v_F^4}{9}(1+F_0)\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\frac{\delta m_3^2}{m_4^2}}{\omega^2 - c_3^2K^2}. \qquad (38)$$

Наконец, подставляя в (25) выражение для отклика $\varphi(\vec{p},\vec{k})$ (34) получаем последний сомножитель

$$\mu_4 - \frac{K^2}{2m_4} - \frac{\Sigma_-(k) + \Sigma_+^{+}(k)}{2} - \Sigma_-^{+}(k) = -2n_0\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2} - 2n_0\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_0}\right)^2(1+F_0)\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\,\frac{\omega^2}{\omega^2 - c_3^2\cdot K^2}. \qquad (39)$$

Для скоростей первого и второго звуков получаем дисперсионное уравнение:

$$\omega^4\Delta - \omega^2K^2\Big\{\frac{n_4}{m_4}\left(1-\frac{\rho_3}{\rho_4}\frac{\delta m_3}{m_3^2}\right)\left[\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2} + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_0}\right)^2\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}(1+F_0)\right] + c_3^2\left[\left(\frac{\partial n_4}{\partial n_0}\right)^2 + \frac{\partial n_4}{\partial\mu_4}\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}\right] +$$

$$+2\frac{\partial n_4}{\partial n_0}\frac{\partial\varepsilon}{\partial n_0}(1+F_0)\frac{n_3\,\delta m_3}{m_4\,m_3^2} - \frac{2}{3}v_F^2(1+F_0)\frac{\partial n_3}{\partial\mu_4}\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2}\frac{\delta m_3}{m_4}\Big\} + K^4\Big[c_3^2\frac{n_4}{m_4}\cdot \qquad (40)$$

$$\cdot\left(1-\frac{\rho_3}{\rho_4}\frac{\delta m_3}{m_3^2}\right) - \frac{v_F^2}{3}(1+F_0)\frac{n_3}{m_3^2}\frac{\delta m_3^2}{m_4}\Big]\frac{\partial^2E'}{\partial n_0^2} = 0.$$

Разделив на Δ и перейдя к производным по n_3 и n_4 получаем:

$$\omega^4 - \omega^2K^2\left[\frac{n_4}{m_4}\left(1-\frac{\rho_3}{\rho_4}\frac{\delta m_3}{m_3^2}\right)\frac{\partial\mu_4}{\partial n_4} + \frac{v_F^2}{3}(1+F_1/3)\frac{\partial\mu_3}{\partial n_3}\frac{dn_3}{d\varepsilon_F} + 2\frac{n_3}{m_3^2}\frac{\delta m_3}{m_4}\frac{\partial\mu_3}{\partial n_4}\right] +$$

$$+K^4\frac{dn_3}{d\varepsilon_F}\left[\frac{v_F^2}{3}(1+F_1/3)\frac{n_4}{m_4}\left(1-\frac{\rho_3}{\rho_4}\frac{\delta m_3}{m_3^2}\right) - \frac{v_F^2}{3}\frac{n_3}{m_3^2}\frac{\delta m_3^2}{m_4}\right]\cdot\left[\frac{\partial\mu_3}{\partial n_3}\frac{\partial\mu_4}{\partial n_4} - \left(\frac{\partial\mu_4}{\partial n_3}\right)^2\right] = 0.$$

Вводя $U = \frac{\omega}{K v_F}$ и определенные ранее постоянные $\tilde{F}_0$, S^2 и α , приводим это уравнение к виду

$$U^4 - U^2 \left\{ \frac{S^2}{v_F^2}\left[1 + \frac{n_3 m_3^*}{\rho(1+F_1/3)}\left(\left(\alpha(1+F_1/3)+1\right)^2 - 1\right) + \frac{1}{3}(1+\tilde{F}_0)(1+F_1/3)\right\} + \tag{41}$$

$$+ \frac{1}{3}(1+\tilde{F}_0)(1+F_1/3)\frac{S^2}{v_F^2}\left[1 - \frac{m_3^* n_3}{\rho(1+F_1/3)}\right] = 0.$$

также совпадающему с полученным в [3] .

6. Правила сумм.

Вычислим теперь в наших приближениях корреляционные функции плотность-плотность,

$$F_{ik}(\omega,\vec{k}) = -i\int_{-\infty}^{\infty} \langle T(\rho_i(\vec{x},t), \rho_k(\vec{x},t'))\rangle e^{i\omega(t-t')}\, d(t-t'),$$

где $i \text{ и } k = \begin{cases} 3 & \text{для } He^3 \\ 4 & \text{для } He^4 \end{cases}$

$\rho_i(\vec{k},t)$ - фурье-компонента оператора массовой плотности.
Эти функции представляют интерес по той причине, что их асимптотики при больших и малых ω имеют простой вид и связаны с существованием точных правил сумм, выполнение которых было бы желательно в любых теориях. Эти асимптотики имеют вид: для больших ω

$$F_{ik}(\omega,\vec{k}) \longrightarrow \delta_{ik}\frac{\rho_i \vec{k}^2}{\omega^2}, \qquad \rho_i \text{ - массовая плотность} \tag{42}$$

и связано с правилом сумм Томаса-Райхе-Куна

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} Im F_{ik}(\omega,\vec{k})\,\omega\, d\omega = \delta_{ik}\frac{\rho_i \vec{k}^2}{2}.$$

Асимптотика при малых ω и $\vec{k}$ имеет вид:

$$\lim_{\vec{k}\to 0} F_{ik}(0,\vec{k}) = -m_i\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \mu_k}\right)_{\mu_i}$$

и связано с правилом сумм для сжимаемости

$$\lim_{\vec{k}\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} Im F_{ik}(\omega,\vec{k})\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{m_i}{2}\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \mu_k}\right)_{\mu_i}.$$

Наиболее просто вычислить эти функции в гидродинамическом пределе. В функцию $F_{33}(\omega,\vec{k})$ дают вклад следующие графики

$F_{33} =$ 

Первые два графика можно объединить, введя вершину $Q(p,k) = \cdot +$  , тогда

$F_{33} =$ 

Подставляя в это выражение найденные в п.5 функции Грина G и вершины находим

$$F_{33}(\omega,\vec{k}) = \rho_3\cdot\left(1 - \frac{\delta m_3}{m_3^*}\right)\frac{\omega^2\vec{k}^2}{(\omega^2 - U_1^2\vec{k}^2)(\omega^2 - U_2^2\vec{k}^2)} - \frac{\vec{k}^4}{(\omega^2 - U_1^2\vec{k}^2)(\omega^2 - U_2^2\vec{k}^2)}\left(\frac{\partial \mu_4}{\partial n_4}\right)_{n_3}\cdot \tag{44}$$

$$\cdot\frac{n_3}{m_3^*}\frac{n_4(1+F_1/3)}{m_4}\cdot\left[1 - \frac{n_3\,\delta m_3}{\rho_4(1+F_1/3)}\right];$$

где U_1^2 и U_2^2 - корни дисперсионного уравнения (41).

Аналогично вычисляются и другие $F_{ik}(\omega,\vec{k})$. В результате , F_{34} и F_{44} равны:

$$F_{34}(\omega,\vec{k}) = \rho_3\cdot\frac{\delta m_3}{m_3^*}\cdot\frac{\omega^2\vec{k}^2}{(\omega^2 - U_1^2\vec{k}^2)(\omega^2 - U_2^2\vec{k}^2)} + \frac{\vec{k}^4}{(\omega^2 - U_1^2\vec{k}^2)(\omega^2 - U_2^2\vec{k}^2)}\left(\frac{\partial \mu_3}{\partial n_4}\right)_{n_3}\cdot \tag{45}$$

$$\cdot\frac{n_3}{m_3^*}\frac{n_4(1+F_1/3)}{m_4}\cdot\left[1 - \frac{n_3\,\delta m_3}{\rho_4(1+F_1/3)}\right];$$

и

$$F_{44}(\omega,\vec{k}) = \rho_4\left(1 - \frac{\rho_3\,\delta m_3}{\rho_4\, m_3^*}\right)\frac{\omega^2 k^2}{(\omega^2 - U_1^2 k^2)(\omega^2 - U_2^2 k^2)} - \frac{\vec{k}^4}{(\omega^2 - U_1^2\vec{k}^2)(\omega^2 - U_2^2\vec{k}^2)}\left(\frac{\partial \mu_3}{\partial n_3}\right)_{n_4}\cdot \tag{46}$$

$$\cdot\frac{n_3}{m_3^*}\frac{n_4(1+F_1/3)}{m_4}\left[1 - \frac{n_3\,\delta m_3}{\rho_4(1+F_1/3)}\right].$$

Эти функции также совпадают с вычисленными из макроскопических уравнений Халатникова [3] . Пользуясь этими выражениями, и дисперсионным уравнением (41) легко проверить, что асимптотика полученных $F_{ik}(\omega,\vec{k})$ при $\omega = 0$ является правильной т.е.

удовлетворяет условию (43). Что же касается больших ω, то видно, что

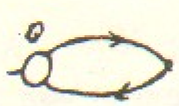
$$F_{33}(\omega,\vec{k}) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \frac{\rho_3 \vec{k}^2}{\omega^2}\left(1-\frac{\delta m_3}{m_3^*}\right);$$

$$F_{34}(\omega,\vec{k}) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \frac{\rho_3 K^2}{\omega^2}\frac{\delta m_3}{m_3^*}$$

$$F_{44}(\omega,\vec{k}) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \frac{\rho_4 \vec{k}^2}{\omega^2}\left(1-\frac{\rho_3}{\rho_4}\frac{\delta m_3}{m_3^*}\right);$$

Таким образом, правило сумм Томаса-Райхе-Куна нарушается на величину присоединенной массы, обязанной взаимодействию примесных частиц He^3 с He^4. Однако, если мы рассмотрим корреляционную функцию связанную с полной плотностью $\rho = \rho_3 + \rho_4$, то $F_{\rho\rho}(\omega,\vec{k})$ будет иметь обе правильные асимптотики. Это означает, что нарушение правила сумм связано с неучетом некоторой моды описывающей относительное движение жидкостей. Легко понять, что в гидродинамике смеси отсутствие этой моды заложено с самого начала предположением о том, что примесные частицы движутся со скоростью нормальной компоненты. Состояние, в котором фермиевская и бозевская нормальные компоненты имеют различные скорости, является слишком неравновесным и релаксирует за время порядка времени между столкновениями. Такие состояния по определению не рассматриваются в гидродинамике, поскольку характерные гидродинамические частоты должны удовлетворять неравенству $\omega\tau \ll 1$, где τ – время между столкновениями.

Посмотрим теперь какова ситуация при $T = 0$. Асимптотика функции $F_{33}(\omega,\vec{k})$ при больших ω определяется графиком такого типа



Графики типа  дают степень убывания $\sim \frac{1}{\omega^4}$.

Легко увидеть, что и в этом случае асимптотика $F_{33}(\omega,\vec{k})$ имеет вид

$$F_{33}(\omega,\vec{k}) \longrightarrow \frac{\rho_3 \vec{k}^2}{\omega^2}\frac{m_3}{m_3^*}(1+F_1/3).$$

Если воспользоваться соотношением $1-\frac{m_3}{m_3^*}(1+F_1/3) = \frac{\delta m_3}{m_3^*}$, то и в этом случае правило сумм будет нарушено. Однако, использование этой формулы при больших ω представляется физически неправильным, поскольку при больших ω движение примесных частиц становятся независимым. При частотах $\omega > m_4 s^2$ облако фононов, создающее массу δm_3 не успевает следовать за частицей и поэтому δm_3 должна стремиться к нулю. В наших уравнениях, полученных при малых ω этот эффект не учитывается, поэтому трудно ожидать выполнения правила сумм, в которое основной вклад доют большие ω.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить С.Т.Беляева, В.Г.Зелевинского и В.В.Соколова за обсуждения.

Приложение

Тождества Уорда для смеси бозе-ферми жидкостей

Наиболее просто тождества Уорда можно вывести используя сохранение тока. Пусть $j_\mu^{(3)}(\vec{r},t)$ и $j_\mu^{(4)}(\vec{r},t)$ – четырехвекторы тока фермиевских и бозевских частиц, удовлетворяющих уравнению непрерывности,

$$\frac{\partial j_0^{(3,4)}(\vec{r},t)}{\partial t}+\frac{\partial j_n^{(3,4)}(\vec{r},t)}{\partial r_n}=0;$$

$$j_0^{(3)}(\vec{r},t)=\psi_\sigma^+(\vec{r},t)\psi_\sigma(\vec{r},t);$$

$$j_n^{(3)}(\vec{r},t)=\frac{1}{2m_3 i}\left(\psi_\sigma^+(\vec{r},t)\frac{\partial\psi_\sigma(\vec{r},t)}{\partial r_n}-\frac{\partial\psi_\sigma^+(\vec{r},t)}{\partial r_n}\cdot\psi_\sigma(\vec{r},t)\right)$$

$$j_0^{(4)}(\vec{r},t)=\varphi^+(\vec{r},t)\varphi(\vec{r},t)+\sqrt{n_0}\left(\varphi(\vec{r},t)+\varphi^+(\vec{r},t)\right);$$

$$j_n^{(4)}(\vec{r},t)=\frac{1}{2m_4 i}\left(\varphi^+(\vec{r},t)\frac{\partial\varphi(\vec{r},t)}{\partial r_n}-\frac{\partial\varphi^+(\vec{r},t)}{\partial r_n}\cdot\varphi(\vec{r},t)\right)+\frac{\sqrt{n_0}}{2m_4 i}\left(\frac{\partial\varphi(\vec{r},t)}{\partial r_n}-\frac{\partial\varphi^+(\vec{r},t)}{\partial r_n}\right);$$

Рассмотрим средние

$$\left\langle T\left(j_\mu^{(3,4)}(\vec{r},t)\left(\varphi^\alpha(\vec{r}',t')\right)^+\right)\right\rangle,\ \left\langle T\left(j_\mu^{(3,4)}(\vec{r},t)\left(\varphi^\alpha(\vec{r}',t')\right)^+\left(\varphi^\beta(\vec{r}'',t'')\right)^+\right)\right\rangle,$$

$$\left\langle T\left(j_\mu^{(3,4)}(\vec{r},t)\,\psi_\sigma^+(\vec{r}',t')\,\psi_{\sigma'}(\vec{r}'',t'')\right)\right\rangle$$

Взяв от этих средних дивергенцию с учетом дифференцирования T-произведения, и выделив в полученных равенствах вершины, находим в импульсном представлении следующую серию тождеств

$$Sp_\sigma\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4 i}\left(\omega-\frac{\vec{k}\cdot\vec{p}}{m_3}\right)G\left(p+\frac{k}{2}\right)G\left(p-\frac{k}{2}\right)\Lambda^\alpha(p,k)=0; \qquad (\text{п.1})$$

$$Sp_\sigma\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4 i}\left(\omega-\frac{\vec{k}\cdot\vec{p}}{m_3}\right)G\left(p+\frac{k}{2}\right)G\left(p-\frac{k}{2}\right)\Gamma_{34}^{\alpha\beta}(p,q,k)=0; \qquad (\text{п.2})$$

$$\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}\left(\omega-\frac{\vec{k}\cdot\vec{q}}{m_4}\right)G_-^\alpha\left(q+\frac{k}{2}\right)G_+^\beta\left(-q+\frac{k}{2}\right)\Gamma_{43\alpha\beta}(q,p,k)=\sqrt{n_0}\left(\Lambda_-(p,k)-\Lambda_+(p,k)\right); \qquad (\text{п.3})$$

$$\sqrt{n_0}\left(\alpha\mu_4+\Sigma_-^\alpha(k)-\Sigma_+^\alpha(k)\right)=\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}\left(\omega-\frac{\vec{k}\cdot\vec{q}}{m_4}\right)G_-^\gamma\left(q+\frac{k}{2}\right)G_+^\delta\left(-q+\frac{k}{2}\right)P_{\gamma\delta}^\alpha(q,k); \qquad (\text{п.4})$$

$$\Sigma\left(p+\frac{k}{2}\right)-\Sigma\left(p-\frac{k}{2}\right)=-\int\frac{d^4p'}{(2\pi)^4 i}\left(\omega-\frac{\vec{k}\cdot\vec{p}'}{m_3}\right)G\left(p'+\frac{k}{2}\right)G\left(p'-\frac{k}{2}\right)\Gamma_{33}(p',p,k); \qquad (\text{п.5})$$

$$\alpha\Sigma_{-\alpha}^\beta\left(q+\frac{k}{2}\right)+\beta\Sigma_{-\alpha}^\beta\left(q-\frac{k}{2}\right)=\sqrt{n_0}\left(P_+^{\alpha\beta}(q,k)-P_-^{\alpha\beta}(q,k)\right)+\int\frac{d^4q'}{(2\pi)^4 i}\left(\omega-\frac{\vec{k}\cdot\vec{q}'}{m_4}\right)G_-^\gamma\left(q'+\frac{k}{2}\right)G_+^\delta\left(-q'+\frac{k}{2}\right)\Gamma_{44\gamma\delta}^{\alpha\beta}(q',q,k); \qquad (\text{п.6})$$

Кроме этих тождеств полезно вывести еще несколько соотношений, связывающие Γ и производные от G – функций. Рассмотрим выражение

$$\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}G_-^\alpha(q)G_+^\beta(-q)\Gamma_{43\alpha\beta}^{(k)}(q,p),$$

индекс k означает, что вершина взята в k – пределе. Легко видеть, что это выражение представляет собой поправку к фермиевскому массовому оператору, возникающую при включении постоянного, слабонеоднородного поля, действующего только на бозе-частицы. Поскольку включение такого поля приводит лишь к изменению химического потенциала μ_4, то отсюда сразу следует, что

$$\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}G_-^\alpha(q)G_+^\beta(-q)\Gamma_{43\alpha\beta}^{(k)}(q,p)=\frac{\partial\Sigma(p)}{\partial\mu_4}. \qquad (\text{п.7})$$

Аналогично можно найти изменение бозевских G – функций [6],

$$\frac{\partial G_-^-(q)}{\partial\mu_4}=G_-^\lambda(q)G_\lambda^-(q)-\int\frac{d^4q'}{(2\pi)^4 i}G_-^\gamma(q')G_+^\delta(-q')\Gamma_{44\gamma\delta}^{(k)\alpha\beta}(q',q)G_\alpha^-(q)G_\beta^+(-q); \qquad (\text{п.8})$$

и производную от фермиевской G -функции по μ_3

$$\frac{\partial G(p)}{\partial \mu_3} = \{G^2(p)\}^{\kappa} + \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4 i} \{G^2(p')\}^{\kappa} \Gamma^{\kappa}_{33}(p';p) \{G^2(p)\}^{\kappa} \qquad (\text{п}.9)$$

Еще один тип соотношений получим найдя изменение G -функций при переходе в систему, движущуюся с малой; медленно меняющейся скоростью $\delta\vec{v}(t)$, При этом, в гамильтониане возникает добавка $-\vec{P}\cdot\delta\vec{v}(t)$, где $\vec{P}$ - оператор полного импульса системы. При таком возмущении конденсат не меняется, поскольку его импульс равен нулю, а все изменение в G - функциях сводится к добавке в частоту величины $\vec{p}\,\delta\vec{v}$. Сравнивая изменение G - функций с поправкой первого порядка находим,

$$-\vec{q}\,\frac{\partial G_-^{\lambda}(q)}{\partial \omega} = \vec{q}\,\lambda\, G_-^{\lambda}(q) G_{\lambda}^{-}(q) - \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4 i}\, \vec{q}\,' G_-^{\alpha}(q') G_+^{\beta}(-q') \Gamma^{(\omega)\gamma\delta}_{44\alpha\beta}(q',q) G_{\gamma}^{-}(q) G_{\delta}^{+}(-q) +$$

$$+ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4 i}\, \vec{p}\, \{G^2(p)\}^{\omega} \Gamma^{(\omega)\alpha\beta}_{34}(p,q) G_{\alpha}^{-}(q) G_{\beta}^{+}(-q); \qquad (\text{п}.10)$$

и

$$\vec{p}\,\frac{\partial G(p)}{\partial \varepsilon} = \vec{p} + \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4 i}\, \vec{p}\,' \{G^2(p')\}^{\omega} \Gamma^{\omega}_{33}(p',p) - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}\, \vec{q}\, G_-^{\alpha}(q) G_+^{\beta}(-q) \Gamma^{\omega}_{43\alpha\beta}(q,p).$$

Вблизи поверхности ферми последнее равенство приобретает вид:

$$\frac{\vec{p}}{a} = \vec{p} + \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4 i}\, \vec{p}\,' \{G^2(p)\}^{\omega} \Gamma^{\omega}_{33}(p',p) - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4 i}\, \vec{q}\, G_-^{\alpha}(q) G_+^{\beta}(-q) \Gamma^{\omega}_{43\alpha\beta}(q,p). \qquad (\text{п}.11)$$

Литература

1. "Растворы квантовых жидкостей $He^3 - He^4$", "Наука" (1973)
2. G. Baym, Phys. Rev Lett., 18 (1967) 71
3. И.М.Халатников, ЖЭТФ, 35 (1968) 1919.
4. A. Szprynger, Zeit. Phys. B, B22 (1975) 79
5. С.Т.Беляев, ЖЭТФ, 34 (1958) 417.
6. J. Gavoret, P. Nozieres, Ann. of Phys., 28 (1964) 349.

Работа поступила - I ноября 1977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати IO.XI-1977 г. МН 03048
Усл. I,6 печ.л., I,3 учетно-изд.л.
Тираж 250 экз. Бесплатно
Заказ № III.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР