

6

И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 101

А.Д.Букин, С.И.Эйдельман

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ  
НА ВСТРЕЧНЫХ  $e^+e^-$  ПУЧКАХ

Новосибирск

1977



МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА ВСТРЕЧНЫХ  $e^+e^-$  ПУЧКАХ

А.Д.Букин, С.И.Эйдельман

Аннотация

Описана универсальная программа, моделирующая прохождение частиц через вещество детектора. Приведены результаты моделирования и их сравнение с экспериментом.



### Введение

Моделирование физических реакций методом Монте-Карло получило в настоящее время широкое распространение в экспериментальной физике высоких энергий. Наличие непрерывных спектров по энергии и углам, распады частиц, взаимодействие их с веществом детектора и рождение вторичных частиц делает практически невозможным аналитическое вычисление эффективностей регистрации, т.е. доли событий изучаемого процесса, регистрируемых детектором. Моделирование методом Монте-Карло оказывается очень удобным для решения таких задач, поскольку позволяет сравнительно легко учесть всю сложность экспериментальных условий наблюдения частиц и получить всевозможные теоретические распределения.

В настоящей работе описана программа, моделирующая прохождение частиц через вещество детектора, написанная для ЭВМ "Минск-32" на языках Фортран и символического кодирования. Программа носит довольно универсальный характер и, в частности, широко применяется при обработке экспериментов с детектором "ОЛЯ", ведущимся с 1975 года на электрон-позитронном накопителе ВЭПП-2М (максимальная энергия частиц в пучке - 670 МэВ) /1/. Эти эксперименты ведутся в режиме *on-line*, вся информация о зарегистрированных детектором событиях записывается на магнитную ленту (амплитуды в спинтилляционных счетчиках, номера сработавших проволочек в искровых камерах и т.д.). Чтобы использовать все возможности программ обработки эксперимента, результатом работы программы моделирования также является магнитная лента, по своей структуре идентичная реальной экспериментальной ленте.

Из соображений экономии машинной памяти и времени моделирование любого процесса разбивается на два этапа: первичное и вторичное моделирование. На первом этапе моделируется точка взаимодействия электрона с позитроном, а также энергии и углы продуктов взаимодействия для конкретной реакции. Вся эта информация записывается на специальную магнитную ленту. На втором этапе информация о событиях считывается с магнитной ленты, все частицы события проводятся через детектор и формируется результирующая магнитная лента, аналогичная экспериментальной.



## I. Первичное моделирование

### Описание

В соответствии с указанной максимальной энергией пучков на ВЭП-2М в программе предусмотрена работа со следующими типами частиц:  $\gamma$  - квант, электрон, позитрон,  $\mu^\pm$  - мезоны,  $\pi^0$  - мезон,  $\pi^\pm$  - мезоны,  $K_{sd}^0$  - мезоны,  $K^\pm$  - мезоны,  $\eta^0$  - мезон. Короткоживущие частицы типа  $\rho$ ,  $\omega$  и  $\Phi$  - мезона учитываются как резонансные взаимодействия соответствующего состояния  $\pi$  или  $K$  - мезонов. Тип частицы кодируется целым числом, по которому в таблице свойств частиц можно найти ее основные параметры: заряд, массу, время жизни, парциальные вероятности различных мод распада.

В исходных данных к программе первичного моделирования указываются размеры пучков, тип генерируемого процесса, нужное количество событий этого процесса, полная энергия пучков. Для каждого события генерируется точка столкновения электрона с позитроном. Как правило, размеры пучков в радиальном и вертикальном направлениях пренебрежимо малы, так что для получения координат точки столкновения разыгрывается одномерная случайная величина, распределенная по нормальному закону. Далее разыгрывается конкретное событие данного процесса, т.е. случайные величины энергии и углов для каждой конечной частицы. Информация о событиях, промоделированных в одном счете программы, записывается на магнитную ленту отдельным массивом, именуемым далее "заход".

### Общий подход к моделированию $e^+e^-$ - взаимодействий

Выражение для сечения столкновения двух частиц с превращением их в совокупность произвольного числа частиц с импульсами  $P_i'$  имеет следующий вид (см., например, /2/):

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3n}} \delta(P_1' - P_1 - P_2) \frac{|M|^2}{4I} \prod_i \frac{d^3P_i'}{2E_i'} \quad (I.1)$$

где  $|M|^2$  - усредненный и просуммированный по поляризациям участвующих частиц квадрат матричного элемента данного процесса,  $P_1, m_1, 2$  - 4-импульсы и массы начальных частиц,

$$I = [(P_1 P_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}$$

В случае, когда в конечном состоянии имеется только две частицы,  $\delta$ -функция легко исключается и в системе центра инерции имеем:

$$d\sigma \sim |M|^2 d\psi d(\cos\theta) \quad (I.2)$$

где  $\theta, \psi$  - углы одной из конечных частиц. Энергии конечных частиц однозначно определяются их массами и энергиями начальных частиц, а вторая конечная частица вылетает под углами  $\pi - \theta, \pi + \psi$ . Таким образом, для моделирования реакции с двумя частицами в конечном состоянии нужно генерировать распределение двумерной случайной величины с плотностью  $f(\psi, \cos\theta) = |M|^2$

В случае трех и более частиц в конечном состоянии исключение  $\delta$ -функции становится нетривиальным, т.к. углы вылета и энергии одной частицы зависят от углов и энергий всех остальных частиц. Для розыгрыша таких реакций мы применили метод случайных звезд, разработанный в /3/. В этом методе используется набор таких переменных (углы и энергии для каждой частицы в своей системе координат), что пределы их изменения не зависят от значений, принимаемых другими переменными, и в нерелятивистском случае для процессов с постоянным матричным элементом распределение точек в этом многомерном гиперкубе равномерно. При этом (I.1) примет вид

$$d\sigma \sim |M|^2 \Phi \prod d\alpha_k d\beta_k d\gamma_k \quad (I.3)$$

где функция  $\Phi$  возникает при исключении  $\delta$ -функции и заменах переменных (вид ее весьма сложен и приведен в /3/), а сами переменные  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  меняются от 0 до 1. При этом для  $\alpha_k$   $k=2, 3, \dots, n-1$ , а для  $\beta_k, \gamma_k$   $k=2, 3, \dots, n$ , где  $n$  - число конечных частиц. Опыт показывает, что для неполюсных  $|M|^2$  вариации  $\Phi |M|^2$  невелики при любых энергиях.

Для розыгрыша возникающих многомерных распределений случайных величин мы используем метод Неймана /4/. В нем требуется знание мажоранты - наибольшего значения плотности распределения. Для случая двух конечных частиц мажоранты, как правило, находятся аналитически, а в случае трех и более частиц - численно.



### Двухчастичные процессы

В области энергии, доступной ВЭШ-2М, представляют интерес следующие процессы с двумя частицами в конечном состоянии:

- а/ упругое рассеяние  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ ,
- б/ аннигиляция в два  $\gamma$ -кванта  $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$ ,
- в/ рождение пары  $\mu$ -мезонов  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ ,
- г/ рождение пары псевдоскалярных частиц  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-, K^+K^-, K_s K_L$ ,
- д/ рождение псевдоскалярного мезона и  $\gamma$ -кванта  $e^+e^- \rightarrow \pi^0\gamma, \eta^0\gamma$

Выражения для дифференциальных сечений этих процессов общеизвестны (см., например, /5/). Отметим, что если начальные лептоны не поляризованы, то  $|M|^2$  не зависит от азимутального угла  $\psi$  и розыгрыш процесса сводится к генерированию угла  $\theta$ , равномерно распределенного в  $(0, 2\pi)$  и  $\cos\theta$ , распределенного в  $(-1, 1)$  с плотностью  $|M|^2 = f(\cos\theta)$ . Т.к. дифференциальное сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  расходится при малых  $\theta$ , мы генерировали события этого процесса в интервале углов  $\theta$  от  $15^\circ$  до  $165^\circ$ , что заведомо перекрывает диапазон углов детектора "ОЛЯ".

Поскольку на установке ВЭШ-2М имеется возможность изучения  $e^+e^-$ -столкновений с поляризованными вследствие синхротронного излучения начальными частицами /6/, в программе также предусмотрена возможность моделирования перечисленных выше реакций для поперечно и антипараллельно поляризованных  $e^+$  и  $e^-$ . В этом случае квадрат матричного элемента  $|M|^2$  есть функция  $\psi$ ,  $\cos\theta$  и произведения степеней поляризации начальных лептонов (вид сечений приведен в /5/).

Заметим, что для двухчастичных реакций метод Неймана оказывается достаточно эффективным и позволяет генерировать 2-3 тысячи событий в минуту.

### Многочастичные процессы

Мы рассматривали следующие процессы с тремя и более частицами в конечном состоянии:

- а/  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$
- б/  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$
- в/  $e^+e^- \rightarrow 2\pi^+2\pi^-$
- г/  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$
- д/  $e^+e^- \rightarrow 5\pi, 6\pi$
- е/ реакции двойного электророждения.

Выражения для матричных элементов перечисленных реакций

приведены в приложении I. Для розыгрыша процессов а/ -д/ применялся метод случайных звезд, методика розыгрыша реакций двойного электророждения описана в приложении I. Заметим, что при моделировании реакции  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$  рассматривались два случая: рождение трех  $\pi$ -мезонов без фактора и через промежуточное  $\rho\pi$  состояние, в случае в/ - механизм  $\rho\pi\pi$  с двумя  $\pi$ -мезонами в состоянии с  $I=J=0$ . Для случая г/ рассматривались промежуточные  $\omega\pi$  и  $\rho\pi\pi$  состояния. При записи

матричных элементов реакций б/ - г/ учитывалась тождественность конечных  $\pi$ -мезонов. В случае д/ рассматривались различные зарядовые состояния системы  $\pi$ -мезонов ( $2\pi^+2\pi^-\pi^0$ ,  $3\pi^+3\pi^-$ ,  $2\pi^+2\pi^-2\pi^0$  и т.д.), считалось, что  $|M|^2 = 1$  (статистическая модель с Лоренц-инвариантным фазовым объемом).

Для указанных выше процессов множественного рождения  $\pi$ -мезонов на моделирование 1000 событий уходит 1-2 минуты в случае трех частиц в конечном состоянии и 5-10 минут в случае 4-6 частиц.

### 2. Вторичное моделирование

#### Блок-схема работы программы

После считывания с магнитной ленты, изготовленной при первичном моделировании, информации о продуктах  $e^+e^-$  взаимодействия, т.е. координат точки взаимодействия, типов частиц, их энергий и углов, характеристики начальных частиц заносятся в буферный массив с переменным количеством частиц. Каждая частица проводится через материал детектора. Под детектором в настоящей программе понимается совокупность некоторого числа сцинтилляционных счетчиков, искровых камер и поглотителей. Характеристики вещества, положение в пространстве и размеры хранятся на магнитной ленте и вводятся в оперативную память в начале работы программы. Если в результате взаимодействия с веществом или распада появляются вторичные частицы, их характеристики добавляются в конец буферного массива. В результате прохождения частицы через детектор в соответствующих массивах запоминаются номера проволок искровых камер, через которые прошла частица, и энергия, выделившаяся в сцин-



тилляционных счетчиках. Путь частицы кончается либо в точке распада, либо в точке взаимодействия с веществом, либо по выходу из детектора. Затем рассматривается следующая частица из буферного массива и т.д., пока он не будет исчерпан. На рис. I приведена блок-схема работы программы. Все взаимодействия с веществом по способу реализации в программе разделены на две группы: непрерывные и точечные. К непрерывным относятся ионизационные потери и многократное рассеяние, остальные — к точечным. Список их может легко пополняться, в настоящий момент реализованы следующие процессы:

- а/ тормозное излучение электронов и позитронов на ядрах атомов,
- б/ рождение электрон-позитронной пары гамма-квантом в поле ядра,
- в/ комптон-эффект (в приближении свободных электронов),
- г/ фотоэффект на К-оболочке атомов,
- д/ аннигиляция позитрона,
- е/ рассеяние заряженных частиц на электронах атомов (в приближении свободных электронов) с образованием дельта-электронов,
- ж/ перезарядка заряженных  $\pi$ -мезонов в нейтральные,
- з/ поглощение заряженных  $\pi$ -мезонов,
- и/ поглощение заряженных  $K$ -мезонов,
- к/ взаимодействие  $K_s^0$ -мезона с веществом,
- л/ распады  $\mu$ -мезонов,  $\pi$ -мезонов,  $K$ -мезонов и  $\eta$ -мезона по каналам, парциальные вероятности которых выше 1%.

Детали моделирования каждого из перечисленных процессов приведены в приложении 2.

#### Продвижение частицы в пространстве

Путь частицы состоит из последовательных прямолинейных отрезков разной величины. Выбор величины очередного отрезка производится так:

- I/ в программе задано максимальное перемещение заряженной частицы в единицах  $г/см^2$ . Если частица не заряжена или находится недалеко от края блока (сцинтиллятора или поглотителя), то за предполагаемое перемещение  $\Delta z$  принимается расстояние до края блока вдоль направления ско-

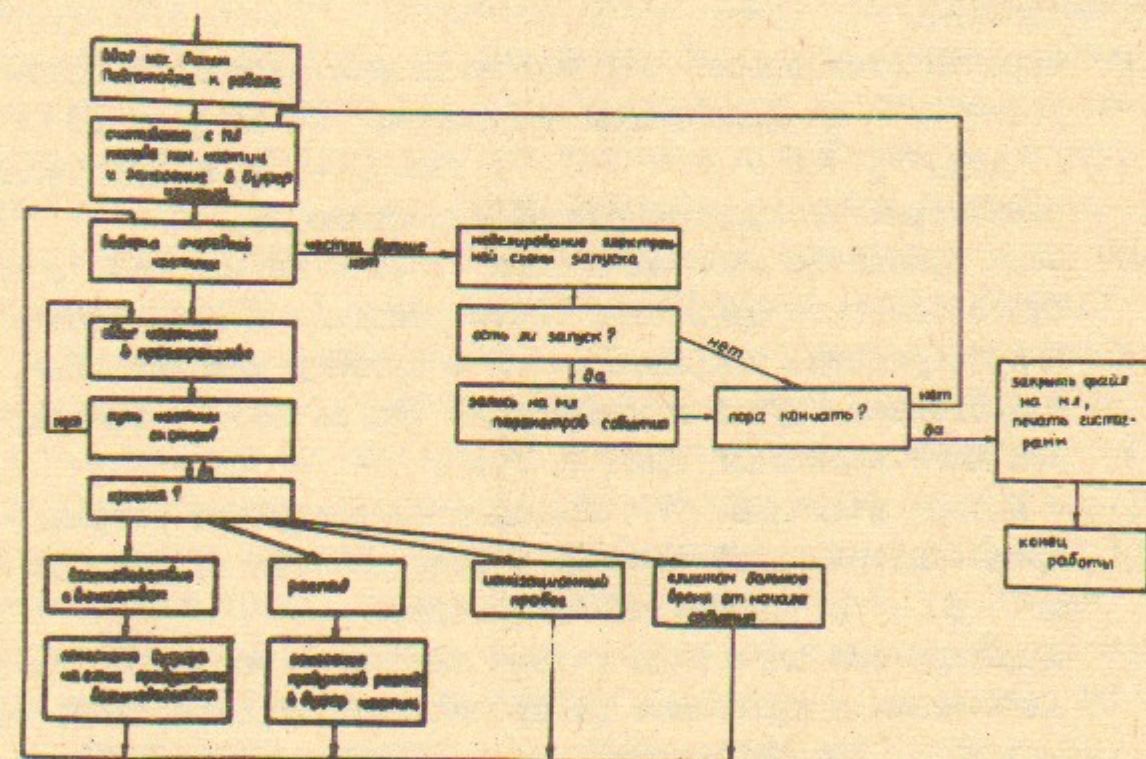


Рис. I

Блок-схема работы программы моделирования.



рости, в противном случае оно полагается равным максимальному. Ограничение на перемещение заряженной частицы введено для того, чтобы точнее учитывать зависимость сечений процессов от энергии и многократное рассеяние.

2/ находится полный коэффициент поглощения как сумма коэффициентов поглощения от всех процессов:  $\lambda = \sum \lambda_i$ . Под коэффициентом поглощения понимается отношение частоты наблюдения актов данного процесса в тонком слое вещества к произведению толщины этого слоя на поток моноэнергетических частиц. Коэффициент поглощения зависит от энергии частицы и для всех процессов, кроме распада, от параметров вещества (атомный номер и вес, плотность).

3/ определяется пробег частицы до взаимодействия в соответствии с коэффициентом поглощения  $\lambda$  по формуле 
$$\Delta Z_{int} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\xi}$$
, где  $\xi$  — случайное число, равномерно распределенное на интервале (0,1).

4/ если пробег до взаимодействия  $\Delta Z_{int}$  меньше  $\Delta Z$ , то считается, что произошло взаимодействие и перемещение в пространстве приравнивается к пробегу частицы  $\Delta Z_{int}$ . В противном случае принимается, что на этом элементарном шаге взаимодействия не было.

После выбора величины  $\Delta Z$  выполняются следующие операции:

- 1/ производится сдвиг частицы в пространстве на расстояние  $\Delta Z$  в направлении скорости.
- 2/ моделируется случайная потеря энергии в соответствии с заложенным в программе распределением вероятностей, зависящая от характеристик вещества, расстояния  $\Delta Z$ , энергии, массы. Если эта величина больше, чем оставшаяся кинетическая энергия частицы, то рассмотрение стабильной частицы в этом случае прекращается, а для нестабильной моделируется распад в остановке. Если же энергии достаточно, то энергия частицы уменьшается на величину потерь, и, если частица находится внутри спинтилляционного счетчика, эта величина добавляется к амплитуде счетчика.
- 3/ моделируется угол многократного рассеяния в соответствии с распределением вероятностей (первые три члена разло-

жения в теории Молера) и вектор скорости частицы поворачивается на этот угол.

4/ если произошло превращение частицы, то генерируются вторичные частицы и их характеристики хранятся в буферном массиве до тех пор, пока они не будут в свою очередь проведены через детектор. Избыток частиц, не вмещающийся в отведенный участок оперативной памяти, переписывается на магнитный барабан, емкость которого практически бесконечна.

#### Искровые камеры

На каждом элементарном сдвиге в пространстве производится анализ на пересечение частицей искровых камер. Искровая камера представляет из себя две параллельные плоскости, образованные натянутыми с постоянным для каждой плоскости шагом проволочками. Размеры камеры определяются крайними проволочками, контур камеры — прямоугольник или параллелограмм. Каждой проволочке присваивается индивидуальный номер, причем нумерация такая же как в эксперименте. При пересечении плоскости камеры фиксируются один или два номера проволочек. Если трек частицы прошел ближе к какой-либо проволочке, чем на  $1/4$  шага, запоминается номер только этой проволочки, в противном случае запоминаются номера двух соседних проволочек. Такая процедура позволяет уменьшить вдвое интервал между возможными координатами при восстановлении трека. Материал камер можно учесть, поставив рядом с камерой поглотитель соответствующей толщины. Реальная камера имеет некоторое координатное разрешение, зависящее от угла входа частицы в камеру. Эта зависимость измерена экспериментально, интерполирована простой функцией и заложена в программу. В соответствии с этим после определения координат точки пересечения трека частицы с плоскостью камеры моделируется их случайный сдвиг с гауссовым законом распределения, и только после этого определяются номера проволочек.

#### Моделирование электронной схемы запуска

В экспериментальной установке после формирования амплитуд в спинтилляционных счетчиках специальная электронная схема, предназначенная для отбора событий только нужного типа, реша-



ет вопрос о запуске системы регистрации. Элементы схемы запуска осуществляют операции с логическими импульсами (импульсы стандартной формы), аналогичные операциям математической логики. В описываемой программе реализованы программные аналоги электронных блоков. Приведем их краткое описание:

1/ дискриминатор - для этого блока указывается порог срабатывания и номера сцинтилляционных счетчиков, подключенных ко входу дискриминатора. Если сумма амплитуд этих счетчиков превышает порог дискриминатора, то на этом дискриминаторе ставится метка, означающая, что на выходе есть импульс.

2/ сумматор - при задании этого блока перечисляются номера ранее определенных блоков, выходы которых соединены со входом данного сумматора. Функции этого блока соответствуют логическому суммированию.

3/ схема совпадений - параметры этого блока задаются так же, как для сумматора, но результат равен логическому произведению (на выходе есть импульс только в том случае, когда на все входы поступили сигналы).

4/ инвертор - определяется аналогично предыдущим двум блокам. На выходе есть импульс только в том случае, когда на всех входах отсутствуют сигналы.

Все элементы схемы запуска описываются в числовом массиве, в котором последний описанный блок является запускающим. Если при логическом анализе события на выходе запускающего блока появляется импульс, то информация об этом событии записывается на магнитную ленту, в противном случае начинает рассматриваться новое событие.

#### Управление программой

Все характеристики конкретного эксперимента, для которого используется программа, находятся в исходных числовых данных. Это облегчает изменение программы как в соответствии с текущими изменениями аппаратуры в этом эксперименте, так и при переходе к любому другому эксперименту. В программе имеется управляющая восьмеричная константа, в которой каждый разряд соответствует своему процессу взаимодействия с веществом. Это позволяет включать эти процессы в различных сочетаниях. В этой же константе можно указывать следующие режимы работы программы:

а/ распечатка параметров системы регистрации с различной степенью подробности. Можно включать порознь распечатку параметров сцинтилляционных счетчиков, блоков поглотителей, электронной схемы запуска, искровых камер, таблицы свойств частиц.

б/ подробная распечатка структуры события. При этом для каждой начальной, а также для вторичной частицы на АЦПУ печатается ее начальное состояние, т.е. положение в пространстве, направление скорости, тип, полная энергия, время в нсек относительно момента столкновения электрона с позитроном. Также печатаются тип взаимодействия, время, положение в пространстве точки взаимодействия, номера проволок и амплитуды в сцинтилляционных счетчиках, полученные к моменту исчезновения частицы.

в/ включение разных наборов поглотителей. В исходных числовых данных все поглотители разбиты на три группы. Так как скорость счета программы заметно меняется в зависимости от количества поглотителей, то можно не учитывать несущественные для конкретного процесса блоки вещества.

г/ включение конечного разрешения искровых камер.

д/ включение внутреннего моделирования взаимодействия электрона с позитроном при столкновении в накопителе. Как указывалось выше, информация о начальных частицах считывается с магнитной ленты. В некоторых случаях может оказаться удобным генерировать начальные частицы в этой же программе. Для этого должна быть написана отдельная подпрограмма формирования массива характеристик начальных частиц. Сборку основной программы менять не нужно, необходимо только указать в исходных данных название подпрограммы-генератора и включить режим внутреннего моделирования. Тогда во время работы подпрограмма-генератор начальных частиц будет загружена в свободный участок оперативной памяти. В описываемой версии программы эта возможность реализована для моделирования космического излучения.

Как указывалось выше, на магнитной ленте с исходными данными первичного моделирования группы частиц объединены в заходы, каждому заходу присвоен номер. В задании на счет перечисляются номера заходов, события из которых нужно использовать при моделировании.



## Вывод результатов счета

В результате работы программы моделирования формируется запись на магнитной ленте, по структуре совершенно идентичная записи экспериментальных событий. Так как моделирование занимает весьма большое машинное время, целесообразно записывать на ленту подробную информацию о событиях. Структура записей позволяет добавлять отдельным блоком данные о каждом событии, недоступные в эксперименте, так называемые "истинные" параметры: точку "рождения" частицы, ее тип, энергию, направление движения, точку "смерти" и причину, т.е. вид взаимодействия, для каждой частицы из первых трех поколений. По окончании счета на АЦПУ печатаются полное время работы программы, полное количество событий, число событий, вызвавших запуск системы регистрации и записанных на магнитную ленту. Кроме того, для событий, вызвавших запуск, можно напечатать гистограммы распределений по амплитудам в сцинтилляционных счетчиках, указанных в задании на счет. В таблице приведено примерное время счета в минутах на одно событие для различных процессов:

Процесс	мин/событие	мин/запуск
$e^+e^- \rightarrow e^+e^-$	4.6	13.1
$e^+e^- \rightarrow K_S K_L$	1.3	2.8
$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	0.5	0.9
$e^+e^- \rightarrow e^+e^- + e^+e^-$	0.5	2.9
$e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$	2.7	10.0

В заключение авторы выражают глубокую благодарность В.А.Сидорову и А.Г.Хабакпашеву за постановку задачи и постоянный интерес к работе, а также А.И.Вайнштейну, Л.М.Курдадзе, В.С.Фадину и И.Б.Хриповичу за многочисленные полезные обсуждения.

## Приложение I

Приведем выражения для матричных элементов многочастичных процессов, использовавшиеся при первичном моделировании.

### 1/ $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- \gamma$

Предполагая, что  $\pi^+\pi^-$  рождаются через резонанс в  $S$ -волне ( $\epsilon$ -мезон), получим для квадрата матричного элемента:

$$|M|^2 \sim Q^2(p_+k)(p_-k) / [(m_\epsilon^2 - q^2)^2 + m_\epsilon^2 \Gamma_\epsilon^2]$$

где  $p_\pm$  - 4-импульсы  $e^\pm$ ,  $k$  - 4-импульс фотона,  $m_\epsilon, \Gamma_\epsilon$  - масса и ширина  $\epsilon$ -мезона,  $Q = (p_+ + p_-)$ ,  $q^2 = (p_+ + p_- - k)^2$  - квадрат эффективной массы пары  $\pi$ -мезонов.

### 2/ $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$

Пренебрегая зависимостью фактора от импульсов, имеем:

$$|M|^2 \sim |\vec{k}_+ \cdot \vec{k}_-|^2 \sin^2 \theta$$

где  $k_\pm$  - 4-импульсы  $\pi^\pm$ -мезонов,  $\theta$  - угол между направлением начальных частиц и нормалью к плоскости рождения. В случае промежуточного  $\rho^0$ -механизма равновероятно рождение  $\rho^0\pi^0$ ,  $\rho^+\pi^-$  и  $\rho^-\pi^+$ , так что

$$|M|^2 \sim \left| \sum_{i=1}^3 \frac{1}{m_\rho^2 - S_i - i m_\rho \Gamma_\rho} \right|^2 |\vec{k}_+ \cdot \vec{k}_-|^2 \sin^2 \theta$$

где  $m_\rho, \Gamma_\rho$  - масса и ширина  $\rho$ -мезона,  $S_i$  - квадрат эффективной массы пары  $\pi$ -мезонов.

### 3/ $e^+e^- \rightarrow 2\pi^+2\pi^-$

По-видимому, в области энергии  $\sqrt{s} \sim 1-2$  ГэВ в процессе рождения  $2\pi^+2\pi^-$  доминирует механизм  $\rho^0\pi^+\pi^-$  /7,8/. Матричный элемент перехода  $\rho^0 \rightarrow \rho^0\pi\pi$  запишем в виде:

$$[(\epsilon_1 \epsilon_2)(k_1 k_2) - (\epsilon_2 k_1)(\epsilon_1 k_2)](p_3 p_4)$$

где  $\epsilon_{1,2}, k_{1,2}$  - 4-поляризации и 4-импульсы  $\rho$ -мезонов,  $p_i$  - 4-импульсы  $\pi$ -мезонов, множитель  $(p_3 p_4)$  введен для учета правила Адлера для мягких пионов (см. также /9/). В конечном состоянии имеется 2 пары тождественных  $\pi^\pm$ -мезонов, так что после симметризации

$$|M|^2 \sim \left| \sum_{i=1}^4 M_{ij} \right|^2 [-Q^2 g_{\mu\mu'} + Q_\mu Q_{\mu'} + q_\mu q_{\mu'}],$$

$$M_{1\mu} = [(Q p_1) p_{2\mu} - (Q p_2) p_{1\mu}](p_3 p_4) B_{1,2}^p, \quad M_{2\mu} = M_{1\mu}(p_1 \leftrightarrow p_2), \quad M_{3\mu} = M_{1\mu}(p_2 \leftrightarrow p_4),$$

$$M_{4\mu} = M_{2\mu}(p_2 \leftrightarrow p_4), \quad B_{ik}^p = 1/[m_\rho^2 - S_{ik} - i m_\rho \Gamma_\rho], \quad S_{ik} = (p_i + p_k)^2, \quad q = p_+ - p_-.$$



4/  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0$

Мы рассматривали 2 промежуточных механизма:  $\omega\pi^0$  и  $\rho^0\pi^+\pi^-$ . Первый из них был впервые рассмотрен в /10/, мы дополнительно учли тождественность конечных  $\pi^0$ , так что матричный элемент должен быть симметричен относительно перестановки их 4-импульсов:

$$|m|^2 \sim |B_{123}^\omega|^2 \sum_{i,k=1,2,3} B_{ik}^\rho \left[ Q^2 R^2 - (qR)^2 \right] + |B_{124}^\omega|^2 \sum_{i,k=1,2,3} B_{ik}^\rho \left[ Q^2 \bar{R}^2 - (q\bar{R})^2 \right] -$$

$$- 2 \operatorname{Re} \left[ B_{123}^\omega \sum_{i,k=1,2,3} B_{ik}^\rho B_{124}^{\omega*} \sum_{i,k=1,2,3} B_{ik}^{\rho*} \right] \left[ Q^2 (R\bar{R}) + (qR)(q\bar{R}) \right],$$

$$R = (q p_1)(p_2 p_3), \quad \bar{R} = (q p_1)(p_2 p_4),$$

$$B_{123}^\omega = 1 / [m_\omega^2 - (p_1 + p_2 + p_3)^2 - i m_\omega \Gamma_\omega]$$

Для  $\rho^0\pi^+\pi^-$  механизма используем ту же вершину  $\rho \rightarrow \rho\pi\pi$ , что и выше, так что после симметризации имеем:

$$|m|^2 \sim (p_3 p_4)^2 (q p_1)(q p_2)(p_1 p_2) / [(m_\rho^2 - s)^2 + m_\rho^2 \Gamma_\rho^2]$$

5/ двойное электророжение

В изучаемой области энергии интерес представляют следующие реакции:  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- + e^+e^-$ ,  $e^+e^- + \mu^+\mu^-$ ,  $e^+e^- + \pi^+\pi^-$ . В работе /11/ было получено точное выражение для  $|m|^2$  в случае двойного электророжения пары частиц со спином 0 и 1/2. Получающиеся  $|m|^2$  как функции 4-импульсов обладают сильными вариациями, поэтому применение метода Неймана к (1.3) становится неэффективным. Мы воспользовались упрощенным выражением для дифференциального сечения, проинтегрированного по рассеянным лептонам /12/. Это упрощение физически оправдано, так как рассеянные лептоны вылетают преимущественно под малыми углами и не регистрируются детектором, так что нас интересуют лишь частицы рождающейся пары. Тогда

$$d\sigma \sim \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \left( 1 - \frac{\omega_1}{E} + \frac{\omega_1^2}{2E^2} \right) \left( 1 - \frac{\omega_2}{E} + \frac{\omega_2^2}{2E^2} \right) R_{\gamma\gamma} \frac{1}{a} \ln \frac{a}{b} P_+ P_- dE_+ dE_- d\Omega_+ d\Omega_- ,$$

где  $P_\pm, E_\pm$  - импульсы и энергии частиц пары,  $E$  - энергия начальных частиц,  $R_{\gamma\gamma}$  - квадрат матричного элемента для реакции  $\gamma+\gamma \rightarrow$  пара неполяризованных частиц. Выражения для  $a, b, R_{\gamma\gamma}$  как функции энергий и углов частиц пары приведены в /12/.

Чтобы сгладить быстрое изменение дифференциального сечения, воспользуемся тем, что одночастичный спектр по энергии  $E_\pm$  имеет при малых энергиях вид  $1/E_\pm^2$ , а распределение по углу  $\psi = \psi_- - \psi_+ + \pi$ ,  $1/\sqrt{\frac{m^2}{E^2} + \psi^2}$  и "включим" эти функции в полную плотность распределения. В итоге рождающуюся пару характеризуют 6 переменных:  $\cos \theta^\pm$  - разыгрываются равномерно на интервале  $\theta^\pm \in (30, 150)$ , энергии  $E^\pm$  - разыгрываются по закону  $1/E_\pm^2$ ; углы  $\psi_+$  и  $\psi_-$ , причем  $\psi_+ \in (0, 2\pi)$  и распределен равномерно, а  $\psi_- \in (-\pi, \pi)$  и распределен по закону  $1/\sqrt{\frac{m^2}{E^2} + \psi^2}$ . После этого метод Неймана оказывается достаточно эффективным, время на моделирование 1000 событий составляет примерно 20 минут.

Приложение 2

Приведем подробности моделирования процессов взаимодействия частиц с веществом.

I/ ионизационные потери

Средняя величина потерь на возбуждение и ионизацию атомов вещества с энергией вторичных частиц меньше  $\eta$  рассчитывается по формуле /13/:

$$\bar{E}_n = \frac{0.153 Z \rho X}{A \beta^2} \left\{ \ln \frac{\gamma^2 \beta^2 \eta}{I^2} + 14 - \beta^2 - \delta \right\}$$

где  $\bar{E}_n, \eta$  измеряются в Мэв,  $Z, A$  - атомный номер и вес вещества,  $\rho$  - плотность (г/см<sup>3</sup>),  $I$  - средний ионизационный потенциал в кэв,  $X$  - путь, пройденный частицей в см,  $\gamma$  - отношение энергии частицы к массе покоя,  $\beta^2 = 1 - 1/\gamma^2$ ,  $\delta$  - поправка на эффект плотности.

Следуя работе /14/, для поправки на эффект плотности используется асимптотическое выражение, дающее максимальную погрешность 6% в переходной области между релятивизмом и нерелятивизмом:

$$\delta = \begin{cases} 0, & \delta' \leq 0 \\ \delta', & \delta' > 0 \end{cases} \quad \delta' = \ln \left( \frac{0.83 \cdot 10^{-5} Z \rho \beta^2 \gamma^2}{A I^2} \right) - 1$$



Для моделирования флуктуаций ионизационных потерь необходимо знать ширину распределения. Формула для дисперсии была получена из кинетического уравнения Ландау [15]:

$$\sigma^2 = 0.153 \int \eta \rho x / A \beta^2$$

В приведенные формулы входит величина  $\eta$  — максимальная кинетическая энергия вторичных частиц. Электроны отдачи с энергией больше  $\eta$  не учитываются в непрерывных ионизационных потерях (см. "рассеяние на электронах"). Из законов сохранения энергии-импульса следует ограничение на величину  $\eta$ :

$$\eta_{\max} = 2m(\gamma^2 - 1) / \left( (2\gamma + \frac{m}{M}) \frac{m}{M} + 1 \right)$$

Здесь  $m, M$  — массы электрона и налетающей частицы. Если  $\eta_{\max} < \eta$ , то всюду вместо  $\eta$  подставляем  $\eta_{\max}$ . Соотношение между среднеквадратичным отклонением и средней выделенной энергией меняется в широких пределах. Для получения правильных значений дисперсии и среднего была использована сумма двух распределений:

$$dW = (1-\alpha)dW_1 + \alpha dW_2$$

$$dW_1 \sim \exp(-E_1^2 / 2\sigma_1^2), \quad dW_2 \sim \frac{1}{E_1^2} \exp(-4\sigma_1/E_1)$$

где величины  $\alpha, E_1, \sigma_1, Q$  вычисляются в следующем порядке:

$$\sigma_1 = \min\{0.9\sigma; \bar{E}_n/10\}; \quad y = \sigma^2/\sigma_1^2$$

$$Q = \max\{3; y/16 + \ln^2 y\}$$

$$\alpha = 2(y-1) / [16Q + 3 + \sqrt{Q - (y-1)^2}]$$

На рис.2 показаны полученные по этим формулам распределения  $dW_1/dE_n$ ,  $dW_2/dE_n$  и  $dW/dE_n$  для налетающей частицы с энергией 300 Мэв, массой 106 Мэв и проходящей через слой вещества толщиной 1 см, с плотностью 1 г/см<sup>3</sup>, атомным номером 6, атомным весом 12 и средним ионизационным потенциалом 0.06 кэв (сцинтилляционная пластмасса). Три пунктирные линии соответствуют средней величине потерь энергии для первого распределения, суммарного и второго (слева направо). На рис.3 показаны распределения по амплитудам в ближайшем к пучку сцинтилляционном счетчике при прохождении электронов и позитронов с энергией 510 Мэв. Амплитуда измеряется в единицах наиболее вероятной амплитуды для космических частиц: 1 — эксперимент, 2 — моделиро-

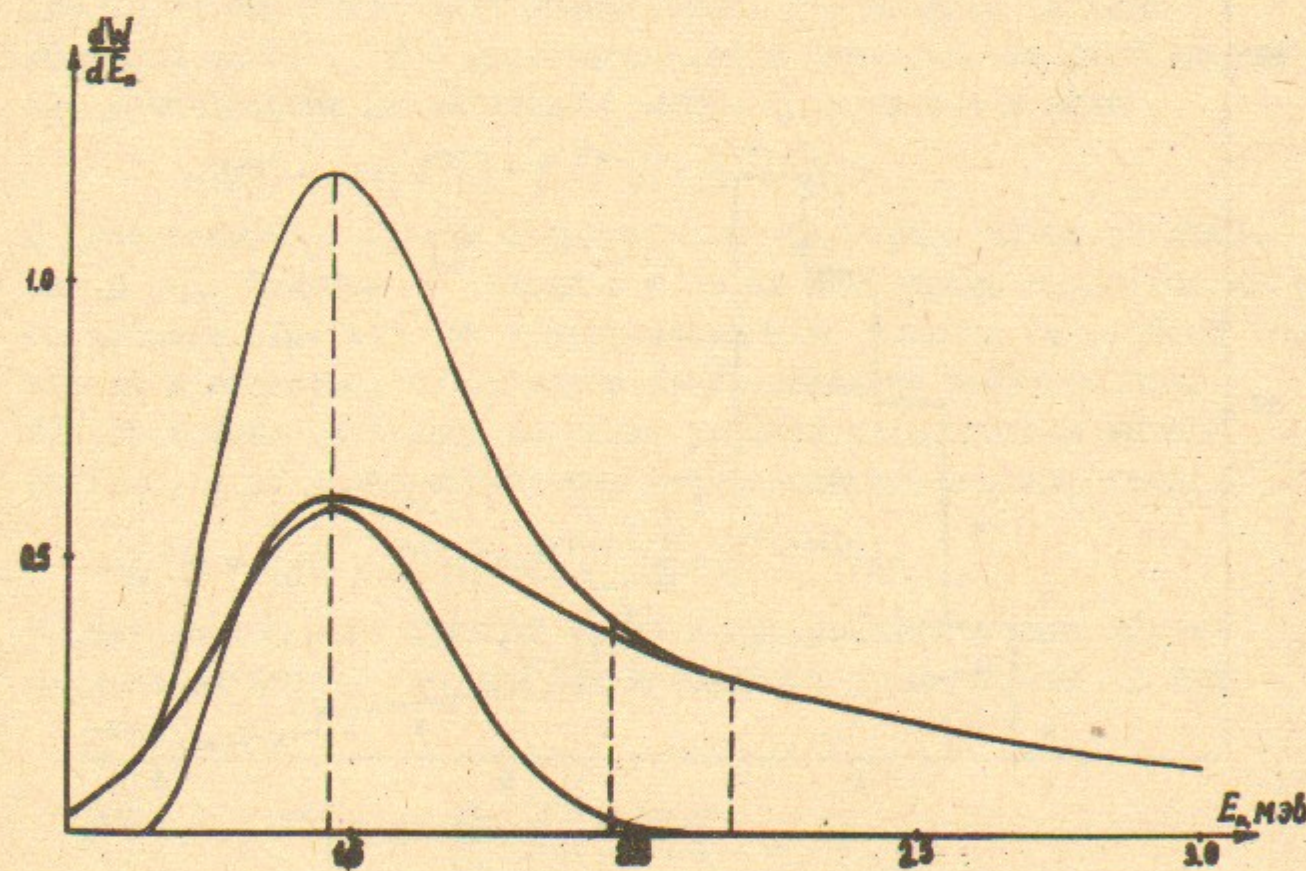


Рис.2

Форма амплитудного распределения  $\frac{dW}{dE_n} = (1-\alpha) \frac{dW_1}{dE_n} + \alpha \frac{dW_2}{dE_n}$ , генерируемого программой для частицы массой 106 Мэв, энергией 300 Мэв, проходящей через слой сцинтилляционной пластмассы толщиной 1 см.



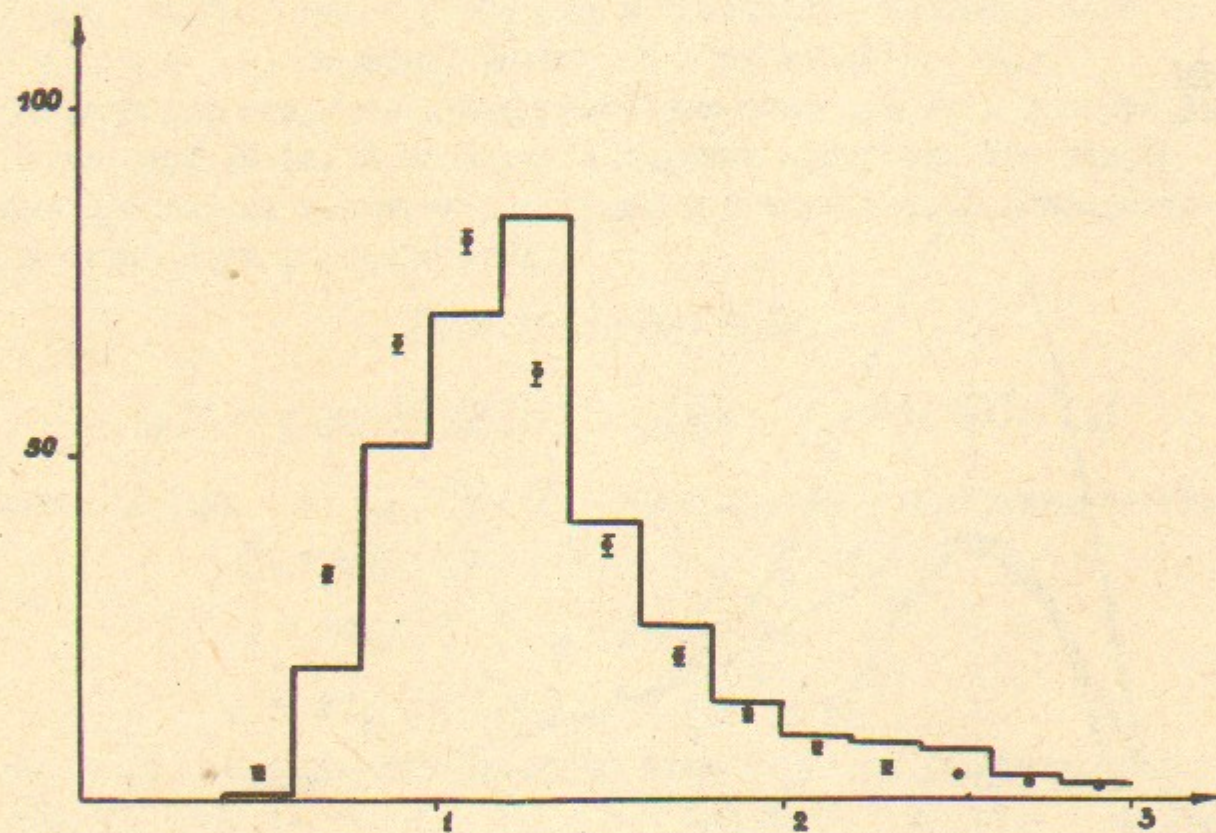


Рис.3

Амплитудное распределение для событий процесса  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  при энергии 510 Мэв в первом запускающем сцинтилляционном счетчике: гистограмма - моделирование, точки с ошибками - эксперимент.

вание (предварительно для нормировки моделировалось прохожде- ние через счетчик космического излучения, см. рис.4). Экспери- ментальное распределение нормировалось на количество событий в распределении для моделирования.

2/ многократное рассеяние

Угол многократного рассеяния генерируется в соответствии с тео- рией Мольер в интерпретации Бете /16/. Если ввести следующие вспомогательные величины,

$$\chi_c^2 = 0.157 \frac{Z(Z+1)\rho X}{A(P\beta)^2} ; \quad b = \ln \left\{ \frac{6680 \rho X (Z+1) \sqrt{Z}}{A \beta^2 (1 + 3.34 \frac{Z^2 d^2}{\beta^2})} \right\}$$

$$B - \ln B = b \quad ; \quad t = \frac{\theta^2}{\chi_c^2 B}$$

где кроме введенных выше обозначений  $P$  - импульс частицы в Мэв/с,  $d = 1/137$ ,  $\theta$  - угол рассеяния в радианах, то распределе- ние вероятностей по величине  $t$  можно представить в виде:

$$dW(t) = dt \times [f^{(0)}(t) + B^{-1} f^{(1)}(t) + B^{-2} f^{(2)}(t) + \dots]$$

В описываемой программе используются три первых члена разложе- ния в ряд. Функции  $f^{(n)}$  сложные и на их вычисление требуется мно- го времени. Так как они универсальны и не зависят от свойств частиц и вещества, то их можно предварительно табулировать. Для генерации случайной величины удобнее пользоваться интег- ральным, а не дифференциальным распределением вероятностей:

$$W(t) = \int_0^t dW = F^{(0)}(t) + B^{-1} F^{(1)}(t) + B^{-2} F^{(2)}(t) + \dots$$

Выражение для этих функций удалось представить в виде хорошо сходящихся рядов, удобных для численного суммирования на ЭВМ:

$$F^{(0)}(t) = e^{-t}$$

$$F^{(1)}(t) = -t e^{-t} \left\{ 1 - c - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)k} \right\} \sim \frac{1}{t} \text{ при } t \rightarrow \infty$$

$$F^{(2)}(t) = t e^{-t} \left\{ c - R - 1 + t \left( \frac{R}{2} + 2 - \frac{3}{2}c \right) + 2c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+2)!k(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \Psi_k \right\}$$

где постоянная Эйлера  $c=0.577$ ,

$$R = \int_0^{\infty} t e^{-t} \ln^2 t dt \approx 0.8237 \quad ; \quad \Psi_k = \frac{5 + \frac{2(2k+1)}{k(k+1)} - 2 \sum_{i=2}^{k+1} \frac{1}{i}}{k(k+1)(k+2)}$$

$$\text{При } t \gg 1 \quad F^{(2)}(t) \approx \frac{2}{t^2} \left[ \frac{1}{c} + \ln t \right]$$



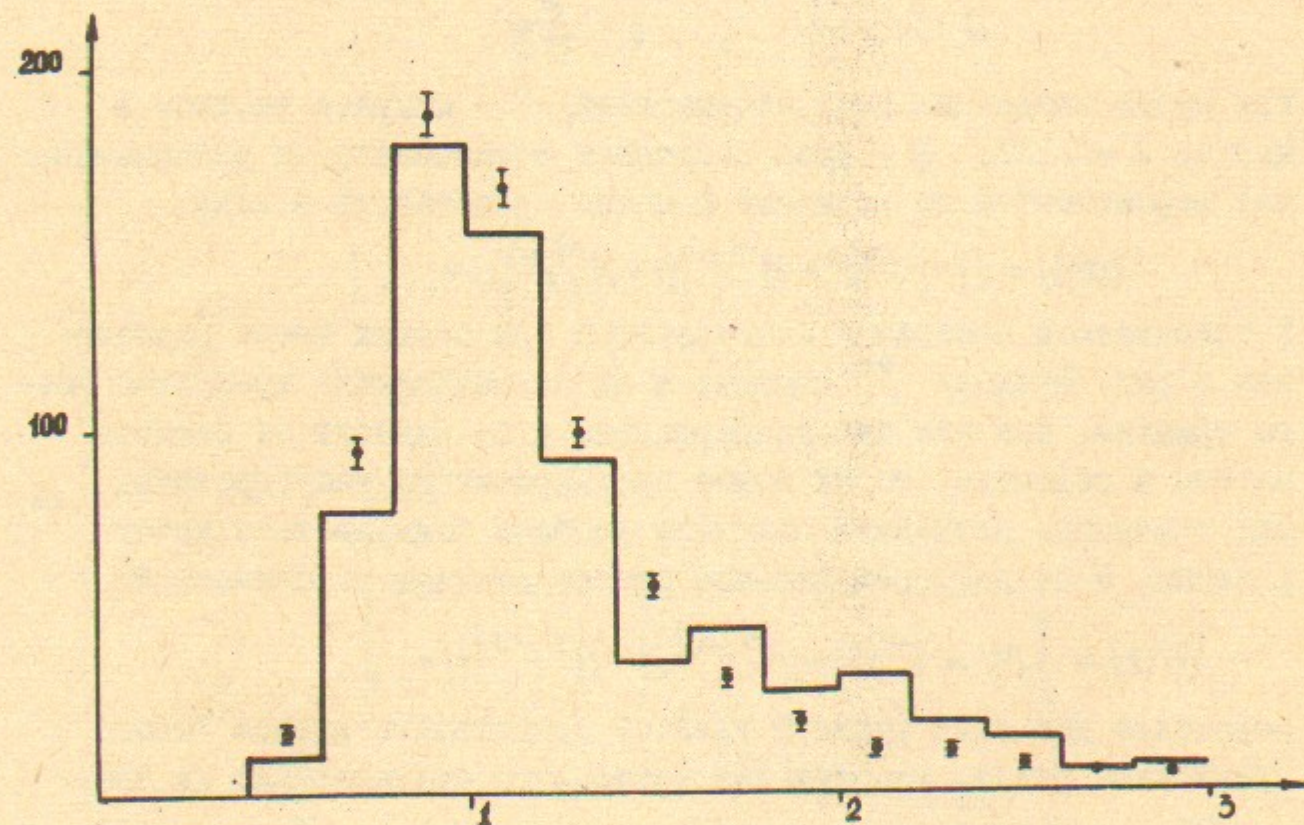


Рис.4

Амплитудное распределение для космических частиц в первом запускающем сцинтилляционном счетчике: гистограмма - моделирование, точки - эксперимент.

На рис.5 приведены графики функций  $F^{(0)}, F^{(1)}, F^{(2)}$ . Для получения вероятности необходимо решить трансцендентное уравнение  $V - \ln V = b$ . В программе использовалось приближенное решение с максимальной погрешностью 0.6% во всем интервале существования решения  $(1, \infty)$ :

$$V = \frac{b}{2} \left( 1 + \frac{\ln b}{b-1} \right) \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{b^2}} \right)$$

На рис.6 изображено интегральное распределение вероятностей по углу рассеяния (единицы измерения - градусы), рассчитанное по этим формулам для электрона с энергией 500 Мэв, прошедшего 1 см сцинтилляционной пластмассы. Для сравнения с экспериментом лучшим процессом является рождение двух заряженных К-мезонов, так как многократное рассеяние для них при энергии 510 Мэв

значительно превышает неточности в искровых камерах. На рис.7 представлено распределение по углу отклонения от компланарности треков К-мезонов. По оси ординат отложено количество событий, полученных в моделирующей программе. Точками с ошибками указаны экспериментальные данные. Распределения нормированы на одно и то же полное количество событий.

### 3/ распад нестабильных частиц

В этом случае коэффициент поглощения на единицу длины не зависит от свойств среды:

$$K = \frac{1}{\beta \gamma (c\tau)}$$

где  $(c\tau)$  - произведение времени жизни в покое на скорость света (см). Для заряженных частиц со сравнительно большим временем жизни может оказаться существенным распад после остановки в веществе за счет ионизационных потерь. Поэтому для нестабильных частиц, остановившихся в веществе, выбирается случайное время до распада в соответствии с распределением вероятностей  $dW = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt$ . Продукты распада запоминаются и рассматриваются наравне с другими частицами. Выбор энергий и направлений продуктов распада производится тем же методом, что и при столкновении электрона с позитроном. Приведем использованные выражения для квадратов матричных элементов различных распадов.

#### а/ $\mu$ -мезоны

Единственная мода распада - это  $\mu \rightarrow e \gamma \nu$ . Для распада неполяризованного мюона квадрат матричного элемента, просуммированный по поляризациям конечных частиц, имеет вид /17/:



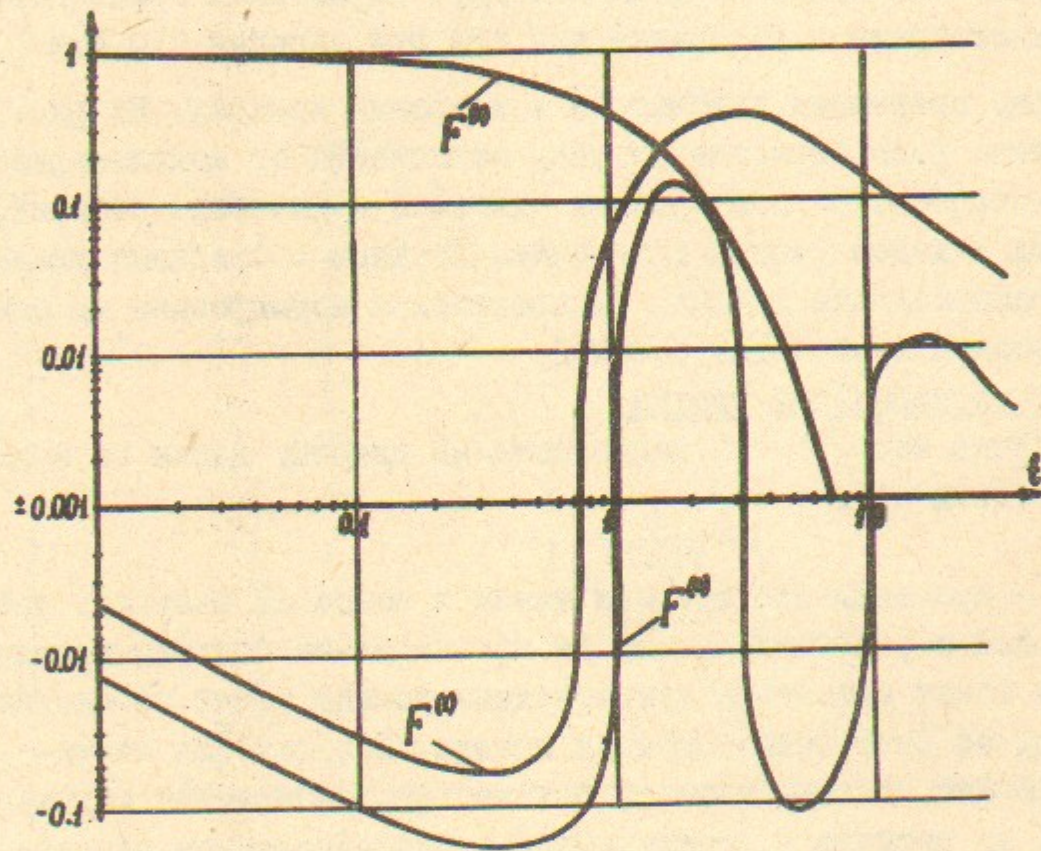


Рис.5

Графики универсальных функций  $F^{(0)}$ ,  $F^{(1)}$ ,  $F^{(2)}$  — первых трех членов разложения интегральной функции распределения вероятностей по углу рассеяния в теории Мольера.

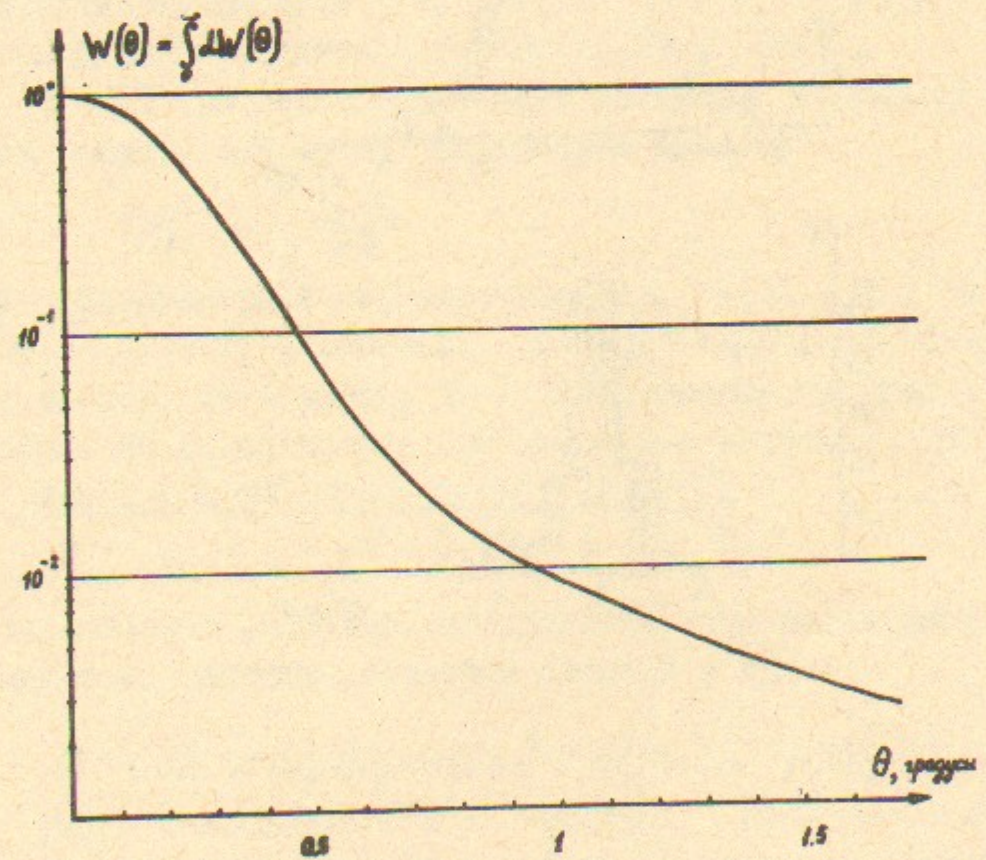


Рис.6

Интегральное распределение вероятностей по углу рассеяния электрона с энергией 500 Мэв, проходящего через 1 см сцинтиллятора.



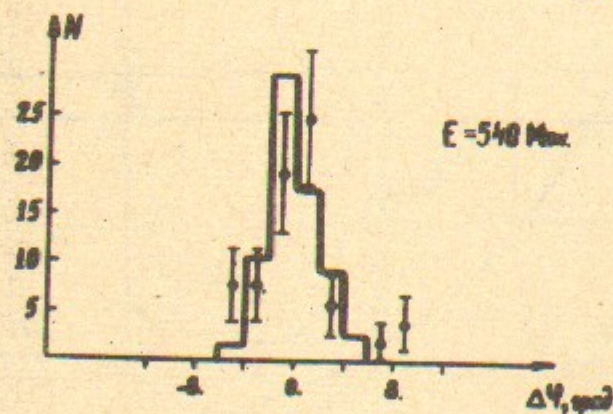
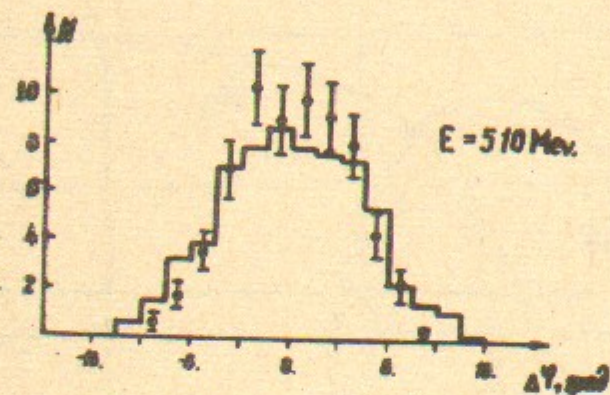


Рис. 7

Распределение событий процесса  $e^+e^- \rightarrow K^+K^-$  по углу отклонения от компланарности треков K-мезонов и оси пучка: гистограмма - моделирование, точки - эксперимент.

$$|M|^2 \sim (q K_2)(K_1 K_3)$$

где  $q, K_1, K_2, K_3$  - 4-импульсы  $\mu$ -мезона, электрона и двух нейтрино соответственно.

б/  $\pi$ -мезоны

Двухчастичные распады ( $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ ,  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu$ ) изотропны и разыгрываются согласно (I.2) с  $|M|^2 = 1$ .

Для моды  $\pi^0 \rightarrow e^+e^-\gamma$  простейшее феноменологическое выражение для матричного элемента имеет вид:

$$|M|^2 = (kq)^2 + \frac{2m_e^2}{S} [(p_k)^2 + (p_e)^2] - 2(1 - \frac{2m_e^2}{S})(p-k)(p-k)$$

где  $q, k, p_e$  - 4-импульсы  $\pi^0, \gamma$  и  $e^\pm$  соответственно,

$$S = (p_e + p_\gamma)^2$$

в/ K-мезоны

Двухчастичные распады ( $K_s \rightarrow \pi^+\pi^-, K_s \rightarrow 2\pi^0, K^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^0, K^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu$ ) изотропны и разыгрываются согласно (I.2) с  $|M|^2 = 1$ .

Для  $K \rightarrow 3\pi$  распадов отклонение диаграммы Далица от равномерности принято описывать "параметром наклона":

$$|M|^2 \sim 1 + g \frac{S_3 - S_0}{m_\pi^2}$$

где  $g$  - безразмерный параметр наклона,  $S_i = (p_k - p_i)^2 = (m_k - m_i)^2 - 2m_k T_i$ ,  $i=1,2,3$ ,  $S_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 S_i = \frac{1}{3}(m_k^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)$ ,  $p_i$  - 4-вектор,  $m$  - масса,  $T_i$  - кинетическая энергия  $i$ -ого  $\pi$ -мезона. Мы использовали среднемировые значения из [18]:

I распад	I $K_s \rightarrow 3\pi$	I $K_s \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$	I $K^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^+\pi^0$	I $K^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^-\pi^0$
I g	I 0	I .65	I .55	I .21

Для полуплеитонных распадов, предполагая, что вклад дает лишь векторный ток, запишем матричный элемент в виде:

$$M = f_+(t)[(p_k + p_\pi)_\mu \bar{U}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) U_\nu] + f_-(t)[m_e \bar{U}_e (1 + \gamma_5) U_\nu]$$

где  $p_k, p_\pi$  - 4-импульсы K и  $\pi$ -мезона,  $m_e$  - масса лептона,

$f_+, f_-$  - безразмерные формфакторы, зависящие лишь от  $t = (p_k - p_\pi)^2$ . В предположении линейной зависимости  $f_\pm$  от  $t$  запишем их в виде

$$f_\pm(t) = f_\pm(0) \left[ 1 + \lambda_\pm \frac{t}{m_\pi^2} \right]$$

В  $K_{e3}$  распадах член с  $f_-(t)$  пропорционален  $m_e^2$  и его вкладом можно пренебречь. Данные по  $K_{\mu 3}$  распадам указывают на постоян-



ство  $f$ , т.е.  $\lambda = 0$ . Тогда распределение в  $K_{\mu\alpha}$  распаде можно описать двумя параметрами:  $\lambda$  и  $\gamma = f(0)/f_+(0)$ . Из экспериментальных данных  $\lambda \approx 0.03$  для всех  $K_{e\alpha}$  и  $K_{\mu\alpha}$  распадов,  $\gamma \approx -0.45$  для распадов  $K^+$  и  $-0.17$  для  $K_+$ .

Заметим также, что мы пренебрегали CP-нарушающими распадами  $K_+ \rightarrow \pi^+ e^- \nu$ ,  $K_+ \rightarrow \pi^+ \mu^- \nu$ , т.е. моделировали лишь  $K_+ \rightarrow \pi^+ e^+ \nu$  и  $K_+ \rightarrow \pi^+ \mu^+ \nu$ .

#### г/ $\eta^0$ -мезон

Распад  $\eta^0 \rightarrow \gamma\gamma$  изотропен и моделируется согласно (1.2) с  $|M|^2 = 1$ .

При розыгрыше распадов  $\eta^0 \rightarrow 3\pi$  можно пренебречь неравномерностью диаграммы Далаца для моды  $\eta^0 \rightarrow 3\pi^0/18/$ , а для моды  $\eta^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  запишем следующее выражение для квадрата матричного элемента, опираясь на результаты эксперимента /19/:

$$|M|^2 \sim 1 - 1.15\gamma + 0.16\gamma^2$$

где  $\gamma = 3T_0/Q - 1$ ,  $Q = m_\eta - 3m_\pi$ ,  $T_0$  - кинетическая энергия  $\pi^0$ -мезона.

Для мод распада  $\eta^0 \rightarrow \pi^0 \gamma\gamma$  и  $\eta^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$  простейшие феноменологические выражения для матричных элементов дают:

$$|M|^2 \sim (p_1 p_2)^2$$

для  $\eta^0 \rightarrow \pi^0 \gamma\gamma$ , где  $p_{1,2}$  - 4-импульсы фотонов и

$$|M|^2 \sim 2(p_1 p_2)(p_1 p_1)(p_2 p_2) - m_\pi^2 [(p_1 p_1)^2 + (p_2 p_2)^2]$$

для  $\eta^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma$ , где  $p_{1,2}$  - 4-импульсы  $\pi$ -мезонов,  $p_\gamma$  - 4-импульс фотона.

Для моды  $\eta^0 \rightarrow e^+ e^- \gamma$  использовалось то же выражение для матричного элемента, что и в случае  $\pi^0 \rightarrow e^+ e^- \gamma$ .

На розыгрыш 1000 актов распада уходит 0.2 минуты машинного времени в случае двухчастичных распадов и 2-3 минуты для трехчастичных мод распада.

#### 4/ тормозное излучение

Вероятность излучения  $\gamma$ -кванта с энергией  $E_\gamma$  при прохождении электрона или позитрона через слой вещества толщиной  $X$  вычисляется по формуле /20/:

$$dW = 1.40 \cdot 10^{-5} \frac{Z(Z+1)X\rho dE}{\lambda} \left\{ \left[ \frac{4}{3} \left( \ln \frac{183}{\sqrt{Z}} - f(Z) + \frac{1}{9} \right) \frac{1-E}{E} A(\delta) + \left[ \ln \frac{183}{\sqrt{Z}} - f(Z) \right] E B(\delta) \right\}$$

где

$$E = \frac{E_\gamma}{E}; \quad \delta = \frac{136 m_e E}{\sqrt{Z} E - E}; \quad f(Z) = \left( \frac{Z}{137} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \left( k^2 + \frac{Z^2}{137^2} \right)}$$

$$A(\delta) = \frac{3f_1(\delta) - f_2(\delta) + 8 \left[ \ln \frac{183}{\sqrt{Z}} - f(Z) \right]}{3f_1(0) - f_2(0) + 8 \left[ \ln \frac{183}{\sqrt{Z}} - f(Z) \right]}; \quad B(\delta) = \frac{f_1(\delta) + 4 \left[ \ln \frac{183}{\sqrt{Z}} - f(Z) \right]}{f_1(0) + 4 \left[ \ln \frac{183}{\sqrt{Z}} - f(Z) \right]}$$

$$f_1(\delta) = 20.867 - 3.242\delta + 0.625\delta^2 \quad \text{и} \quad f_2(\delta) = 20.209 - 1.938\delta - 0.086\delta^2 \quad \text{при} \quad \delta < 1$$

$$f_1(\delta) = f_2(\delta) = 21.12 - 4.184 \ln(\delta + 0.952) \quad \text{при} \quad \delta > 1$$

Плотность вероятности стремится к бесконечности при уменьшении энергии  $\gamma$ -кванта до нуля, поэтому необходимо ввести минимальную энергию излучения. Для повышения эффективности генерирования случайных значений энергии вводится замена переменных:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \exp(\alpha t), \quad 0 \leq t < 1, \quad \text{где} \quad \varepsilon_0 = \frac{E_{\min}}{E}, \quad \alpha = \ln \frac{E - m}{E_{\min}}. \quad \text{Величина } t \text{ на интервале } (0,1) \text{ имеет распределение вероятностей}$$

$$dW = F_1(t) X dt = 1.40 \cdot 10^{-5} \frac{Z(Z+1)X\rho}{\lambda} \left\{ \left[ \frac{4}{3} \left( \ln \frac{183}{\sqrt{Z}} - f(Z) + \frac{1}{9} \right) (1-E) A(\delta) + \left[ \ln \frac{183}{\sqrt{Z}} - f(Z) \right] E^2 B(\delta) \right\} X dt$$

Функция  $F_1(t)$  достигает своего максимума в точке  $t=0$ . Коэффициент поглощения для данного процесса записывается в виде

$$K = F_1(0) > \int F_1(t) dt$$

Если происходит взаимодействие в соответствии с этим коэффициентом, то выбирается случайная величина  $\tau_1$ , равномерно распределенная на интервале  $(0,1)$ , и для нее вычисляется функция  $F_1(\tau_1)$ . Затем генерируется другое случайное число  $\tau_2$  и проверяется неравенство  $\tau_2 F_1(0) < F_1(\tau_1)$ . В случае выполнения неравенства  $\gamma$ -кванту приписывается энергия  $E_\gamma = E_0 \exp(\alpha \tau_1)$ , а электрону  $E' = E - E_\gamma$ , в противном случае считается, что никакого взаимодействия не произошло, и путь частицы моделируется дальше. Следует обратить внимание на то, что второй раз функция вычисляется после перемещения частицы в предполагаемую точку взаимодействия, т.е. при уменьшающейся энергии электрона, а максоранта  $F_1(0)$  осталась прежней. Этим достигается правильный учет зависимости вероятности излучения от энергии электрона. Такой прием применим ко всем взаимодействиям заряженных частиц, вероятность которых падает с энергией. Так как размеры электрон-фотонного ливня определяются процессом многократного рассеяния электронов и позитронов, то распределение излученных  $\gamma$ -квантов по углу отклонения от направления первоначальной частицы взято в приближенном виде и независимым от их энергетического распределения:

$$\frac{dW}{d\cos\theta} = \frac{m^2}{2(E - p\cos\theta)^2}$$



где  $E, P$  — энергия и импульс начального электрона. Это распределение является основной частью более точного распределения, приведенного в /21/. Если  $\tau$  — случайная величина, равномерно распределенная на интервале  $(0,1)$ , то угол излучения  $\gamma$ -кванта определится из соотношения:

$$\cos\theta = 1 - \frac{2m^2\tau}{m^2 + 2P(1-\tau)(E+P)} \approx 1 - \frac{m^2\tau}{2E^2(1-\tau + m^2/4E^2)}; \theta \approx \frac{m}{E} \sqrt{\frac{\tau}{1-\tau + m^2/4E^2}}$$

Угол отклонения электрона от своего первоначального направления принимается равным нулю.

#### 5/ рождение электрон-позитронных пар

Вероятность рождения пары  $\gamma$ -квантом в поле атомного ядра записывается в виде /20/:

$$\frac{dW}{d\varepsilon} = F_2(\varepsilon)X = 1.40 \cdot 10^{-5} \frac{Z^2 X \rho}{A} \left\{ \left[ \frac{2}{3} \left( \ln \frac{183}{\sqrt{Z}} - f(Z) \right) - \frac{1}{36} \right] C(\delta) + \left[ \frac{4}{3} \left( \ln \frac{183}{\sqrt{Z}} - f(Z) \right) + \frac{1}{9} \right] \left( \varepsilon - \frac{1}{2} \right)^2 A(\delta) \right\}$$

где  $\varepsilon = E_+/E$ ,  $\delta = \frac{136}{\sqrt{Z}} \frac{m}{E} \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$ ,  $E_+$  — энергия рожденного позитрона,  $E$  — энергия начального  $\gamma$ -кванта,

$$C(\delta) = \left\{ 3f_1(\delta) + f_2(\delta) + 16 \left[ \ln \frac{183}{\sqrt{Z}} - f(Z) \right] \right\} / \left\{ 3f_1(0) + f_2(0) + 16 \left[ \ln \frac{183}{\sqrt{Z}} - f(Z) \right] \right\}$$

Функции  $A(\delta)$ ,  $B(\delta)$ ,  $f_1(\delta)$ ,  $f_2(\delta)$ ,  $f(Z)$  — такие же, как в формулах тормозного излучения. Ввиду трудности интегрирования функции распределения для моделирования этого процесса был применен тот же прием, что и в тормозном излучении. Для ряда веществ было проверено, что при всех энергиях выполняется неравенство:

$$F_2(\varepsilon) < \Psi(\varepsilon) = 1.40 \cdot 10^{-5} \frac{Z^2 X \rho}{A} \left[ \ln \frac{183}{\sqrt{Z}} - f(Z) \right] \frac{[0.04 \ln E + 1] \ln E - 0.5}{[0.04 \ln E + 0.15] \ln E + 6}$$

Тогда коэффициент поглощения полагаем равным:  $K = \Psi(\varepsilon)$

Если в результате розыгрыша процессов происходит рождение пар, то чтобы компенсировать завышение в коэффициенте поглощения, производится вторичная отбраковка. Если выполняется неравенство

$$F_2(\varepsilon) < \tau_1 \Psi(\varepsilon) / (1 - 2m/E), \quad \varepsilon = m/E + \tau_2 (1 - 2m/E)$$

где  $\tau_1, \tau_2$  — случайные числа на интервале  $(0,1)$ ,

то считается, что в этой точке  $\gamma$ -квант не подвергся никакому взаимодействию, и его пробег моделируется дальше. В случае нарушения неравенства моделируется процесс рождения пары. Позитрону приписывается энергия  $E_+ = \varepsilon E$ , а электрону  $E - E_+$ . Как уже указывалось раньше, определяющим процессом для размеров электрон-фотонного ливня является многократное рассеяние, поэтому угловое распределение позитронов генерируется по тем же формулам, что в тормозном излучении. Угол вылета электрона принимается равным

позитронному, причем в азимутальной проекции скорости направлены в противоположные стороны.

#### 6/ комптон-эффект

Рассеяние  $\gamma$ -квантов на электронах учитывается в приближении свободных электронов /22/:

$$dW = 0.15 \frac{Z \rho X}{A} \frac{d\varepsilon_1}{\varepsilon^2} \left[ \frac{d}{d_1} + \frac{d_1}{d} + \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} \right) \left( 2 + \frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} \right) \right]$$

где  $d = \frac{E}{m}$ ,  $d_1 = \frac{E'}{m}$ . Интегрируя по  $d_1$  от  $\frac{d}{1+2d}$  до  $d$ , получим коэффициент поглощения:

$$K = \frac{W}{X} = 0.15 \frac{Z \rho}{A} \frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \left( d - 2 - \frac{2}{\varepsilon} \right) \ln(1+2d) + \frac{2}{(1+2d)^2} (2 + 8d + 9d^2 + d^3) \right]$$

Если происходит взаимодействие, то выбор случайной энергии рассеянного  $\gamma$ -кванта  $E'$  производится методом Неймана. Для повышения эффективности делаем замену  $d_1 = d(1+2d)^{t-1}$ . Распределение вероятностей по параметру  $t$  на интервале  $(0,1)$  принимает вид:

$$\frac{dW}{dt} \sim d + \frac{d^2}{2} + \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} \right) d_1 \left( 2 + \frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} \right) = F(d_1), \quad \text{где } d_1 = d(1+2d)^{t-1}$$

Функция  $F(d_1)$  достигает максимума при  $d_1 = d$  или  $t = 1$ .  $F(d) = 2d$ . Эффективность генерирования, т.е. отношение числа испытаний с положительным исходом к полному числу испытаний, при таком подходе не меньше 50%. Угол вылета рассеянного  $\gamma$ -кванта получается из соотношения:  $1 - \cos\theta = 1/d_1 - 1/d$

Угол вылета электрона отдачи по отношению к направлению движения начального кванта равен  $\arccos \frac{m(d-d_1)(1+1/d)}{\sqrt{E^2 - m^2}}$ , где  $E = m(1+d-d_1)$  — энергия электрона.

#### 7/ фотоэффект

Для  $\gamma$ -квантов с энергией  $I$  Мэв и выше фотоэлектроны в основном излучаются с К-оболочки атома и только около 20% от общего количества фотоэлектронов излучаются с высших уровней. Поэтому для описания этого процесса используется вероятность фотоэффекта с К-оболочки, умноженная на 1.25 для учета высших уровней в атоме и еще на 2, так как на К-оболочке два электрона. Ионизационный потенциал для К-оболочки вычисляется по формуле  $I = \frac{m}{2} (Zd)^2$ , где  $Z$  — атомный номер,  $d$  — постоянная тонкой структуры. При энергии  $\gamma$ -кванта больше  $\frac{m+1}{2}$  коэффициент поглощения вычисляется по формуле /23/:



$$K = 102.9 \frac{(Z\Delta)^5 \rho (\gamma^2 - 1)^{3/2}}{A (\gamma - 1)^5} \left\{ \frac{4}{3} + \frac{\gamma(\gamma - 2)}{\gamma + 1} \left[ 1 - \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \right] \right\} S$$

где  $\gamma = \frac{m+E}{m}$ ,  $E$  - энергия  $\gamma$ -кванта,  $S = \exp\{Z\Delta[-\pi + 2Z\Delta(1 - \ln Z\Delta)]\}$  поправка на конечные размеры ядра /24/.

В области энергий  $I < E < \frac{m+I}{2}$  коэффициент поглощения записывается в виде /25/:

$$K = 117.6 \frac{(Z\Delta)^5 \rho \exp(4\gamma \arctan \gamma)}{AE^2} / [e^{2\pi\gamma} - 1]$$

где  $\nu^2 = \frac{1}{E-I}$ . Для энергий  $E < I$  вероятность поглощения  $\gamma$ -квантов берется постоянной и равной пределу вероятности для нерелятивистского случая при  $\gamma \rightarrow \infty$ . Излученный фотоэлектрон имеет энергию  $E+m-I$  и направление движения, совпадающее с направлением начального кванта.

### 8/ рассеяние заряженных частиц на электронах атома

В этом процессе существенен вклад энергичных электронов отдачи, так как они имеют возможность, например, родившись в стенке вакуумной камеры, пройти затем через координатные камеры, образовав дополнительный трек. В этом случае энергия вторичных электронов много больше энергии связи, поэтому все сечения взяты в приближении свободных электронов /23/:

для рассеяния электронов на электронах

$$d\sigma = 2\pi z_0^2 \frac{d\Delta}{\Delta^2} F_1(\Delta) = 2\pi z_0^2 \frac{d\Delta}{\Delta^2} \frac{1}{\gamma^2 - 1} \left\{ \frac{(\gamma-1)^2 \gamma^2}{(\gamma-1-\Delta)^2} - \frac{2\gamma^2 + 2\gamma - 1}{\gamma - 1 - \Delta} \Delta + \Delta^2 \right\}$$

для рассеяния позитронов на электронах

$$d\sigma = 2\pi z_0^2 \frac{d\Delta}{\Delta^2} F_2(\Delta) = 2\pi z_0^2 \frac{d\Delta}{\Delta^2} \frac{1}{\gamma^2 - 1} \left\{ \gamma^2 - \frac{2\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma + 1} \Delta + \frac{3\gamma^2 + 6\gamma + 4}{(\gamma + 1)^2} \Delta^2 - \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2} \Delta^3 + \frac{1}{(\gamma + 1)^2} \Delta^4 \right\}$$

для рассеяния тяжелых частиц на электронах (использовалось сечение рассеяния мюонов)

$$d\sigma = 2\pi z_0^2 \frac{d\Delta}{\Delta^2} F_3(\Delta) = 2\pi z_0^2 \frac{d\Delta}{\Delta^2} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \left\{ 1 - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{\Delta}{\Delta_{max}} + \frac{m^2}{2E^2} \Delta^2 \right\}$$

где  $\Delta$  - отношение кинетической энергии электрона отдачи к массе электрона,  $\gamma = \frac{E}{m}$ ,  $z_0 = 2.818 \cdot 10^{-13}$  см.

Несмотря на то, что все эти сечения интегрируются аналитически, здесь применен тот же метод моделирования пробегов, что и в тормозном излучении, так как при этом правильно учитывается зависимость сечения от энергии частицы, к тому же в точке взаимодействия для генерирования параметров продуктов взаимодействия все равно необходимо использовать метод Неймана. Нижняя граница

интервала изменения  $\Delta$  для всех трех случаев одинакова и равна

$$\Delta_{min} = \frac{\eta}{m}, \quad \text{где } \eta - \text{максимальная энергия возбуждения вторичных частиц в процессе непрерывных ионизационных потерь.}$$

Верхняя граница определяется кинематикой и равна:

$$\Delta_{max} = \begin{cases} \frac{\gamma-1}{2} & \text{для электронов} \\ \gamma-1 & \text{для позитронов} \\ \frac{2(\gamma^2-1)}{(2\gamma+\frac{m}{M})^2+1} & \text{для тяжелых частиц} \end{cases}$$

Для повышения эффективности моделирования делаем замену переменных:

$$\Delta = \frac{\Delta_{min}}{1 - (1 - \Delta_{min}/\Delta_{max})t}, \quad 0 < t < 1$$

Тогда коэффициент поглощения запишется в виде:

$$K_i = 0.3005 Z\rho / \Delta_{min} A [1 - (\Delta_{min}/\Delta_{max})_i] F_{i,max}$$

где  $F_{i,max}$  - максимум функций  $F_1, F_2, F_3$ , причем  $F_{1,max} = F_1(\frac{\Delta-1}{2})$ ,  $F_{2,max} = F_2(0)$ ,  $F_{3,max} = F_3(0)$ . При генерировании параметров вторичных частиц энергия рассеянной частицы полагается равной  $E - m\Delta$ , угол рассеянной частицы находим из соотношения:

$$\cos\theta_p = \frac{E^2 - M^2 - m\Delta(E+m)}{\sqrt{(E^2 - M^2)(E^2 - M^2 - m\Delta(2E - m\Delta))}}$$

а угол вылета электрона отдачи равен:

$$\cos\theta_e = \Delta \frac{E+m}{\sqrt{E^2 - M^2} \sqrt{\Delta(1+\Delta)}}$$

На рис.8-II приведены амплитудные распределения в сэндвиче для четырех последовательных пластин сцинтиллятора, считая от вакуумной камеры ускорителя. По оси абсцисс отложена амплитуда в единицах наиболее вероятной амплитуды от космических мюонов. В программе моделировался процесс упругого рассеяния электрона и позитрона на большие углы (на рисунках изображен гистограммой). При прохождении через вещество учитывались непрерывные ионизационные потери, многократное рассеяние, тормозное излучение, рождение пар, комптон-эффект, фотоэффект, рассеяние на электронах атома, аннигиляция позитрона на лету. Экспериментальные данные приведены точками с ошибками.

### 9/ аннигиляция позитрона на лету

В этом процессе электрон также считается свободным. Коэффициент поглощения вычисляется по формуле /23/:

$$K = 0.1502 \frac{Z\rho}{A(\gamma-1)} \left[ \frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) - \frac{\gamma+3}{\gamma^2 - 1} \right]$$



Дифференциальное распределение по энергии одного из двух квантов записывается в следующем виде:

$$\frac{dW}{d\eta} \sim 2(1+\delta) \left| \frac{1}{\delta+\eta} + \frac{1}{\delta-\eta} \right| - 2 \left| \frac{1}{\delta+\eta} - \frac{1}{\delta-\eta} \right|^2$$

где  $\delta = \frac{\gamma-1}{2}$ ,  $E_\gamma = m(\delta+\eta)$ ,  $0 \leq \eta \leq \sqrt{\delta(\delta-1)}$

Для повышения эффективности генерирования удобно сделать замену переменных:  $\eta = \delta \text{th} \left\{ \frac{\tau}{2} \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \right\}$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$

Тогда распределение вероятностей преобразуется к виду:

$$\frac{dW}{d\tau} \sim 2\delta(1+\delta) - (\delta^2 - \tau^2) - \frac{2\delta^2}{\delta - \tau^2} \leq 2\delta(\delta+1-\sqrt{2})$$

Эффективность генерирования по методу Неймана для такой функции распределения выше 80% при всех энергиях и стремится к 100% при увеличении энергии начального позитрона. Углы вылета  $\gamma$ -квантов находятся по формулам

$$\theta_1 = \arccos \left\{ \frac{\delta+\eta-1}{\delta+\eta} \sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}} \right\} ; \theta_2 = \arccos \left\{ \frac{\delta-\eta-1}{\delta-\eta} \sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}} \right\}$$

#### 10/ неупругие взаимодействия $\pi^-$ - и $\pi^+$ -мезонов с ядрами

На рис. 12 приведена интерполяционная кривая для сечения неупругого взаимодействия  $\pi^-$ -мезонов с ядрами железа (использовались экспериментальные данные из обзора /26/, а также оригинальные работы /27-29/). В рассматриваемом интервале энергий сечения взаимодействий  $\pi^-$ - и  $\pi^+$ -мезонов практически совпадают, сечение с хорошей точностью пропорционально  $A^{2/3}$ , т.е. растет пропорционально геометрическому сечению ядра.

Неупругие взаимодействия  $\pi^-$ -мезонов можно разделить на 3 группы: а/ поглощение, т.е. исчезновение налетающего  $\pi^-$ -мезона без вылета достаточно энергичных частиц, б/ перезарядка, т.е. превращение заряженного  $\pi^-$ -мезона в  $\pi^0$ , в/ вылет нескольких заряженных частиц -  $\pi^-$ -мезонов и осколков ядер. Из экспериментальных данных известно /30/, что на долю перезарядки приходится 10-15% всего неупругого сечения, а доля 3-ей группы процессов сильно зависит от энергии и может достигать 20%. Отсутствие достаточно полных данных о спектре и составе вторичных частиц не позволяет пока корректно учесть процессы 3-ей группы. В выбранной нами модели 15% всего неупругого сечения идет на перезарядку, а в остальных 85% случаев  $\pi^-$ -ме-

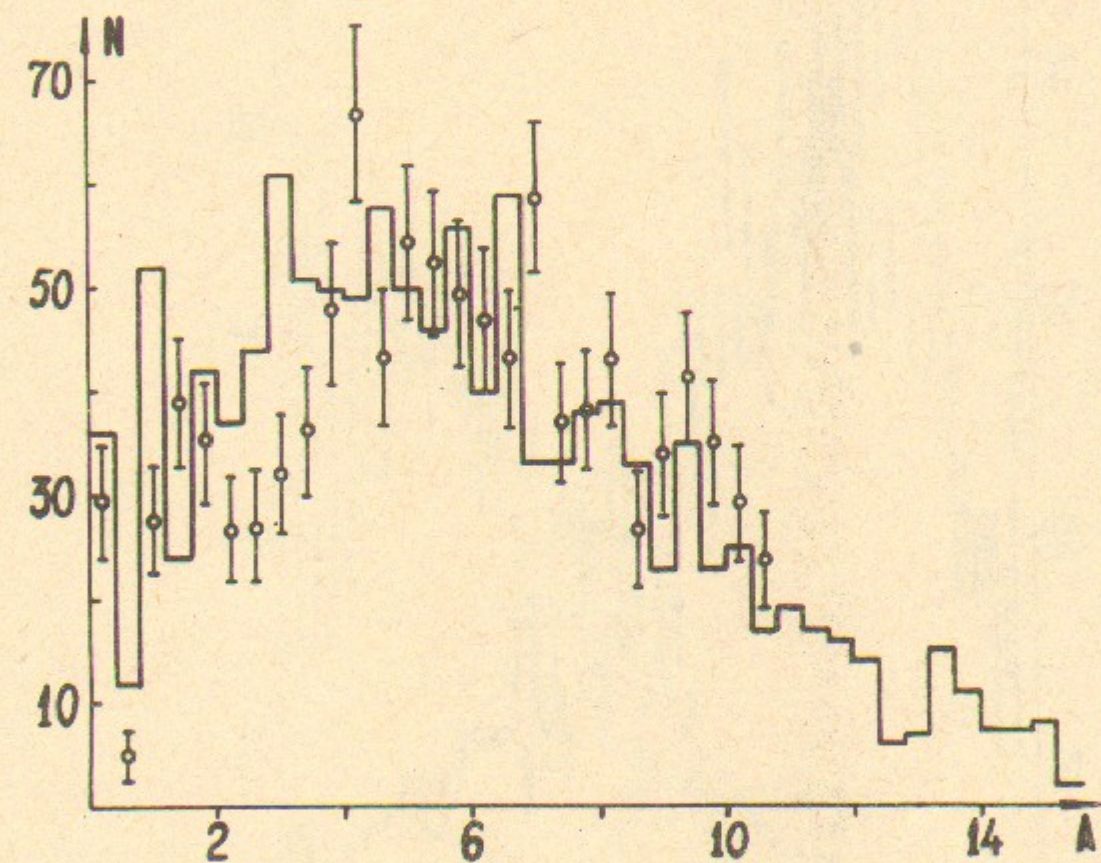


Рис. 8

Амплитудное распределение в первой пластине сэндвича: гистограмма - моделирование, точки - эксперимент.



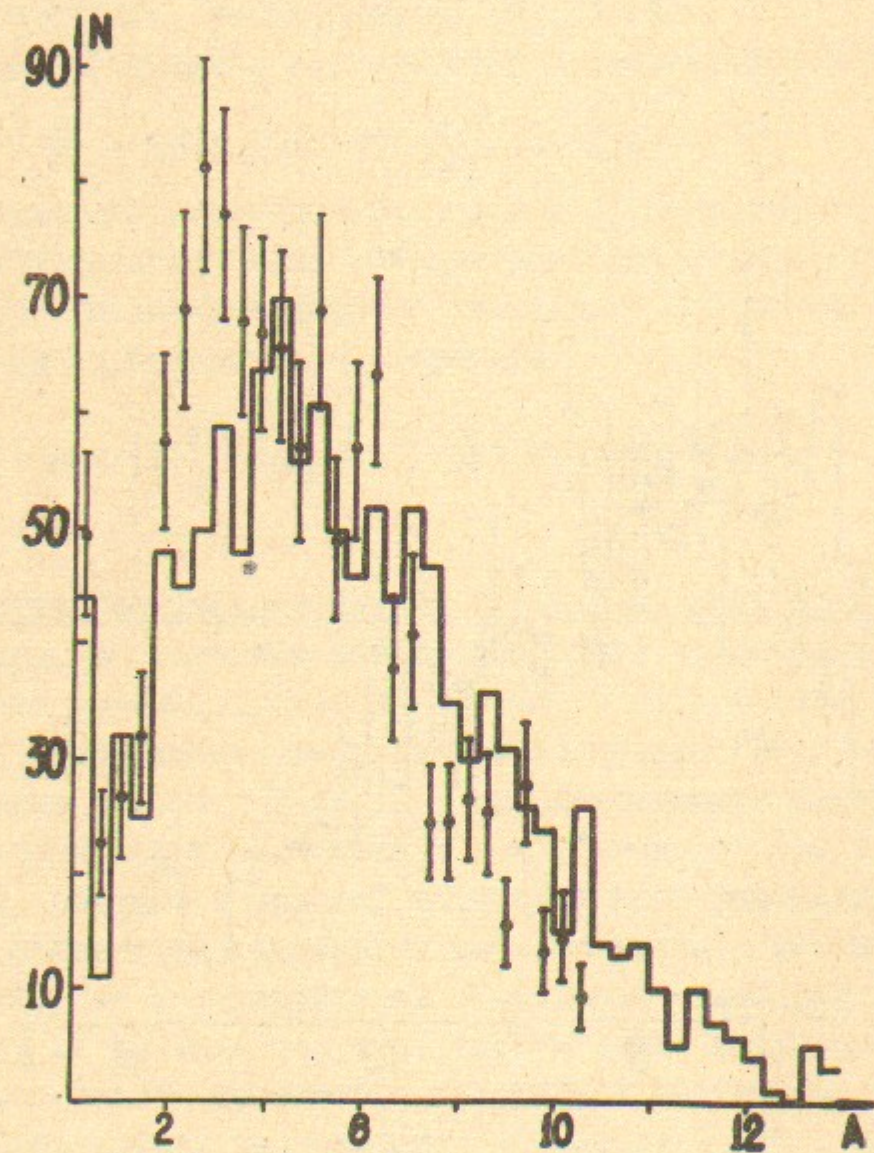


Рис.9

Амплитудное распределение во второй пластине сэндвича:  
гистограмма - моделирование, точки - эксперимент.

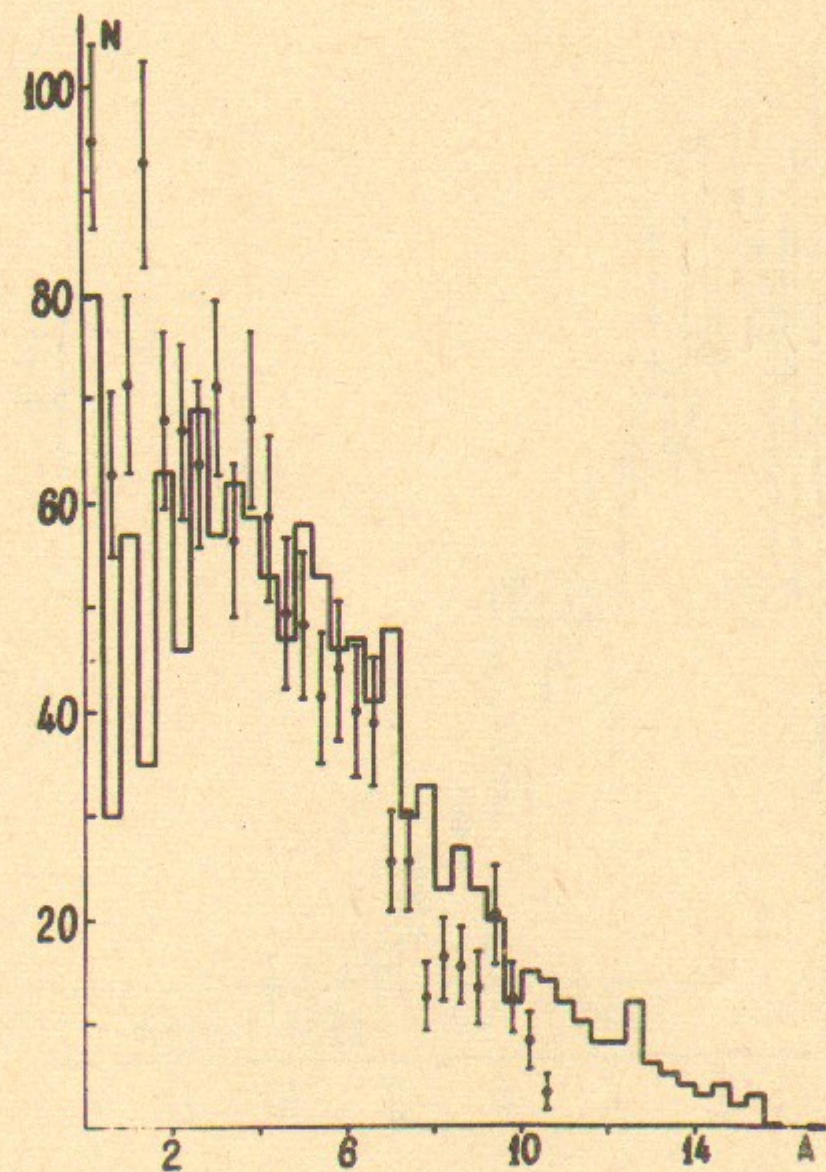


Рис.10

Амплитудное распределение в третьей пластине сэндвича:  
гистограмма - моделирование, точки - эксперимент.



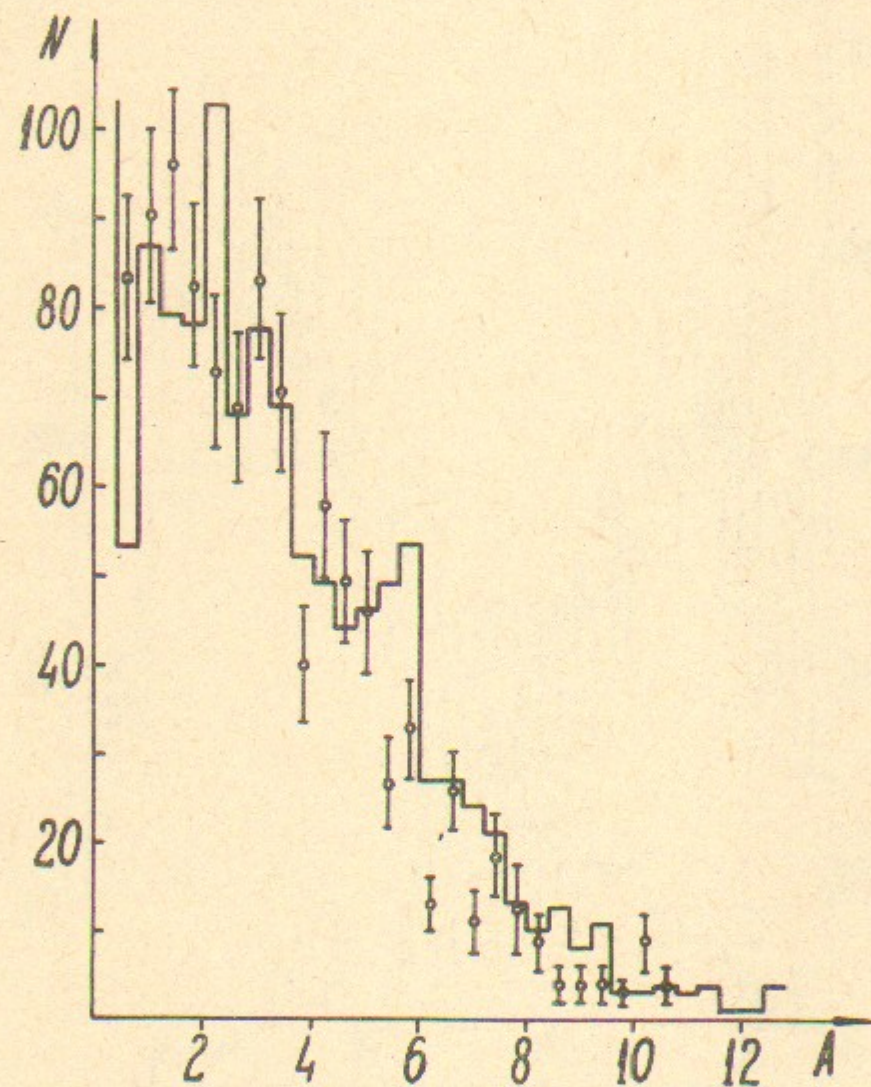


Рис.11

Амплитудное распределение в четвертой пластине сэндвича:  
гистограмма - моделирование, точки - эксперимент.

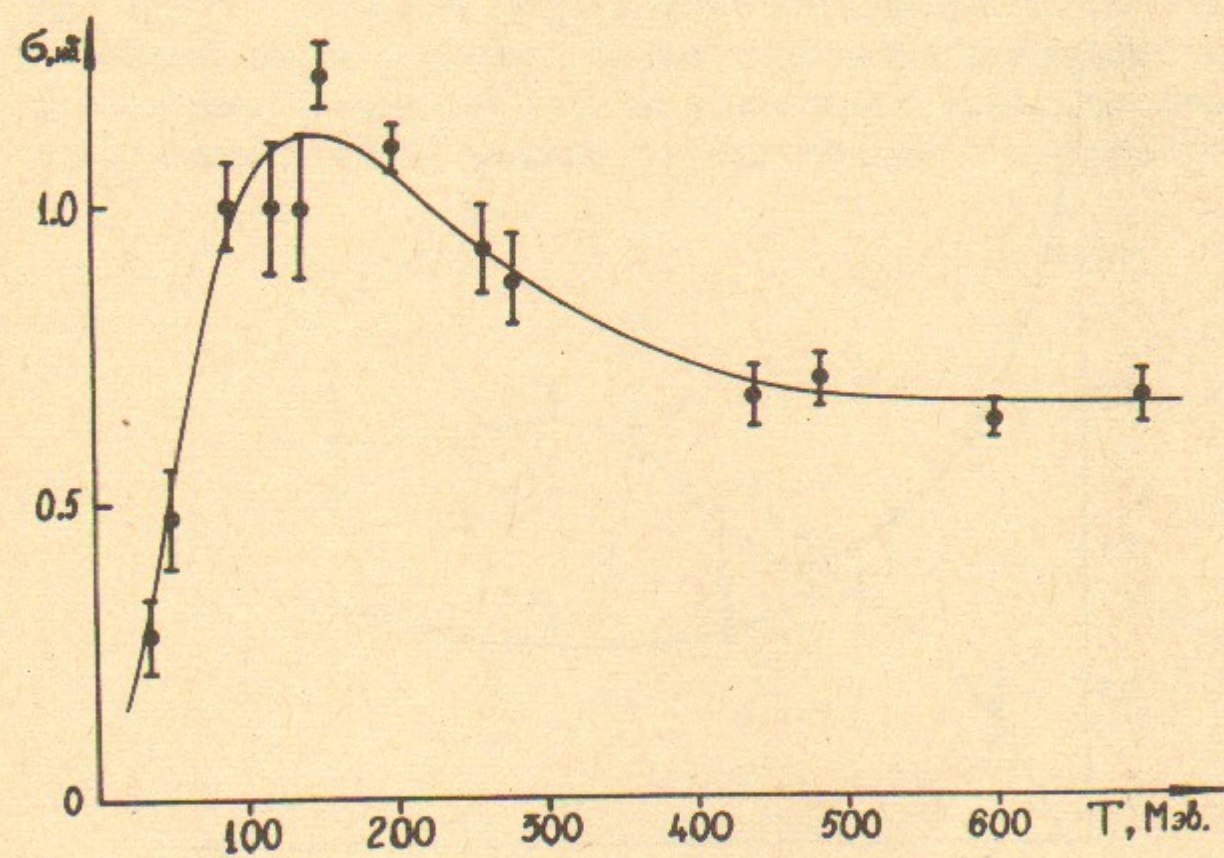


Рис.12

Сечение неупругого взаимодействия  $\pi^+$ -мезонов с ядрами  
железа.



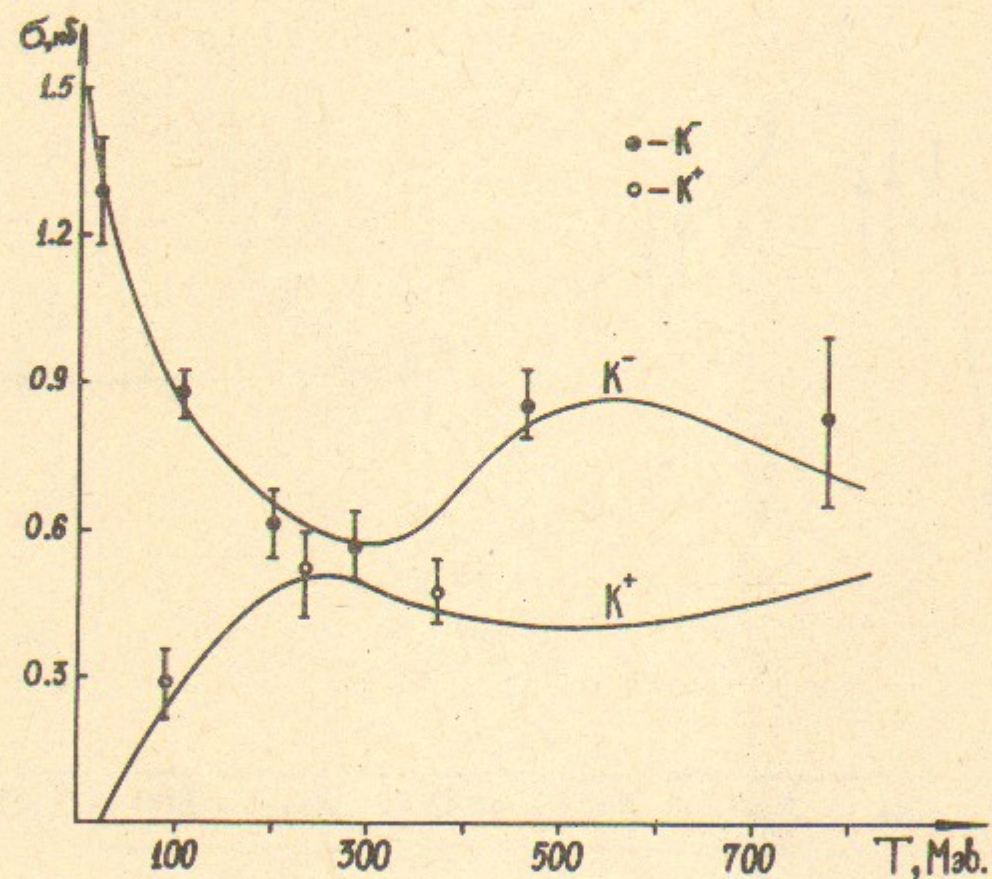


Рис.13  
Сечение неупругого взаимодействия  $K^{\pm}$ -мезонов с ядрами железа.

зон считается поглотившимся.

На рис.13 приведены интерполяционные кривые для сечений неупругого взаимодействия  $K^-$  и  $K^+$ -мезонов с ядрами железа /26/, для других ядер принималось, что  $\sigma \sim A^{2/3}$ . Провзаимодействовавшие  $K$ -мезоны считаются поглотившимися.

Выражение для коэффициента поглощения  $\pi$ - и  $K$ -мезонов имеет таким образом, следующий вид:

$$K = 0.0108 \rho \sigma_{Fe} \left( \frac{A}{56.85} \right)^{-1/3}$$

К настоящему времени имеется лишь одна экспериментальная работа по измерению полного сечения взаимодействия  $K_1^0$ -мезонов с ядрами в диапазоне импульсов 168-343 Мэв/с /31/. Предполагая, что  $\sigma \sim \frac{1}{\nu}$ , можно найти сечение в интересующей нас области энергии вблизи  $\Phi$ -мезона. Данных о продуктах взаимодействия  $K_1^0$  с ядрами практически нет, мы использовали модель, в которой взаимодействие  $K_1^0$ -мезона с ядром приводит к рождению  $3\pi$ .



### Литература

1. V.M.Aulchenko et al. Preprint 75-66, Novosibirsk, 1975.
2. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория, ч.1, Москва, 1968.
3. Г.И.Копылов. Основы кинематики резонансов, Москва, 1970.
4. Н.П.Бусленко, Ю.А.Шрейдер. Метод статистических испытаний, Москва, 1961.
5. В.Н.Байер. УФН, 105, 441(1971).
6. L.M.Kurdadze et al. Preprint 75-67, Novosibirsk, 1975.
7. В.А.Сидоров. Доклад на 18-ой Международной конференции по физике высоких энергий, Тбилиси, 1976.
8. R.Bernabei et al. Lett. Nuovo Cim., 11, 261(1974).
9. S.I.Eidelman. Preprint 75-82, Novosibirsk, 1975.
10. F.M.Renard. Nuovo Cimento, 64A, 979(1969).
11. В.Н.Байер, В.С.Фадин. ЖЭТФ, 61, 476(1971).
12. В.Н.Байер, В.С.Фадин. Ядерная физика, 15, 95(1972).
13. E.A.Uehling. Ann. Rev. Nucl. Sci., 4, 315(1954).
14. T.W.Armstrong, R.G.Alsmiller. Nucl. Instr. Meth., 82, 289(1970).
15. L.D.Landau. Journal of Exp. Phys., 8, 201(1944).
16. H.A.Bethe. Phys.Rev. 89, 1256(1953).
17. Л.Б.Окунь. Слабое взаимодействие элементарных частиц, Москва, 1963.
18. Review of Modern Physics, 48, 1976.
19. M.Gormley et al. Phys. Rev. D2, 501(1970).
20. H.Messel et al. Nucl. Phys., 39, 1(1962).
21. Экспериментальная ядерная физика, под ред. Э.Сегре, т.1, Москва, 1955.
22. O.Klein, Y.Nishina. Zeit. fur Physik. 52, 853(1929).
23. F.Sauter. Annalen der Physik, 9, 217(1931).
24. H.R.Hulme et al. Proc. Roy. Soc., A149, 131(1935).
25. M.Stobbe. Annalen der Physik, 7, 661(1930).
26. В.С.Барашенков, В.Д.Тонеев. Взаимодействие высокоэнергетических частиц и атомных ядер с ядрами, Москва, 1972.
27. E.Bellotti et al. Nuovo Cim., 18A, 75(1973).
28. F.Binon et al. Nucl. Phys. 17B, 168(1970).
29. R.M.Edelstein et al. Phys. Rev. 122, 252(1961).
30. G.Saphir. Phys. Rev. 104, 535(1956).
31. G.A.Sayer et al. Phys. Rev. 169, 1045(1968).

Работа поступила - 6 апреля 1977 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ  
Подписано к печати 25.X-1977 г. МН 03031  
Усл. 2,6 печ.л., 2,1 учетно-изд.л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно  
Заказ № 101.

---

Отпечатано на ротапринтере ИЯФ СО АН СССР