И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 65

Б.Н.Брейзман, Л.С.Пеккер

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ЛЕНГМЮРОВСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Новосибирск

1977

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННОГО ЛЕНГМЮРОВСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Б.Н.Брейзман, Л.С.Пеккер

А Н Н О Т А Ц И Я

Вычислены интенсивности излучения локализованного ленгмюровского возмущения на второй и третьей гармониках плазменной частоты. Показано, что излучение является квадрупольным. Найдена связь квадупольного момента возмущения с пространственным распределением высокочастотного электрического поля.

ELECTROMAGNETIC RADIATION FROM A LOCALIZED LANGMUIR PERTURBATION

B.N.Brejzman, L.S.Pekker

A b s t r a c t

The intensity of radiation from a localized Langmuir perturbation at the second and third harmonics of the plasma frequency is calculated. It is shown that the radiation is of the quadrupole type. The expressions for the quadrupole moment in terms of the electric field distribution in the Langmuir wave are also found.

Плазма, в которой возбуждены ленгмюровские колебания, может генерировать электромагнитное излучение на гармониках плазменной частоты ω_p. Генерация обусловлена нелинейными процессами вида $2\ell \to t$, $3\ell \to t$ и т.д. Этими процессами объясняется, в частности, генерация гармоник в экспериментах по лазерному нагреву плазмы /I,2/ и происхождение километрового радиоизлучения в магнитосфере Земли /3/. Интенсивность излучения зависит от пространственного распределения поля ленгмюровских колебаний. В ряде случаев (например, при ленгмюровском коллапсе /4/) это распределение оказывается сильно неоднородным и представляет собой совокупность хаотически расположенных сгустков. В такой ситуации для оценки излучения плазмы необходимо предварительно найти излучение отдельного сгустка. Мы сделаем это в предположении, что размер сгустка ℓ мал по сравнению с длиной излучаемой электромагнитной волны λ. Нас будет интересовать здесь излучение с частотами $2\omega_p$ и $3\omega_p$, для которого $\lambda \sim c/\omega_p$.

Заметим прежде всего, что излучение происходит фактически без участия ионов, поскольку все высокочастотные токи и поля создаются за счёт осцилляций скорости и плотности одних лишь электронов. Отсюда сразу следует, что локализованное ленгмюровское возмущение не может излучать дипольно (см./5/, стр.244). Излучение появляется лишь в следующем (квадрупольном) приближении*). Это обстоятельство не было учтено в работе /2/, что привело к завышению интенсивности третьей гармоники в $(\lambda/\ell)^2$ раз.

Перейдем теперь к вычислениям. Их удобно провести исходя из уравнений Максвелла и закона сохранения импульса:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad \vec{j} = -en\vec{v} \tag{I}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = -4\pi e(n-n_0) \tag{3}$$

*) Отметим, что магнитно-дипольное излучение (так же, как и дипольное) в данном случае отсутствует.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(mn\vec{v} + \frac{1}{4\pi c}[\vec{E}\times\vec{H}]\right) + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[mnv_\alpha v_\beta + \delta_{\alpha\beta}\frac{E^2+H^2}{8\pi} - \frac{E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta}{4\pi}\right] = -e\vec{E}n_0 \quad (4)$$

Здесь через n и v_α обозначены соответственно концентрация и скорость электронов, а через n_0 – концентрация ионов, которая предполагается однородной**). Величина $e\vec{E}n_0$ в уравнении (4) есть импульс, передаваемый в единицу времени ионам. Вклад ионов в тензор плотности потока импульса пренебрежимо мал.

Нелинейные члены в уравнении (4) представляют собой комбинации полей ленгмюровских колебаний и полей биений, образованных этими колебаниями. Характерный масштаб биений ℓ мал по сравнению с длиной электромагнитной волны. Это значит, что биения, как и сами ленгмюровские колебания, потенциальны, т.е. в уравнении (4) можно положить $\vec{H} = 0$. Исключив после этого из системы (I)-(4) величины $\vec{v}$, $\vec{H}$ и n, получим:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \omega_p^2\vec{E} + c^2\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{4\pi e}{m}\frac{\partial}{\partial x_\beta}T_{\alpha\beta} \quad (5)$$

$$\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{4\pi}\vec{E} + \frac{e}{m}\frac{\partial}{\partial x_\beta}T_{\alpha\beta} \quad (6)$$

Здесь $\omega_p \equiv (4\pi e^2 n_0/m)^{1/2}$, а через $T_{\alpha\beta}$ обозначен тензор плотности потока импульса

$$T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\frac{E^2}{8\pi} - \frac{E_\alpha E_\beta}{4\pi} + \frac{4\pi}{\omega_p^2}j_\alpha j_\beta\left(1+\frac{\mathrm{div}\,\vec{E}}{4\pi e n_0}\right) \quad (7)$$

Разложим $T_{\alpha\beta}$ в ряд Фурье по времени и выделим те члены ряда, которые соответствуют колебаниям с частотами $2\omega_p$ и $3\omega_p$, поскольку именно они определяют интенсивность излучения интересующих нас гармоник:

$$T_{\alpha\beta} = T^{(2)}_{\alpha\beta}(\vec{r})\,e^{-2i\omega_p t} + T^{(3)}_{\alpha\beta}(\vec{r})\,e^{-3i\omega_p t} + \text{к.с.} \quad (8)$$

Напомним, что угловое распределение интенсивности излучения поперечных волн колеблющимся квадруполем

**) Получающийся результат остается справедливым и при наличии неоднородности. Необходимо только, чтобы выполнялось соотношение $\delta n_0/n_0 \ll 1$

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}(\omega_0)\,e^{-i\omega_0 t} + \text{к.с.}$$

задаётся следующим выражением:

$$dI = \frac{\omega_0^6\,\varepsilon^{3/2}}{72\pi c^5}\left|[\vec{n}\times\vec{Q}(\omega_0)]\right|^2 d\Omega \quad (9)$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении распространения волны, $\vec{Q}(\omega_0) \equiv n_\beta Q_{\alpha\beta}(\omega_0)$, $\varepsilon(\omega_0)$ – диэлектрическая проницаемость среды. В рассматриваемом нами случае $\varepsilon(\omega) = I - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$.

Квадрупольный момент $Q_{\alpha\beta}$ может быть выражен через нелинейную плотность тока. Последняя же связана с тензором плотности потока импульса уравнением (6). Это позволяет получить следующие соотношения:

$$Q_{\alpha\beta}(2\omega_p) = \frac{3e}{2\omega_p^2 m}\int\left(T^{(2)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T^{(2)}_{\gamma\gamma}\right)d^3\vec{r}$$

$$Q_{\alpha\beta}(3\omega_p) = \frac{2e}{3\omega_p^2 m}\int\left(T^{(3)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T^{(3)}_{\gamma\gamma}\right)d^3\vec{r} \quad (10)$$

Выразим теперь величины $T^{(2)}_{\alpha\beta}$ и $T^{(3)}_{\alpha\beta}$ через распределение потенциала в ленгмюровской волне $\Phi(\vec{r},t)$. Представим для этого $\Phi(\vec{r},t)$ в следующем виде:

$$\Phi(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r})\,e^{-i\omega_p t} + \text{к.с.}$$

Чтобы найти $T^{(2)}_{\alpha\beta}$, достаточно удержать в формуле (7) только квадратичные по φ члены и заменить E_α на $-\partial\varphi/\partial x_\alpha$, а j_α на $-i\frac{\omega_p}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}$. В итоге имеем

$$T^{(2)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta} \quad (11)$$

Для вычисления $T^{(3)}_{\alpha\beta}$ необходимо предварительно найти биения электрического поля и тока на частоте $2\omega_p$, т.е. квадратичные по φ поправки к E_α и j_α. Обозначим эти поправки через $-\partial\varphi^{(2)}/\partial x_\alpha$ и $j^{(2)}_\alpha$, т.е. положим

$$E_\alpha = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}e^{-i\omega_p t} - \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x_\alpha}e^{-2i\omega_p t} + \text{к.с.}$$

$$j_\alpha = -i\frac{\omega_p}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}e^{-i\omega_p t} + j^{(2)}_\alpha e^{-2i\omega_p t} + \text{к.с.} \quad (12)$$

(мы учли здесь потенциальность биений). Обратимся далее к уравнению (6) и вытекающему из (5) соотношению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_p^2\right)\operatorname{div}\vec{E}=-\frac{4\pi e}{m}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}T_{\alpha\beta}$$

Из них видно, что

$$j_\alpha^{(2)}=\frac{ie}{2m\omega_p}\,\frac{\partial T_{\alpha\beta}^{(2)}}{\partial x_\beta}-i\,\frac{\omega_p}{8\pi}\,\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x_\alpha} \qquad (13)$$

$$\Delta\varphi^{(2)}=-\frac{4\pi e}{3m\omega_p^2}\,\frac{\partial^2 T_{\alpha\beta}^{(2)}}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}$$

Подставим выражения (12) и (13) в формулу (7) и выделим в правой части этой формулы слагаемые, содержащие множитель $\exp(-3i\omega_p t)$. Сопоставив результат с формулой (8) и воспользовавшись выражением (11) для тензора $T_{\alpha\beta}^{(2)}$, получим:

$$T_{\alpha\beta}^{(3)}=-\frac{1}{16\pi^2 n_0 e}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\Delta\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\right]+ \qquad (14)$$
$$+\frac{1}{24\pi^2 n_0 e}\,\delta_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}-\frac{1}{4}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}\right)\right]$$

Здесь через ψ обозначено решение уравнения Пуассона

$$\Delta\psi=\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\right) \qquad (15)$$

При вычислении величин $Q_{\alpha\beta}(2\omega_p)$ и $Q_{\alpha\beta}(3\omega_p)$ можно опустить в формулах (11) и (14) все слагаемые, пропорциональные $\delta_{\alpha\beta}$, поскольку они не дают вклада в квадрупольный момент. Вклад остальных слагаемых путём интегрирования по частям нетрудно преобразовать к следующему виду:

$$Q_{\alpha\beta}(2\omega_p)=-\frac{3e}{4\pi\omega_p^2 m}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)d^3\vec{r} \qquad (16)$$

$$Q_{\alpha\beta}(3\omega_p)=-\frac{1}{24\pi^2\omega_p^2 m n_0}\int\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\Delta\varphi\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}-2\psi\right)d^3\vec{r} \qquad (17)$$

Чтобы найти интересующие нас интенсивности второй и третьей гармоник , следует теперь подставить эти выражения в формулу (9). Соответствующий результат для второй гармоники был получен в несколько иной форме в работе /6/.

Формулы (9), (16), (17) дают для интенсивностей $I_{2\omega_p}$ и $I_{3\omega_p}$ следующие оценки:

$$I_{2\omega_p}\backsim\omega_p U\,\frac{U}{mc^2}\,\frac{\omega_p^3}{n_0 c^3} \qquad (18)$$

$$I_{3\omega_p}\backsim\omega_p U\left(\frac{U}{mc^2}\right)^2\frac{\omega_p}{\ell^5 n_0^2 c}\ , \qquad (19)$$

где величина $U\equiv\ell^3(\vec{\nabla}\varphi)^2$ есть полная энергия ленгмюровского возмущения. По поводу этих оценок необходимо, однако, сделать существенное замечание. Дело в том, что они написаны в пренебрежении дисперсией ленгмюровских волн. Из-за дисперсии возмущение, как известно, расплывается. При этом, как мы сейчас покажем, уменьшается его квадрупольный момент и, соответственно, падает интенсивность излучения . Отмеченная особенность не видна из оценок (18), (19), поскольку они слишком грубы. Воспользуемся поэтому точными выражениями (16), (17) для $Q_{\alpha\beta}$. Учёт дисперсии приводит к тому, что потенциал φ изменяется в соответствии со следующим уравнением:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=i\omega_p r_D^2\,\Delta\varphi\ ,$$

где r_D – дебаевский радиус.

Пусть $\partial\varphi_0/\partial x_\alpha$ – начальное распределение электрического поля, локализованное в области размером ℓ . Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}(\vec{r},t)=\frac{1}{(4\pi i\omega_p t r_D^2)^{3/2}}\int e^{-\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')^2}{4i\omega_p t r_D^2}}\,\frac{\partial\varphi_0(\vec{r}\,')}{\partial x'_\alpha}\,d^3\vec{r}\,'$$

Подставив $\partial\varphi/\partial x_\alpha$ в формулу (16) и выполнив интегрирование по объёму, получим:

$$Q_{\alpha\beta}(2\omega_p)=-\frac{3e}{4\pi m\omega_p^2}\,\frac{1}{(8\pi i\omega_p t r_D^2)^{3/2}}\ \times$$
$$\times\int d^3\vec{r}\,'\,d^3\vec{r}\,''\,e^{-\frac{(\vec{r}\,'-\vec{r}\,'')^2}{8i\omega_p t r_D^2}}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x''_\beta}-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x'_j}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x''_j}\right)$$

При $t \gg \omega_p^{-1} \ell^2/r_D^2$ экспонента в этом выражении близка к единице. Отсюда видно, что $Q_{\alpha\beta}(2\omega_p)$ асимптотически убывает как $t^{-3/2}$ (или как $t^{-5/2}$, если $\int(\partial\varphi/\partial x_\alpha)\, d^3\vec{r} = 0$). Аналогичный результат нетрудно получить и для $Q_{\alpha\beta}(3\omega_p)$. Таким образом, свободный сгусток фактически излучает лишь в течение конечного промежутка времени $\tau \sim \omega_p^{-1}\ell^2/r_D^2$.

Дело обстоит совершенно иначе, если ленгмюровская волна находится в связанном состоянии, т.е. заперта в потенциальной яме, образованной неоднородностью плотности плазмы. Интенсивность второй гармоники в этом случае постоянна. Она, в частности, не меняется при медленном сжатии (коллапсе) сгустка, если только в процессе сжатия сохраняется число плазмонов. Интенсивность же третьей гармоники при сжатии должна расти по закону ℓ^{-5}. Измеряя величины $I_{2\omega_p}$ и $I_{3\omega_p}$, можно, в принципе, найти полную энергию и размер сгустка.

В заключение заметим, что для оценки интенсивности излучения из единицы объёма плазмы (J) достаточно умножить величины (I8) и (I9) на концентрацию сгустков N ж). В частности, при плотной упаковке сгустков ($N \sim 1/\ell^3$)

$$J_{2\omega_p} \sim I_{2\omega_p} \cdot N \sim \frac{(\vec{\nabla}\varphi)^4 \omega_p^4 \ell^3}{m n_0 c^5}$$

$$J_{3\omega_p} \sim I_{3\omega_p} \cdot N \sim \frac{(\vec{\nabla}\varphi)^6 \omega_p^2 \ell}{m^2 c^5 n_0^2}$$

Эти оценки совпадают с оценками, следующими из теории слабой турбулентности, если под $(\vec{\nabla}\varphi)^2$ понимать плотность энергии ленгмюровских колебаний, а под ℓ - характерную длину волны.

Авторы приносят глубокую благодарность Д.Д.Рютову за обсуждение работы.

ж) Подразумевается, что сгустки некогерентны.

Л и т е р а т у р а

I. В.В.Александров, С.И.Анисимов, М.В.Брекер, Е.П.Велихов, В.Д.Вихарев, В.П.Зотов, Н.Г.Ковальский, М.И.Пергамент, А.И.Ярославский, ЖЭТФ, 7I, I826, I976.
2. А.И.Авров, В.Ю.Быченков, О.Н.Крохин, В.В.Пустовалов, А.А.Рупасов, В.П.Силин, Г.В.Склизков, В.Т.Тихончук, А.Е.Шиканов, ЖЭТФ, 72, 970, I977.
3. А.А.Галеев, В.В.Красносельских. Письма в ЖЭТФ, 24, 558, I976.
4. В.Е.Захаров, ЖЭТФ, 62, I745, I972.
5. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Теория поля. М., Наука, I973.
6. D.A.Tidman, G.H.Weiss, Phys. Fluids, 4, 866, I96I.

Работа поступила - 17 мая 1977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 5.7-1977 г. МН 07457
Усл. 0,5 печ.л., 0,4 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ - № 65.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР