

6

И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 81

Г.Я.Куркин, В.М.Петров, И.К.Седяров

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТЕНОК РЕЗОНАТОРА  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ  
СИЛ ПРИ НАЛИЧИИ ЦЕПИ ОБРАТНОЙ  
СВЯЗИ, СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЙ АМПЛИ-  
ТУДУ ТОКА ВОЗБУЖДЕНИЯ РЕЗОНАТОРА

Новосибирск

1977



Куркин Г.Я., Петров В.М., Седяров И.К.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТЕНОК РЕЗОНАТОРА ПОД ДЕЙСТВИЕМ  
ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ ПРИ НАЛИЧИИ ЦЕПИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ,  
СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЙ АМПЛИТУДУ ТОКА ВОЗБУЖДЕНИЯ РЕЗОНАТОРА

#### А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что наличие цепи обратной связи, стабилизирующей ток возбуждения резонатора, может существенно изменить пороговое напряжение появления неустойчивости стенок резонатора. Получены условия устойчивости для этого случая. На примере резонатора накопителя ВЭШ-2 сопоставлены расчетные и измеренные пороговые напряжения возникновения колебательной неустойчивости для различных параметров цепи обратной связи.



## Введение

Генераторы высокочастотной мощности, питающие ускоряющие резонаторы электрон-позитронных накопителей, для стабилизации работы высокочастотных систем охватываются цепью обратной связи по току возбуждения /1,2/.

При напряжении на резонаторе выше порогового наблюдается механическая неустойчивость стенок резонатора /3,4/. Эта неустойчивость проявляется в том, что если собственная частота резонатора ниже частоты возбуждающего тока, то стенки резонатора начинают колебаться. Частота резонатора из-за этого меняется и напряжение на резонаторе модулируется по амплитуде и фазе с частотой колебания стенок (колебательная неустойчивость). Если же частота резонатора выше частоты возбуждающего тока, то перестройкой частоты тока или собственной частоты резонатора невозможно установить напряжение в некотором диапазоне из-за того, что стенки резонатора под действием ponderomotive сил перемещаются скачком (статическая неустойчивость).

Включение обратной связи, стабилизирующей амплитуду тока возбуждения, может значительно понизить пороговое напряжение, при которых проявляются эти неустойчивости. Ниже приводится исследование влияния обратной связи на порог электромеханической неустойчивости.

### I. Уравнение электромеханических колебаний

На рис. I приведена схема высокочастотной системы с цепью обратной связи. Мощность от генератора 1 поступает на резонатор 3. Напряжение с трансформатора тока 2 поступает на детектор 4. На схему сравнения 6 подаются продетектированное напряжение с детектора 4 и опорное напряжение с источника 5. Сигнал со схемы сравнения изменяет выходной ток генератора так, чтобы разность между продетектированным и опорным напряжением была мала.

Резонатор представляет собой механическую систему с набором резонансных мод механических колебаний. При подъеме напряжения на резонаторе возбуждается одна из механических мод



резонатора. Уравнение движения стенок резонатора под действием ponderomotorных сил ВЧ поля при возбуждении одной моды представляется в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \Omega_0^2 x = \frac{1}{2} A_0 |U|^2, \quad (I)$$

$$x = \frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega_0},$$

где  $\omega_0$  - собственная частота резонатора,  
 $\omega$  - частота питающего резонатор тока,  
 $\delta$  - коэффициент затухания механической моды,  
 $\Omega_0$  - собственная частота механической моды резонатора,  
 $A_0$  - коэффициент, характеризующий связь механической резонансной моды с электрическим резонансным контуром,  
 $|U|^2$  - квадрат амплитуды высокочастотного напряжения на резонаторе (величина, пропорциональная ponderomotorной силе) /3/.

Для определения напряжения на резонаторе рассмотрим электрическую схему на рис.2. Элементы  $R_0$ ,  $L$  и  $C$  - эквивалентные параметры резонатора.  $I_g$  - ток возбуждения резонатора.

Будем рассматривать случай, когда период механических колебаний значительно больше постоянной времени резонатора  $\tau_0 = 2R_0C$ , т.е. выполняется условие  $\tau_0 \Omega_0 \ll 1$ . Тогда для определения напряжения на резонаторе можно воспользоваться методом медленно меняющихся амплитуд /5/. В связи с этим при вычислениях всеми величинами, порядок малости которых выше, чем сама переменная величина или первая производная от этой величины, пренебрегаем. Кроме того, поскольку рассматриваются условия устойчивости, будем делать допущения, исходя из малости амплитуд переменных составляющих величин. Укороченное уравнение для напряжения на резонаторе имеет следующий вид /3/:

$$\tau_0 \frac{dU}{dt} + U(1 + jQ_0 x) = R_0 I_g, \quad (2)$$

$$Q_0 = \frac{R_0}{\omega_0 L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где  $Q_0$  - добротность резонатора.  
 Ток возбуждения представим как сумму токов:

$$I_g = I_{ov} + I_{\lambda\beta} - I_{r\beta} = I_{ov} \left( 1 + \frac{I_{\lambda\beta}}{I_{ov}} - \frac{I_{r\beta}}{I_{ov}} \right), \quad (3)$$

где  $I_{ov}$  - постоянная составляющая комплексной амплитуды тока возбуждения,  
 $I_{\lambda\beta}$  - переменная составляющая комплексной амплитуды тока возбуждения из-за перемещения стенок резонатора,  
 $I_{r\beta}$  - переменная составляющая комплексной амплитуды тока возбуждения из-за воздействия цепи обратной связи.

Переменные составляющие тока возбуждения связаны между собой следующим соотношением:

$$\left( \operatorname{Re} \frac{I_{\lambda\beta}}{I_{ov}} - \operatorname{Re} \frac{I_{r\beta}}{I_{ov}} \right) K_t = \frac{I_{r\beta}}{I_{ov}}, \quad (4)$$

где  $K_t$  - комплексный коэффициент усиления разомкнутой цепи, стабилизирующей ток возбуждения.

Решение этого уравнения запишется, как

$$\operatorname{Re} \frac{I_{r\beta}}{I_{ov}} = \frac{\operatorname{Re} K_t \cdot \operatorname{Re} \frac{I_{\lambda\beta}}{I_{ov}}}{1 + \operatorname{Re} K_t} \quad (5)$$

$$\operatorname{Im} \frac{I_{r\beta}}{I_{ov}} = \frac{\operatorname{Im} K_t \cdot \operatorname{Re} \frac{I_{\lambda\beta}}{I_{ov}}}{1 + \operatorname{Re} K_t}$$



Так как переменные составляющие токов — малые величины, то в уравнениях (5) действительная часть отношений токов — коэффициент амплитудной модуляции, а мнимая — индекс фазовой модуляции.

Для определения  $I_{об}$  и  $I_{лв}$  положим  $K_t = 0$  (цепь обратной связи разорвана). В этом случае:

$$I_{лв} = I_{об} \left( 1 + \frac{I_{лв}}{I_{об}} \right) = I_{ог} - \frac{U}{R_i}, \quad (6)$$

где  $I_{ог}$  — постоянная составляющая комплексной амплитуды генератора тока.

Подставляем (6) в (2) и получаем:

$$\tau_o \frac{dU}{dt} + U(1 + jQ_o x) = \left( I_{ог} - \frac{U}{R_i} \right) R_o \quad (7)$$

Решим это уравнение методом малого параметра [3]. Для этого положим:

$$U = U' + U'', \quad (8)$$

где  $U''$  — малая величина по сравнению с  $U'$ .

Подставляя (8) в (7), приравнявая величины одинакового порядка малости и пренебрегая производной от  $U''$ , получаем

$$U' \left[ (1 + jQ_o x) + \frac{R_o}{R_i} \right] = R_o I_{ог} \quad (9)$$

$$\tau_o \frac{dU'}{dt} + U'' \left[ (1 + jQ_o x) + \frac{R_o}{R_i} \right] = 0$$

Из (9) определим  $U'$  и  $U''$  и подставим их в (8):

$$U = \frac{R_o I_{ог}}{\frac{R_o}{R_i} + 1 + jQ_o x} + \frac{j\tau_o Q_o \frac{dx}{dt}}{\left( \frac{R_o}{R_i} + 1 + jQ_o x \right)^3} \quad (10)$$

Полагаем, что

$$x = x_o + \lambda_o + \lambda_{\sim}, \quad (11)$$

где  $x_o$  — начальная относительная расстройка резонатора,  $\lambda_o, \lambda_{\sim}$  — постоянная и переменная составляющие относительной расстройки под действием пондеромоторных сил.

Подставим (11) и (10) и линеаризуем последнее относительно  $\lambda_{\sim}$ :

$$U = \frac{R_o I_{ог}}{\frac{R_o}{R_i} + 1 + jQ_o(x_o + \lambda_o)} - \frac{jQ_o R_o I_{ог} \lambda_{\sim}}{\left[ \frac{R_o}{R_i} + 1 + jQ_o(x_o + \lambda_o) \right]^2} + \frac{j\tau_o Q_o \frac{d\lambda_{\sim}}{dt} R_o I_{ог}}{\left[ \frac{R_o}{R_i} + 1 + jQ_o(x_o + \lambda_o) \right]^3}$$

Из (12) и (6) получим:

$$I_{лв} = I_{об} \left( 1 + \frac{I_{лв}}{I_{об}} \right) = I_{об} \left( 1 + B\lambda_{\sim} - C \frac{d\lambda_{\sim}}{dt} + jD\lambda_{\sim} - jE \frac{d\lambda_{\sim}}{dt} \right), \quad (13)$$

где

$$I_{об} = I_{ог} \frac{1 + jQ_o(x_o + \lambda_o)}{1 + \frac{R_o}{R_i} + jQ_o(x_o + \lambda_o)}, \quad (14)$$

$$B = \frac{\frac{R_o}{R_i} \left( 2 + \frac{R_o}{R_i} \right) Q_o^2 (x_o + \lambda_o)}{\left[ \left( \frac{R_o}{R_i} + 1 \right)^2 + Q_o^2 (x_o + \lambda_o)^2 \right] \left[ 1 + Q_o^2 (x_o + \lambda_o)^2 \right]},$$

$$C = \frac{\frac{R_o}{R_i} \left[ \left( \frac{R_o}{R_i} + 1 \right)^2 + 2 \left( \frac{R_o}{R_i} + 1 \right) - Q_o^2 (x_o + \lambda_o)^2 \right] \tau_o Q_o^2 (x_o + \lambda_o)}{\left[ \left( \frac{R_o}{R_i} + 1 \right)^2 + Q_o^2 (x_o + \lambda_o)^2 \right]^2 \left[ 1 + Q_o^2 (x_o + \lambda_o)^2 \right]},$$



$$D = \frac{\frac{R_o}{R_i} \left[ 1 + \frac{R_o}{R_i} - Q_o^2 (x_o + \lambda_o)^2 \right]}{\left[ \left( \frac{R_o}{R_i} + 1 \right)^2 + Q_o^2 (x_o + \lambda_o)^2 \right] \left[ 1 + Q_o^2 (x_o + \lambda_o)^2 \right]}$$

$$E = \frac{\frac{R_o}{R_i} \left[ \left( \frac{R_o}{R_i} + 1 \right)^2 - 2 \left( \frac{R_o}{R_i} + 1 \right) Q_o^2 (x_o + \lambda_o)^2 - Q_o^2 (x_o + \lambda_o)^2 \right] \tau_o Q_o}{\left[ \left( \frac{R_o}{R_i} + 1 \right)^2 + Q_o^2 (x_o + \lambda_o)^2 \right]^2 \left[ 1 + Q_o^2 (x_o + \lambda_o)^2 \right]}$$

Коэффициент усиления разомкнутой цепи обратной связи представим как

$$K_t = K_1 \cdot K_2, \quad (15)$$

где

$$K_1 = \frac{\frac{I_{\sim r}}{I_{op}}}{Re \frac{I_{\sim b}}{I_{ob}}}, \quad K_2 = \frac{\frac{I_{\sim b}}{I_{ob}}}{\frac{I_{\sim r}}{I_{or}}}, \quad (16)$$

$I_{\sim r}, I_{\sim b}$  - переменные составляющие комплексных амплитуд тока генератора и тока возбуждения соответственно.

Положим, что цепь обратной связи модулирует ток генератора  $I_r$  только по амплитуде, т.е.  $Im K_1 = 0$ .

Коэффициент усиления  $K_2$  - комплексная величина. Это значит, что амплитудная модуляция тока генератора  $I_r$  вызовет амплитудную и фазовую модуляцию тока  $I_b$ . Ниже будет показано, что мнимая составляющая коэффициента  $Im K_2$  на устойчивость электромеханических колебаний практически не влияет. Коэффициент усиления  $K_2$  вычислим, решив уравнение (2), полагая

$$I_b = I_{or} + I_{\sim r} - \frac{U}{R_i} \quad (17)$$

Решение уравнения (2) совместно с (17) проведем методом малого параметра. В этом случае (8), (9) запишутся в виде:

$$U'(1 + jQ_o x) = (I_{or} + I_{\sim r})R_o - \frac{R_o U'}{R_i} \quad (18)$$

$$\tau_o \frac{dU'}{dt} + U''(1 + jQ_o x) = - \frac{R_o U''}{R_i}$$

Из этого следует:

$$U = \frac{R_o I_{or}}{1 + \frac{R_o}{R_i} + jQ_o x} - \frac{R_o I_{\sim r}}{1 + \frac{R_o}{R_i} + jQ_o x} - \frac{\tau_o R_o \frac{dI_{\sim r}}{dt}}{\left(1 + \frac{R_o}{R_i} + jQ_o x\right)^2} \quad (19)$$

Подставляя (19) в (17) получим:

$$I_b = I_{or} \frac{1 + jQ_o x}{1 + \frac{R_o}{R_i} + jQ_o x} \left\{ 1 + \frac{I_{\sim r}}{I_{or}} \left[ 1 + \frac{\left(1 + \frac{R_o}{R_i} - Q_o^2 x^2\right) \tau_o \frac{R_o}{R_i} \frac{d}{dt}}{\left[\left(1 + \frac{R_o}{R_i}\right)^2 + Q_o^2 x^2\right] \left(1 + Q_o^2 x^2\right)} - j \frac{Q_o x \left(2 + \frac{R_o}{R_i}\right) \tau_o \frac{R_o}{R_i} \frac{d}{dt}}{\left[\left(1 + \frac{R_o}{R_i}\right)^2 + Q_o^2 x^2\right] \left(1 + Q_o^2 x^2\right)} \right] \right\} \quad (20)$$

Коэффициент усиления  $K_2$  из (20) и (16) определяется как

$$K_2 = 1 + \frac{\left(1 + \frac{R_o}{R_i} - Q_o^2 x^2\right) \tau_o \frac{R_o}{R_i} \frac{d}{dt}}{\left[\left(1 + \frac{R_o}{R_i}\right)^2 + Q_o^2 x^2\right] \left(1 + Q_o^2 x^2\right)} - j \frac{\left(2 + \frac{R_o}{R_i}\right) Q_o x \tau_o \frac{R_o}{R_i} \frac{d}{dt}}{\left[\left(1 + \frac{R_o}{R_i}\right)^2 + Q_o^2 x^2\right] \left(1 + Q_o^2 x^2\right)} \quad (21)$$



В выражение (21) подставим (II) и линеаризуем:

$$K_2 = 1 + \frac{\left[1 + \frac{R_o}{R_i} - Q_o^2(x_o + \lambda_o)\right] \tau_o \frac{R_o}{R_i} \frac{d}{dt}}{\left[\left(1 + \frac{R_o}{R_i}\right)^2 + Q_o^2(x_o + \lambda_o)\right] \left[1 + Q_o^2(x_o + \lambda_o)\right]} - \tag{22}$$

$$- j \frac{\left(2 + \frac{R_o}{R_i}\right) Q_o(x_o + \lambda_o) \tau_o \frac{R_o}{R_i} \frac{d}{dt}}{\left[\left(1 + \frac{R_o}{R_i}\right)^2 + Q_o^2(x_o + \lambda_o)\right] \left[1 + Q_o^2(x_o + \lambda_o)\right]}$$

Из (22) и (I5) видно, что  $ImK_t = K_2 ImK_2$  пропорциональна  $\frac{d}{dt}$ .  
Подставляя в уравнение (2) значение тока  $I_g$  (3) с учетом выражений (5), (II); (I3), (I5) и (22) и пренебрегая членами порядка  $\frac{d^2}{dt^2}$ , получим уравнение для напряжения на резонаторе при включенной цепи обратной связи по току  $I_g$ :

$$\tau_o \frac{dU}{dt} + U \left[1 + j Q_o(x_o + \lambda_o + \lambda_n)\right] = R_o I_{ob} \left[1 + \frac{B \lambda_n}{1 + ReK_t} - \frac{C \frac{d\lambda_n}{dt}}{1 + ReK_t} - j \frac{B \lambda_n ImK_t}{1 + ReK_t} + j \mathcal{D} \lambda_n - j E \frac{d\lambda_n}{dt}\right] \tag{23}$$

Решим уравнение (23) методом малого параметра относительно  $U$ . Согласно (8), запишем:

$$U' = \left[1 + j Q_o(x_o + \lambda_o + \lambda_n)\right] = R_o I_{ob} \left[1 + \frac{B \lambda_n}{1 + ReK_t} - \frac{C \frac{d\lambda_n}{dt}}{1 + ReK_t} - j \frac{B \lambda_n ImK_t}{1 + ReK_t} + j \mathcal{D} \lambda_n - j E \frac{d\lambda_n}{dt}\right] \tag{24}$$

$$\tau_o \frac{dU'}{dt} + U' \left[1 + j Q_o(x_o + \lambda_o + \lambda_n)\right] = 0$$

Решение уравнений (24) с учетом (22), (I5), (I6) после линеаризации относительно  $\lambda_n$  имеет следующий вид:

$$U = \frac{R_o I_{ob}}{1 + j Q_o(x_o + \lambda_o)} \left\{ 1 + \frac{B \lambda_n}{1 + ReK_t} - \frac{C \frac{d\lambda_n}{dt}}{1 + ReK_t} - j \frac{ImK_t}{1 + ReK_t} B \lambda_n + j \mathcal{D} \lambda_n - j E \frac{d}{dt} \lambda_n - j \frac{Q_o \lambda_n}{1 + j Q_o(x_o + \lambda_o)} + \right. \tag{25}$$

$$\left. + j \frac{\tau_o Q_o \frac{d}{dt} \lambda_n}{\left[1 + j Q_o(x_o + \lambda_o)\right]^2} - \frac{\tau_o B \frac{d}{dt} \lambda_n}{(1 + ReK_t) \left[1 + j Q_o(x_o + \lambda_o)\right]} - j \frac{\tau_o \mathcal{D} \frac{d}{dt} \lambda_n}{1 + j Q_o(x_o + \lambda_o)} \right\}$$

Для расчета ponderomotorной силы вычислим квадрат модуля комплексной амплитуды напряжения. Так как рассматриваются малые амплитуды колебаний  $\lambda_n$ , то все слагаемые с  $\lambda_n$  в (25) значительно меньше единицы. Поэтому:

$$|U|^2 = \frac{R_o^2 |I_{ob}|^2}{1 + Q_o^2(x_o + \lambda_o)^2} \left\{ 1 + \frac{2B \lambda_n}{1 + ReK_t} - \frac{2Q_o^2(x_o + \lambda_o) \lambda_n}{1 + Q_o^2(x_o + \lambda_o)^2} - \frac{2C \frac{d\lambda_n}{dt}}{1 + ReK_t} + \right. \tag{26}$$

$$\left. + \frac{4\tau_o Q_o^2(x_o + \lambda_o) \frac{d\lambda_n}{dt}}{\left[1 + Q_o^2(x_o + \lambda_o)\right]^2} - \frac{2\tau_o B \frac{d\lambda_n}{dt}}{(1 + ReK_t) \left[1 + Q_o^2(x_o + \lambda_o)\right]} - \frac{2\tau_o \mathcal{D} Q_o(x_o + \lambda_o) \frac{d\lambda_n}{dt}}{1 + Q_o^2(x_o + \lambda_o)^2} \right\}$$

Подставим  $|U|^2$  в уравнение (I). Для исследования устойчивости аналогично /3/ линеаризуем полученное уравнение, воспользовавшись соотношением (II). Линеаризованное уравнение, описывающее малые колебания стенок резонатора, запишется в виде:



$$\frac{d^2 \lambda_n}{dt^2} + 2\delta_0 \frac{d\lambda_n}{dt} + \Omega_0^2 \lambda_n = \frac{A_0 R_0^2 |I_{0e}|^2}{1 + Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)^2} \left\{ \frac{B \lambda_n}{1 + \text{Re} K_t} - \frac{Q_0^2 (x_0 + \lambda_0) \lambda_n}{1 + Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)^2} - \frac{C \frac{d\lambda_n}{dt}}{1 + \text{Re} K_t} + \frac{2\tau_0 Q_0^2 (x_0 + \lambda_0) \frac{d\lambda_n}{dt}}{[1 + Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)^2]^2} - \frac{\tau_0 B \frac{d\lambda_n}{dt}}{(1 + \text{Re} K_t)[1 + Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)^2]} - \frac{\tau_0 D Q_0 (x_0 + \lambda_0) \frac{d\lambda_n}{dt}}{1 + Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)^2} \right\} \quad (27)$$

В правую часть уравнения (27) вошла только переменная составляющая  $|U|^2$  (член с  $\lambda_n$  в выражении (26)), а постоянная составляющая  $|U|^2$  учитывается  $\lambda_0$ .

## 2. Условия устойчивости электромеханической системы с учетом обратной связи

В уравнение (27) входит  $\text{Re} K_t$ , которое сложным образом зависит от  $\frac{d}{dt}$ . Выражение  $\text{Re} K_t$  может значительно повысить порядок дифференциального уравнения (27). Поэтому исследование на устойчивость этого уравнения удобно произвести с помощью критерия Найквиста [5,6]. Для этого в качестве входной величины выберем силу, действующую на резонатор и вызывающую перестройку его частоты. Вследствие перестройки изменяется напряжение на резонаторе, в результате чего возникает переменная составляющая пондеромоторной силы, также действующая на резонатор. Пондеромоторную силу будем считать выходной величиной. Комплексная амплитуда входной величины пропорциональна левой части (27) при  $\frac{d}{dt} = j\Omega$ .

$$F_m(j\Omega) = (j\Omega)^2 \lambda_n + 2\delta_0 j\Omega \lambda_n + \Omega_0^2 \lambda_n \quad (28)$$

Амплитуда пондеромоторной силы пропорциональна правой части (27):

$$F_n(j\Omega) = \frac{A_0 R_0^2 |I_{0e}|^2}{1 + Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)^2} \left\{ \frac{B \lambda_n}{1 + K(j\Omega)} - \frac{Q_0^2 (x_0 + \lambda_0) \lambda_n}{1 + Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)^2} - \frac{C j\Omega \lambda_n}{1 + K(j\Omega)} + \frac{2\tau_0 Q_0^2 (x_0 + \lambda_0) j\Omega \lambda_n}{[1 + Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)^2]^2} - \frac{\tau_0 B j\Omega \lambda_n}{[1 + Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)^2][1 + K(j\Omega)]} - \frac{\tau_0 D Q_0 (x_0 + \lambda_0) j\Omega \lambda_n}{1 + Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)^2} \right\}, \quad (29)$$

где  $\text{Re} K_t = K\left(\frac{d}{dt}\right) = K(j\Omega)$  при  $\frac{d}{dt} = j\Omega$ .

Об устойчивости системы можно судить по соотношению:

$$W(j\Omega) = \frac{F_n(j\Omega)}{F_m(j\Omega)} \quad (30)$$

Ограничимся случаем, когда система при разомкнутой цепи обратной связи устойчива. Тогда система будет устойчива и при замкнутой цепи обратной связи, если годограф  $W(j\Omega)$  не охватывает точку  $+1$ .

Сначала рассмотрим условия статической устойчивости стенок резонатора, когда  $\Omega = 0$ . В этом случае, как видно из уравнений (28), (29), (30),  $W(0)$  — действительное число и для устойчивости системы достаточно, чтобы:

$$F_m(0) > F_n(0) \quad (31)$$

Расписывая неравенство (31) с учетом (29), (28) и (14), получим условие статической устойчивости стенок резонатора:

$$\Omega_0^2 > A_0 \frac{U^2 Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)}{1 + Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)^2} \left\{ \frac{\left(\frac{R_0}{R_i} + 1\right)^2 - 1}{[1 + K(0)][\left(\frac{R_0}{R_i} + 1\right)^2 + Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)^2]} - 1 \right\} \quad (32)$$



где 
$$U = \frac{R_0 |I_{06}|}{\sqrt{1 + Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)^2}} \quad (33)$$

Так как  $A_v \geq 0$ , а выражение в фигурных скобках правой части неравенства (32) является отрицательным числом, то условие статической устойчивости может нарушаться только при начальной расстройке  $x_0 + \lambda_0 < 0$ , когда собственная частота резонатора выше частоты генератора. Рассмотрим два случая:

Случай 1:  $K(0) = 0$  Цепь обратной связи по току разомкнута. Введем дополнительные обозначения:

$$Q_H = \frac{Q_0}{1 + \frac{R_0}{R_i}}, \quad \tau_H = \tau_0 \frac{Q_H}{Q_0}, \quad R_H = \frac{R_i R_0}{R_i + R_0}, \quad (34)$$

где  $Q_H, \tau_H, R_H$  — добротность, постоянная затухания и шунтовое сопротивление нагруженного резонатора. Выразим ток  $I_{06}$  через  $I_{ог}$  (I4), подставим (34) в (32) и (33) и после алгебраических преобразований получим условие статической устойчивости в виде:

$$\Omega_v^2 > \frac{A_v U_1^2 Q_H^2 (x_0 + \lambda_0)}{1 + Q_H^2 (x_0 + \lambda_0)^2}, \quad (35)$$

где

$$U_1 = \frac{I_{ог} R_H}{\sqrt{1 + Q_H^2 (x_0 + \lambda_0)^2}}.$$

Пороговое напряжение статической неустойчивости в этом случае имеет минимум при расстройке:

$$\xi_H = Q_H (x_0 + \lambda_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad U_{min_1}^2 \approx \frac{2,3 \Omega_v^2}{A_v Q_H}.$$

Случай 2:  $K(0) \gg 1$ . Для этого случая выражение в фигурных скобках неравенства (32) примерно равно  $-1$ . С учетом (33) пороговое напряжение будет минимальным при расстройке:

$$\xi_0 = Q_0 (x_0 + \lambda_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad U_{min_2}^2 \approx \frac{2,3 \Omega_v^2}{A_v Q_0}.$$

Сравнивая эти крайние случаи можно заключить, что наличие

обратной связи по току (при  $K(0) \gg 1$ ) снижает минимальное пороговое напряжение возникновения статической неустойчивости в  $\sqrt{\frac{Q_0}{Q_H}}$  раз.

Как видно из (28) и (30), условие устойчивости может нарушаться при  $\Omega \approx \Omega_v$ , так как на этой частоте  $F_H(j\Omega)$  принимает минимальное значение:

$$F_H(j\Omega_v) = j2\Omega_v \delta_v \lambda_v \quad (36)$$

Потеря устойчивости в этом случае будет сопровождаться колебаниями стенок резонатора (колебательная неустойчивость).

Построим годографы векторов  $F_M(j\Omega)$  и  $F_H(j\Omega)$  в окрестности  $\Omega_v$  и при неизменной амплитуде  $\lambda_v$  (рис.3). При небольших изменениях частоты конец вектора  $F_M$  скользит почти вдоль прямой, параллельной оси  $X$  и проходящей через конец вектора  $F_H(j\Omega_v)$ .

Пондеромоторная сила  $F_H(j\Omega)$  зависит от частоты  $\Omega$  нерезонансным образом и в окрестности  $\Omega_v$  практически не изменяется:  $F_H(j\Omega) \approx F_H(j\Omega_v)$ .

Чтобы система была устойчива достаточно, чтобы

$$\text{Im} F_M(j\Omega_v) > \text{Im} F_H(j\Omega_v) \quad (37)$$

При вычислении мнимой части  $F_H(j\Omega_v)$  в выражении (29) положим

$$K(j\Omega_v) = K(\Omega_v) e^{-j\psi(\Omega_v)}, \quad (38)$$

где  $K(\Omega_v)$  и  $\psi(\Omega_v)$  — модуль коэффициента усиления и сдвиг фазы сигнала в цепи обратной связи на частоте механических колебаний.

Подставляя в неравенство (37) величины из (36), (29), (38), (I4), получим условие колебательной устойчивости в виде:

(39)

$$\delta_v > \frac{A_v U^2 \tau_0 Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)}{[1 + Q_0^2 (x_0 + \lambda_0)^2]^2} \cdot \Phi$$



где

$$\Phi = 1 + \frac{\frac{R_o}{R_i}}{2\left[\left(\frac{R_o}{R_i} + 1\right)^2 + Q_o^2(x_o + \lambda_o)^2\right]} \left\{ \frac{K(\Omega_v) \sin \psi(\Omega_v) \left(2 + \frac{R_o}{R_i}\right) \left[1 + Q_o^2(x_o + \lambda_o)^2\right]}{\left[1 + 2K(\Omega_v) \cos \psi(\Omega_v) + K^2(\Omega_v)\right] \Omega_v \tau_o} - \frac{\left[1 + K(\Omega_v) \cos \psi(\Omega_v)\right] \left[2\left(\frac{R_o}{R_i} + 1\right) + \left(\frac{R_o}{R_i} + 1\right)^2 - Q_o^2(x_o + \lambda_o)^2\right] \left[1 + Q_o^2(x_o + \lambda_o)^2\right]}{\left[1 + 2K(\Omega_v) \cos \psi(\Omega_v) + K^2(\Omega_v)\right] \left[\left(\frac{R_o}{R_i} + 1\right)^2 + Q_o^2(x_o + \lambda_o)^2\right]} - \frac{\left[1 + K(\Omega_v) \cos \psi(\Omega_v)\right] \left(2 + \frac{R_o}{R_i}\right)}{1 + 2K(\Omega_v) \cos \psi(\Omega_v) + K^2(\Omega_v)} - \left[\frac{R_o}{R_i} + 1 - Q_o^2(x_o + \lambda_o)^2\right] \right\}$$

$U$  — амплитуда напряжения на расстроенном резонаторе (33).

В правой части неравенства (39) выражение  $\Phi$  всегда число положительное. Поэтому нарушение этого неравенства и возникновение колебательной неустойчивости возможно только, если начальная расстройка  $x_o + \lambda_o > 0$ , т.е. когда собственная частота резонатора ниже частоты возбуждающего тока.

Рассмотрим два крайних случая:

I случай: цепь обратной связи по току разомкнута  $K(j\Omega_v) = 0$ . Выразим ток  $I_{ог}$  через  $I_{ог}$  (14), подставим (34) в неравенство (39) и после алгебраических преобразований получим следующую запись условия колебательной устойчивости для  $K(j\Omega_v) = 0$ :

$$\delta_v > \frac{A_v U_1^2 \tau_n Q_n^2 (x_o + \lambda_o)}{\left[1 + Q_n^2 (x_o + \lambda_o)^2\right]^2}, \quad (40)$$

где амплитуда напряжения на расстроенном резонаторе

$$U_1 = \frac{R_n |I_{ог}|}{\sqrt{1 + Q_n^2 (x_o + \lambda_o)^2}}.$$

Согласно (40) напряжение возникновения колебательной неустойчивости имеет минимум при расстройке резонатора ниже частоты возбуждающего тока на величину  $\xi_n = Q_n (x_o + \lambda_o) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Найденное условие сводится к условию колебательной устойчивости, полученному для идеального генератора тока в работе /3/; если заменить в (40)  $Q_n \rightarrow Q_o$ ,  $R_n \rightarrow R_o$ ,  $I_{ог} \rightarrow I_{об}$ ,  $\xi_n \rightarrow \xi_o$ .

Из этого следует, что за счет шунтирующего влияния внутреннего сопротивления генератора тока  $R_i$  минимальное пороговое напряжение колебательной неустойчивости, рассчитанное из (40), больше минимального порогового напряжения для случая идеального генератора тока в  $\frac{Q_o}{Q_n}$  раз.

II случай:  $K(j\Omega_v) \neq 0$ . Анализ неравенства (39) показывает, что включение цепи обратной связи по току возбуждения понижает пороговое напряжение возникновения колебательной неустойчивости. Пороговое напряжение будет минимально при  $K(\Omega_v) = 1$  и  $\psi(\Omega_v) = \frac{\pi}{2}$ . Если при этих условиях принять, что

$R_o \gg R_i$ , то при включенной обратной связи минимальное пороговое напряжение будет меньше порогового напряжения при выключенной обратной связи примерно в  $\frac{R_o}{R_i} \sqrt{1 + \frac{1}{2\Omega_v \tau_o}} \approx \frac{Q_o}{Q_n} \sqrt{1 + \frac{1}{2\Omega_v \tau_o}}$  раз.

Проиллюстрируем полученное условие колебательной устойчивости на примере ускоряющего резонатора накопителя ВЭШ-2 /1/. Резонатор имеет следующие параметры: резонансная частота  $f_o = 75,6$  МГц; добротность  $Q_p = 12 \cdot 10^3$ ; нагруженная добротность  $Q_n = 8400$ ;  $\frac{R_o}{R_i} = 0,43$ ; частота механических колебаний  $f_v = 259$  Гц;  $A_v = 3,54 \cdot 10^{-10}$  ф/м<sup>2</sup>кг;  $\delta_v = 0,65$  1/сек.

Амплитуда возбуждающего резонатор тока могла регулироваться с помощью управляемого усилителя вручную или автоматически — цепью АРУ по току. Модуль коэффициента усиления этой цепи на частоте механических колебаний устанавливался равным одному из значений: 0,37; 1,35; 16,2; а запаздывание сигнала по фазе на частоте  $f_v$  в цепи АРУ всегда  $\psi(\Omega_v) = \frac{\pi}{2}$ .



Пороговое напряжение возникновения колебательной неустойчивости рассчитывалось из неравенства (39) и измерялось экспериментально при начальной расстройке резонатора ниже частоты возбуждающего тока  $\xi_0 = Q_0(x_0 + \lambda_0) = 0,6$

Зависимость порогового напряжения колебательной неустойчивости стенок резонатора от параметров цепи АРУ по току иллюстрируется таблицей I.

Таблица I

Параметры цепи АРУ по току		Пороговое напряжение, кВ	
$K(\Omega, \nu)$	$\nu(\Omega, \nu)$	Расчет	Эксперимент
0	0	138	120
0,37	$\pi/2$	75	86
1,35	$\pi/2$	61,5	68
16,2	$\pi/2$	91	85

Из таблицы I видно достаточно хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов.

При отстройке частоты резонатора выше частоты генератора и подъеме напряжения до 300 кВ статическая неустойчивость стенок резонатора не наблюдалась. Расчеты по формуле (32) подтвердила, что статическая неустойчивость стенок в данном резонаторе должна возникнуть при существенно больших напряжениях.

Авторы выражают благодарность М.М.Карлинеру за обсуждение работы и критические замечания.

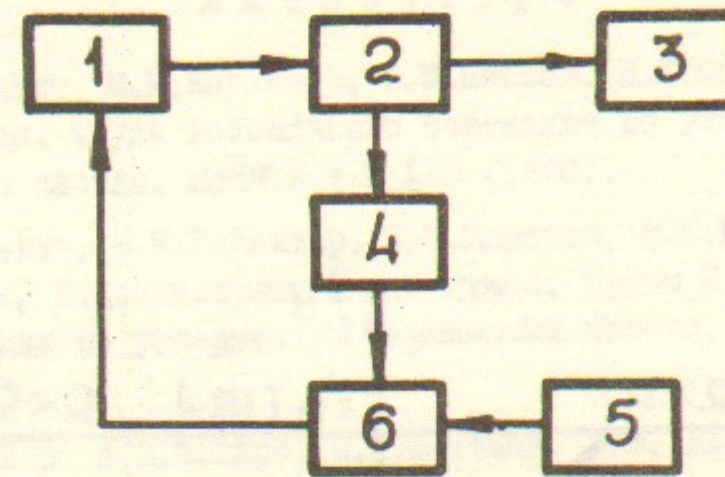


Рис. I Схема ВЧ системы с цепью обратной связи, стабилизирующей амплитуду тока возбуждения резонатора

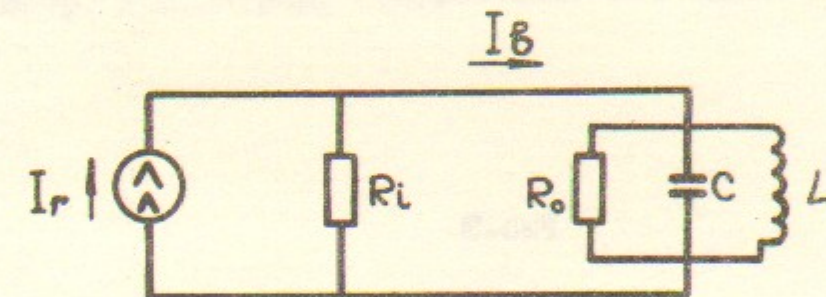


Рис. 2 Эквивалентная схема резонатора и генератора

- $I_r$  - источник тока с внутренним сопротивлением  $R_i$
- $R_0$  - шунтовое сопротивление ненагруженного резонатора



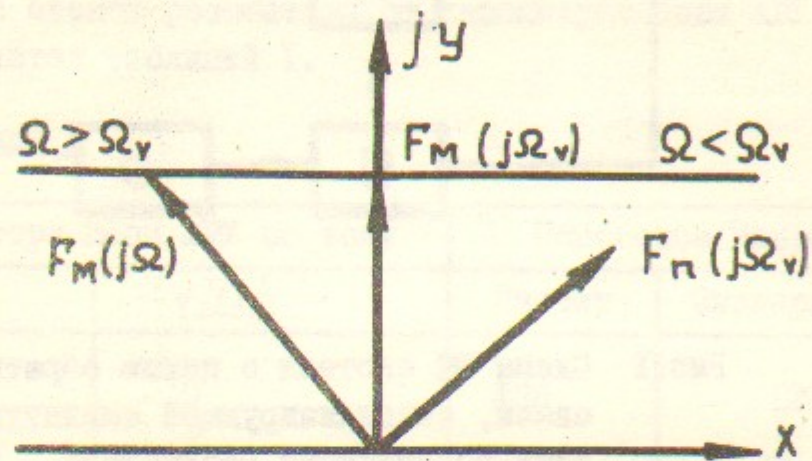


Рис.3

## Л и т е р а т у р а

1. В.Г.Вещеревич, М.М.Карлинер, В.М.Петров, И.К.Седяров, И.А.Шехтман. Труды Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. ВИНТИ т.2 143 (1970).
2. В.Г.Вещеревич, Э.И.Горнигер, Н.И.Иощенко, М.М.Карлинер, В.М.Петров, И.К.Седяров, И.А.Шехтман. Труды II Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Наука, т.2, 164 (1972).
3. М.М.Карлинер, В.Е.Шапиро, И.А.Шехтман. ЖТФ, XXXVI, 2017 (1966).
4. В.Б.Брагинский, А.Б.Манукин. Измерение малых сил в физических экспериментах. М., "Наука", 1974, стр.30.
5. С.И.Евтянов. Переходные процессы в приемно-усилительных схемах. Связьиздат, М., (1948).
6. А.А.Красовский, Г.С.Поспелов. Основы автоматки и технической кибернетики. ГЭИ, М-Л, (1962).
7. М.М.Карлинер, В.М.Петров, И.А.Шехтман. ЖТФ XXXIX 1383 (1969).



Работа поступила - 29 июля 1977 г.

---

Ответственный за выпуск - С.Г. ПОПОВ  
Подписано к печати 29.УШ-1977 г. МН 02975  
Усл. 1,1 печ.л., 1,0 учетно-изд.л.  
Тираж 200 экз. Бесплатно  
Заказ № 81.

---

Отпечатано на ротационной ИЯФ СО АН СССР