46

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 64

Б.Г.Конопельченко

О КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ

Новосибирск
1977

О КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ

Б.Г.Конопельченко

А н н о т а ц и я

Найдены α) класс точных решений типа нелинейных плоских волн для четырехмерного уравнения синус-Гордона, β) вид решения, описывающего движущий монополь /дион/ т'Хофта-Полякова.

О КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ПОЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ

Б.Г.Конопельченко

Классические решения нелинейных уравнений теории поля интенсивно исследуются в настоящее время /см.например, [I]/. Основное внимание привлекают локализованные решения с конечной энергией и решения с конечным действием /псевдочастицы/.

В данной заметке мы хотим обратить внимание на еще один класс точных решений нелинейных уравнений – на решения типа нелинейных плоских волн. В п.I получен ряд таких решений для четырехмерного уравнения синус-Гордона. В п.2 приведено решение, описывающее движущийся монополь т'Хофта-Полякова [2,3].

I. Рассмотрим четырехмерное уравнение синус-Гордон

$$\Box\varphi(x) + \frac{m^3}{\sqrt{\lambda}}\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\varphi(x) = 0, \qquad /1/$$

где $\varphi(x)$ – скалярное поле, константа m имеет размерность массы, λ – безразмерна, x – координаты.

Решениями типа нелинейных плоских волн будем называть решения вида $\varphi = \varphi(px)$, где p – импульс. Для уравнения /1/ одно из решений такого типа имеет вид

$$\varphi = 4\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{arctg} e^{i\frac{m}{M}(px)} \qquad /2/$$

где $p_\mu p_\mu = M^2 > 0$ / M – произвольная константа/.

Энергия, соответствующая решению /2/, бесконечна, однако, плотность энергии конечна и равна p_0. Конечной является и соответствующая плотность потока /$= \vec{p}$ /. Тем самым, решения типа /2/, подобно обычным плоским волнам / e^{ipx} /, имеют, по-видимому, отношение к описанию процессов рассеяния.

Отметим, что решение /2/ неаналитично по константе связи λ.

Для уравнения /I/ можно также найти бесконечный набор точных решений вида $\varphi=\varphi(p_1x, p_2x)$, где p_1 и p_2 - произвольные импульсы. Действительно, введем переменные $y_1=(p_1x)$, $y_2=(p_2x)$. Оператор $\Box$ имеет в этих переменных вид $\Box = p_1^2\partial_{y_1}\partial_{y_1}+2(p_1p_2)\partial_{y_1}\partial_{y_2}+p_2^2\partial_{y_2}\partial_{y_2}$. Эта квадратичная форма диагонализируется очевидным преобразованием переменных $y_1, y_2\to\tilde{y}_1,\tilde{y}_2$. В результате, в зависимости от соотношений между импульсами p_1, p_2 получаем одно из уравнений

$$\pm\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{y}_1^2}\pm\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde{y}_2^2}+\frac{m^3}{\sqrt{\lambda}}\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\varphi=0, \qquad /3/$$

т.е. по существу двумерное уравнение синус-Гордон, для которого известен бесконечный набор точных решений / N - солитонные решения, двойные солитоны/ [4]. Возвращаясь к переменным p_1x, p_2x получаем бесконечную совокупность точных решений типа $\varphi(p_1x, p_2x)$ исходного уравнения /I/.

Энергия, соответствующая этим решениям также бесконечна, однако, конечны плотность энергии и плотность потока.

2. Решение т'Хофта-Полякова [2,3], а также его обобщение [5,6] описывает локализованное покоящееся образование - монополь /дион/. Какой вид имеет это решение в произвольной системе отсчета /движущийся монополь/?

Модель, рассмотренная в [2,3], включает калибровочное векторное изовектррное поле $A_\mu^\alpha(x)$ и скалярное изовекторное поле $\varphi^\beta(x)$ / μ =0,I,2,3; α,β =I,2,3/. Решение, описывающее монополь /дион/, ищется в форме /в системе покоя/, в которой „перемешаны" лоренцевские и изотопические индексы [2,3]. Аналогичным свойством обладают и выражения для A_μ^α и φ^β, описывающие движущийся монополь /дион/.

Введем величины

$$\Phi^{\mu,\nu}=(x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu)f_1(s),$$

$$V_\rho^{\mu,\nu}=(g_{\mu\rho}x_\nu - g_{\nu\rho}x_\mu - i\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}x_\tau)f_2(s)+ \qquad /4/$$
$$+(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu)p_\rho f_3(s),$$

где p - четырехимпульс, $s^2=\frac{(px)^2}{p^2}-x^2$, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}$ - полностью антисимметричный тензор / μ,ν,ρ,τ =0,I,2,3/. Решение, соответствующее движущемуся монополю имеет вид

$$\varphi^\alpha(x)=\Phi^{0,\alpha}+\frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\Phi^{\beta,\gamma},$$

$$A_\mu^\alpha(x)=V_\mu^{0,\alpha}+\frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}V_\mu^{\beta,\gamma},$$

где α, β, γ =I,2,3 и функции $f_1(s)$, $f_2(s)$ и $f_3(s)$ равны

$$f_1(s)=\frac{1}{Me}\,\frac{H(s)}{s},\quad f_2(s)=\frac{K(s)-1}{s},\quad f_3(s)=\frac{1}{M^2e}\,\frac{Y(s)}{s},$$

где $H(s)$, $K(s)$, $Y(s)$ - суть функции, приведенные в [6]. Действительно, в системе покоя / $p_0=M$, $\vec{p}$ =0/ выражения /5/ переходят в соответствующие выражения работ [2,3,5,6] и, следовательно, в силу лоренц-инвариантности уравнений движения, являются решениями. Четырехимпульс монополя /диона/ равен p и $p^2=$ $=M^2$, где M - масса монополя /диона/.

Решения /5/ ковариантны относительно группы $SO(I,3)$ с генераторами $\mathcal{Y}_{0\alpha}=\mathcal{L}_{0\alpha}+iT_\alpha$, $\mathcal{Y}_{\alpha\beta}=\mathcal{L}_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}T_\gamma$, где $\mathcal{L}_{\mu\nu}$ - генераторы обычной группы Лоренца, T_α / α =I,2,3/ - генераторы группы изоспина.

Решения, описывающие движущийся монополь, рассматривались в работе [7]. Однако, выражения /4/, /5/ являются гораздо более компактными и наглядными.

Литература

1. Physics Reports, 23 C, № 3 (1976).
2. G. t'Hooft, Nucl.Phys., B79, 276 (1974).
3. А.М.Поляков, Письма в ЖЭТФ, 20, 430 /1974/.
4. В.Е. Захаров, Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев, ДАН СССР, 219, 1334 /1974/; Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев, ТМФ, 21, 160 /1974/.
5. B.Julia, A.Zee, Phys.Rev., D11, 2227 (1975).
6. M.K.Prasad, C.M.Sommerfield, Phys.Rev.Lett., 35, 760 (1975).
7. K.A.Friedman, M.Kaku, Phys.Rev., D14, 2023 (1976).

Работа поступила - 27 июня 1977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 5.7-1977 г. МН 07456
Усл. 0,3 печ.л., 0,2 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 64.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР