42

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 60

Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский

РАДИАЦИОННАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПРИ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Новосибирск

1977

РАДИАЦИОННАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПРИ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Я.С.Дербенёв, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматривается возможность получения поляризованных пучков электронов и позитронов при произвольно больших энергиях частиц в накопителях, когда существенную роль играют процессы диффузии спинов в неоднородных полях из-за квантовых флуктуаци излучения. Получены допуски на точность выполнения магнитной системы накопителей. Показано, что радиационная поляризация мс жет быть обеспечена для встречных пучков, в частности, в условиях оптимальной светимости, при увеличенном вертикальном раз ре пучков.

RADIATIVE POLARIZATION AT ULTRA-HIGH ENERGIES

Ya.S.Derbenev, A.M.Kondratenko, A.N.Skrinsky
Institute of Nuclear Physics,
Siberian Division, USSR Academy of Sciences, Novosibirsk

A b s t r a c t

The possibilities of obtaining the polarized beams of electrons and positrons at arbitrarily high energies are studied when the spin diffusion processes in inhomogeneous fields due to the quantum fluctuations of radiation become essential. The requirements for an accuracy of realizing the magnetic systems are settled which must be fulfilled to provide a high degree of the radiative polarization. The circumstance important for storage rings with a large number of elements is taken into account that the perturbations of the fields of individual elements are statistically independent. The possibility is shown for obtaining the polarized beams when the vertical dimension is increased (to increase the luminosity). The depolarizing effects are considered at extremely high energies when the spread of the spin precession frequencies exceeds the rotation frequency of particles in a storage ring. It is shown that the radiative polarization can be provided for colliding beams in the optimum luminosity conditions.

In special section the main formulae are given and a dependence of the criteria for existence of the radiative polarization in the conventional-type storage rings on the energy are discussed. In conclusion the additonal measures are discussed which may be useful for obtaining the radiative polarization of high-energy electrons and positrons.

I. Введение

В последнее время в связи с проектированием и строительством накопителей электронов и позитронов на IO–IOO ГэВ стал актуальным вопрос о возможности радиационной поляризации при столь высоких энергиях. Как известно, квантовые флуктуации излучения, стохастически перемешивая траектории частиц в непостоянных по направлению полях, приводят к диффузии спинов, причём скорость диффузии довольно быстро растёт с энергией /I,2/.

Этот эффект был бы пренебрежимо мал в идеальном накопителе с плоскими замкнутыми орбитами, магнитное поле на которых строго вертикально. При отклонениях от этой идеальной ситуации диффузия спинов может превзойти поляризующее действие излучения и деполяризовать пучок. Опасность представляют радиальное магнитное поле, его радиальный градиент и продольное поле на орбите$^{x)}$. Особым видом возмущения является поле встречных сгустков в накопителях со встречными пучками /5/.

Радиационная кинетика поляризации при произвольных условиях движения в накопителях подробно исследована в работах /2,5–7/. В данной работе на этой основе проведен общий анализ ситуации при высоких энергиях и сформулированы требования к точности выполнения магнитной системы, которым необходимо удовлетворить для обеспечения высокой степени радиационной поляризации. План изложения следующий. В разделе 2 приводится кинетическое уравнение, описывающее релаксацию спинов вследствие радиационных процессов при циклическом движении частиц с произвольной энергией. Уравнение включает два возможных механизма диффузии: нерезонансный, когда в процессе стохастическо-

---

x) Здесь мы будем иметь в виду обычную ситуацию с почти вертикальным магнитным полем. В принципе высокая степень радиационной поляризации может быть обеспечена в накопителях с меняющимся по направлению магнитным полем вдоль орбиты со сложным равновесным (периодическим) движением спина /3/. Динамическая устойчивость движения спина в таких накопителях доказана в работе /4/.

го блуждания частот спинового и орбитального движения не происходит пересечения спиновых резонансов, и резонансный, когда пересечения имеют место.

В разделах 3,4 рассмотрены основные эффекты, связанные с несовершенством магнитной системы, при энергиях, пока разброс частоты прецессии остаётся малым и определяющим является нерезонансный механизм диффузии. При этом принято во внимание важное для накопителей с большим числом элементов обстоятельство, что корреляция возмущающих полей от отдельных элементов отсутствует.

В разделе 5 рассмотрена диффузия спинов при "сверхвысоких" энергиях, когда разброс частот прецессии становится порядка или больше расстояния между соседними Фурье-гармониками возмущающих полей, т.е. частоты обращения. При этом в свою очередь нужно различать ситуации, когда последовательные прохождения отдельных резонансов при синхротронных колебаниях энергии являются коррелированными, или же такая корреляция теряется из-за квантовой диффузии энергии /2,8/ . В последнем случае с дальнейшим ростом энергии скорость диффузии спинов может расти медленнее, чем скорость поляризующих процессов и критерии существования поляризации ослабляются.

Вопрос об устойчивости поляризации встречных пучков рассмотрен в разделе 6. Сгусток встречных частиц, ввиду сильной нелинейности его поля, вносит серию резонансов, мощности которых слабо уменьшаются с повышением порядка резонанса. В этих условиях определяющим механизмом деполяризации является стохастическое прохождение резонансов из-за квантовых флуктуаций энергии.

В разделе 7 приводится сводка основных результатов, а в заключении обсуждаются некоторые способы дополнительного повышения устойчивости радиационной поляризации.

I. Общие формулы

В неоднородном поле изменение состояния поляризации происходит не только благодаря прямому действию излучения непосредственно в актах испускания квантов, но и вследствие возмущения излучением орбитального движения, когда изменение набирается "интегрально" в последующие моменты из-за отклонения траектории частицы.

Важность исследования эффектов воздействия излучения на поляризацию через орбитальное движение связано с тем, что времена релаксации орбитального движения на много порядков меньше времени поляризации. Поэтому даже небольшие изменения направления поля на траектории частицы могут оказывать сильное влияние на степень радиационной поляризации частиц.

Прецессия спина в поле накопителя описывается хорошо известным уравнением

$$\dot{\vec{S}} = \left[\vec{W}_\ell \, \vec{S}\right], \qquad (2.I)$$

где
$$\vec{W}_\ell = \left(1 + \gamma \frac{q_a}{q_0}\right) \frac{[\vec{v}\,\dot{\vec{v}}]}{v^2} - \frac{q}{\gamma} \frac{(\vec{B}\vec{v})\vec{v}}{v^2} - \frac{q}{\gamma^2 v^2}\left[\vec{v}\,\vec{E}\right],$$

$q = q_0 + q_a = \frac{e}{m} + q_a$ – гиромагнитное отношение, q_a –его аномальная часть, $\gamma = (1-v^2)^{-1/2}$, $(c=1)$, $\vec{v}$ и $\dot{\vec{v}}$ – скорость и ускорение частицы в электромагнитном поле $\vec{E}$, $\vec{B}$, (для электронов и позитронов $q_a/q_0 \approx \frac{\alpha}{2\pi} \approx 10^{-3}$).

Начнём с описания релаксации спинов вдали от спиновых резонансов. В этом случае применяется общий метод, используемый обычно в теории радиационных эффектов орбитального движения. Сначала определяются интегралы движения в поле накопителя – действия (или амплитуды) и фазы. Затем по теории возмущений находятся средние по фазам скорости изменений переменных действия под влиянием излучения. Ввиду размешивания по фазам этого достаточно для нахождения времен релаксации и равновесного состояния.

В однородном магнитном поле спиновыми переменными действие – фаза, очевидно, являются проекции спина на направление поля и фазы прецессии вокруг поля. Поскольку уравнение (2.I) описывает вращение, переменная действия в общем случае движения с изменяющейся по направлению угловой скоростью имеет вид

$$S_{\vec{n}} = \vec{S}\vec{n}(\vec{P},\vec{r}),$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, задающий направление оси прецессии и являющийся функцией импульса $\vec{P}$ и координат $\vec{r}$ частицы /6/. Сопряженной к $S_{\vec{n}}$ переменной является фаза прецессии ψ вокруг $\vec{n}$.

Вектор $\vec{n}$ является не зависящим явно от времени решением уравнения (I.I) и полностью определяется траекторией частицы. Соответственно, спектр $\vec{n}$ содержит лишь частоты орбитального движения. Наибольшей чувствительностью к параметрам траектории ось $\vec{n}$ обладает в области спиновых резонансов, когда средняя частота прецессии $\langle\dot{\psi}\rangle$ близка к комбинациям из частот орбитального движения. По отношению к спиновому ось $\vec{n}$ играет ту же роль, что и зависящие от энергии замкнутые орбиты частиц по отношению к бетатронным колебаниям.

После размешивания по фазам ψ, из-за разброса частот прецессии $\langle\dot{\psi}\rangle$, средний спин для группы частиц, движущихся вблизи равновесной орбиты, будет направлен по оси прецессии на равновесной траектории $\vec{n}_s(\theta) \equiv \vec{n}(\vec{P}_s, \vec{r}_s)$:

$$\langle\vec{S}\rangle = \langle S_{\vec{n}}\vec{n}\rangle + \langle\vec{S}_\perp\rangle \simeq \langle S_{\vec{n}}\rangle\vec{n}_s$$

Вектор $\vec{n}_s$, очевидно, периодичен по обобщенному азимуту частицы θ: $\vec{n}_s(\theta) = \vec{n}_s(\theta+2\pi)$. Таким образом устойчивое, повторяющееся от оборота к обороту направление поляризации осуществляется при произвольных (стационарных) полях 4 .

В данной работе будем рассматривать ситуацию, когда направление $\vec{W}_\ell$ мало отличается от вертикального. Тогда направление $\vec{n}_s$ близко к вертикальному. Малое отклонение $\vec{n}$ от вертикального, которое необходимо знать для количественного описания деполяризующего воздействия квантовых флуктуаций излучения, может быть найдено по теории возмущений /2/.

Как обычно, радиус вектор частицы $\vec{r}$ представим в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}_o(\theta) + x\vec{e}_x(\theta) + z\vec{e}_z$$

где x – радиальное, z – вертикальное отклонения частицы от некоторой идеальной плоской орбиты $\vec{r}_o(\theta)$, $\vec{e}_x, \vec{e}_z$ – соответствующие орты, θ – обобщенный азимут частицы. Очевидно:

$$\vec{r}_o' \equiv \frac{d\vec{r}_o}{d\theta} = R\vec{e}_y = R[\vec{e}_z, \vec{e}_x], \quad \vec{e}_x' = \mathcal{K}\vec{e}_y, \quad \vec{e}_y' = -\mathcal{K}\vec{e}_x, \quad \vec{e}_z' = 0,$$

где $\mathcal{K}(\theta) = B_z/\langle B_z\rangle_{2\pi}$ – безразмерная кривизна идеальной траектории ($\langle B_z\rangle = \int_0^{2\pi} B_z d\theta/2\pi$), R – периметр орбиты, деленный на 2π.

Движение спина удобно описывать в системе ортов

$$\vec{e}_1 = \frac{[\vec{v}\vec{e}_z]}{|[\vec{v}\vec{e}_z]|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{v}}{v}, \quad \vec{e}_3 = [\vec{e}_1\vec{e}_2] \tag{2.2}$$

мало отличающихся от ортов $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$. В системе (2.2) компоненты угловой скорости прецессии в направлении $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$ прямо пропорциональны аномальному моменту, а компонента вдоль $\vec{e}_2$ очень слабо зависит от него ($q_a \ll q_o$). Это приводит к упрощению вычислений. Вычитая из $\vec{W}_\ell$ угловую скорость движения базиса, получаем следующее выражение для угловой скорости прецессии $\vec{W}$ в системе (2.2):

$$\begin{aligned} W_1 &= \vec{W}\vec{e}_1 \simeq q_a(B_y\dot{x} - B_x) \\ W_2 &\simeq (q_o/\gamma)(B_y + B_x\dot{x}) \\ W_3 &\simeq -q_a B_z \end{aligned} \tag{2.3}$$

Компоненты W_1 и W_2 малы по сравнению с W_3 и в линейном приближении имеем

$$\vec{n} = \vec{e}_3 + \mathrm{Im}\left\{(\vec{e}_1 - i\vec{e}_2)\exp\left(i\int_0^t W_3 dt\right)\int_{-\infty}^t (W_1 + iW_2)\exp\left(-i\int_0^t W_3 dt\right)dt\right\}. \tag{2.4}$$

Интегрирование в (2.4) производится с положительной мнимой добавкой $+i0$ к W_3. Спектр построенного таким образом решения, в соответствии с определением оси прецессии, содержит лишь частоты орбитального движения.

Если перейти к интегрированию по азимуту θ и разложить в ряд Фурье подинтегральное выражение, то решение (2.4) для $\vec{n}$ запишется в виде

$$\vec{n} = \vec{e}_3 + \operatorname{Im}\left\{(\vec{e}_1 - i\vec{e}_2)\exp\left[i\int_0^\theta\left(\frac{W_3}{\dot\theta} - \nu\right)d\theta\right]\sum_K \frac{w_K}{\nu - \nu_K}\exp(i\psi_K)\right\}, \quad (2.5)$$

где $\nu = \langle W_3/\dot\theta\rangle \simeq \gamma q_a/q_0$ – средняя частота прецессии спина вокруг $\vec{n}$ (в единицах частоты обращения частиц в накопителе), w_K – амплитуды резонансных гармоник возмущений, ψ_K и $\nu_K = d\psi_K/d\theta$ целочисленные комбинации из фаз и частот орбитального движения:

$$(W_1 + iW_2)\exp\left[-i\int_0^\theta\left(\frac{W_3}{\dot\theta} - \nu\right)d\theta\right] = \sum_K w_K e^{i\psi_K}.$$

Величина $|w_K|$ играет роль мощности резонанса $\nu = \nu_K$ /8/. Формулы (2.4) и (2.5) справедливы при $|\nu - \nu_K| \gg |w_K|$.

Проекция спина на $\vec{n}$ будет медленно изменяться под действием излучения, приближаясь к некоторому значению, определяемому равновесием поляризующих и деполяризующих процессов. Средняя скорость изменения $S_{\vec{n}}$ запишется в виде:

$$\dot{\overline{S_{\vec{n}}}} = \overline{\frac{d}{dt}\delta S_{\vec{n}}} = \overline{\vec{n}\frac{d}{dt}\delta\vec{S}} + \overline{\vec{S}\frac{d}{dt}\delta\vec{n}} + 2\overline{\frac{d}{dt}\delta\vec{S}\delta\vec{n}},$$

где $\delta\vec{S}$ и $\delta\vec{n}$ – приращения $\vec{S}$ и $\vec{n}$ под действием излучения. Первый член $\overline{\vec{n}\frac{d}{dt}\delta\vec{S}}$ описывает прямое действие излучения на спин, второй – воздействие излучения на ось прецессии возмущением орбитального движения. Корреляционный член $2\overline{\frac{d}{dt}\delta\vec{S}\delta\vec{n}}$ для ультрарелятивистских электронов мал и им можно пренебречь.

В случае, когда направление $\vec{W}$ мало отличается от вертикального, член $\overline{\vec{S}\frac{d}{dt}\delta\vec{n}}$ описывает деполяризующее действие квантовых флуктуаций энергии:[x)]

$$\overline{\vec{S}\frac{d}{dt}\delta\vec{n}} = S_{\vec{n}}\,\overline{\vec{n}\frac{d}{dt}\delta\vec{n}} = -\frac{1}{2}\overline{\frac{d}{dt}(\delta\vec{n})^2}\,S_{\vec{n}} = -\frac{1}{2}\left\langle\left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}\right)^2\overline{\frac{d}{dt}(\delta\gamma)^2}\right\rangle S_{\vec{n}}.$$

---

x) В накопителях с сильно изменяющимся по направлению магнитным полем возникает дополнительный поляризующий эффект, обязанный зависимости радиационной силы торможения от спина.

Для степени поляризации частиц $\zeta = \langle S_{\vec{n}}\rangle / S$ получаем следующее уравнение (время будем измерять в единицах периода обращения частиц в накопителе, делённого на 2π):

$$\dot\zeta = -(\lambda + \lambda_d^\circ)\zeta - \frac{\lambda r_e}{R^2}\gamma^5\langle K^3\rangle, \quad (2.6)$$

где $\lambda = \frac{5\sqrt{3}}{8}\frac{\lambda r_e}{R^2}\gamma^5\langle|K|^3\rangle$, $\lambda_d^\circ = \frac{55}{48\sqrt{3}}\frac{\lambda r_e}{R^2}\gamma^7\left\langle\left(\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}\right)^2|K|^3\right\rangle$, $\lambda = \frac{\hbar}{m}$ и $\frac{e^2}{m}$ – комптоновская длина волны и классический радиус электрона.

Таким образом, частицы поляризуются по направлению средней угловой скорости вращения частиц ($\zeta > 0$) или против ($\zeta < 0$) со степенью

$$\zeta_{t\to\infty} = -\frac{8}{5\sqrt{3}}\frac{\langle K^3\rangle}{\left\langle|K|^3\left[1 + \frac{11}{18}\left(\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}\right)^2\right]\right\rangle}, \quad (2.7)$$

которая устанавливается за характерное время $T = (\lambda + \lambda_d^\circ)^{-1}$.

В идеальном накопителе, когда замкнутые орбиты являются плоскими и продольное магнитное поле на них отсутствует, ось прецессии определяется вертикальными отклонениями импульса и координаты и не зависит от энергии ($\partial\vec{n}/\partial\gamma = 0$). Деполяризующее воздействие квантовых флуктуаций излучения обязано при этом лишь диффузии импульса в вертикальном направлении, которая примерно в γ раз меньше, чем продольная. Эта диффузия может быть существенной лишь вблизи спиновых резонансов с бетатронной частотой вертикальных колебаний, от которых всегда можно отстроиться. Таким образом, в идеальном накопителе (с постоянным знаком поля) степень равновесной поляризации и характерное время её установления будут равны

$$\zeta_{t\to\infty} = -5\sqrt{3}/8 = -92\%, \quad T = \lambda^{-1} = \left[\frac{5\sqrt{3}}{8}\frac{\lambda r_e}{R^2}\gamma^5\langle|K|^3\rangle\right]^{-1}.$$

Так как в идеальном накопителе существенны лишь эффекты прямого взаимодействия спина с излучением, последний результат можно получить по вероятностям переворотов спинов в актах излучения, которые были найдены впервые для однородного магнитного поля в работе /9/, а для неоднородного поля в работах /10-11/.

При отклонениях магнитного поля от идеального ось прецессии $\vec{n}$ становится зависящей от энергии частицы. Квантовые флуктуации энергии приводят к "дрожанию" оси прецессии, а значит и к дополнительной диффузии спинов. Деполяризующее воздействие квантовых флуктуаций излучения сильно увеличивается при приближении к спиновым резонансам. Обычно энергию частиц и параметры магнитной системы следует выбирать так, чтобы отстроиться от наиболее мощных резонансов.

Ситуация оказывается иной при достаточно высокой энергии или в условиях встречных пучков, когда избежать резонансов невозможно. Развитая в работе /7/ теория возмущений, позволяет количественно описывать и деполяризацию в области резонанса. Скорость этих процессов описывается формулой

$$\lambda_d^2 = \pi \sum_k \langle |w_k|^2 \delta(\nu - \nu_k) \rangle , \qquad (2.8)$$

где $\delta(\nu - \nu_k)$ – дельта-функция, скобки $\langle \ldots \rangle$ означают усреднение по равновесному распределению частиц в пучке. Формула (2.8) описывает деполяризующее воздействие многократных некоррелированных прохождений резонанса при стохастических блужданиях расстройки $\nu - \nu_k$, происходящих при радиационном перемешивании траекторий частиц. Для применимости формулы (2.8) нужно лишь, чтобы среднеквадратичная расстройка $\sigma_0 = \langle (\nu - \nu_k)^2 \rangle^{1/2}$ превышала обратные времена радиационного перемешивания гармоники w_k и самой расстройки $\nu - \nu_k$, равные, соответственно, Λ_k и Λ:

$$\sigma_0 \gg \Lambda_k, \Lambda .$$

Требуется также выполнение условия быстроты диффузионного прохождения резонанса

$$\sigma_0 \Lambda \gg |w_k|^2 ,$$

которое удовлетворяется в практически интересной области возможного существования радиационной поляризации, когда заведомо

$$\lambda_d^2 \approx \lambda \ll \Lambda .$$

Полное уравнение для степени поляризации ζ, таким образом, будет иметь вид (2.6), в котором величина λ_d^0 должна быть заменена на $\lambda_d = \lambda_d^0 + \lambda_d^2$.

3. Влияние искажения равновесного движения

Для процессов диффузии спинов, как уже отмечалось, существенную роль играют различного рода неидеальности магнитной системы накопителя. При сверхвысоких энергиях ($\gamma q_a / q_0 \gg 1$) наиболее опасными являются воздействие радиального магнитного поля, приводящего к вертикальному искажению замкнутых орбит, и воздействие его радиального градиента, связывающего вертикальные бетатронные колебания с радиальным движением. Деполяризующие эффекты, связанные с продольным полем B_y, как видно из (2.3), примерно в $(\gamma q_a / q_0)^2$ раз меньше эффектов от радиального поля B_x той же самой величины.

В этом и следующем разделе рассмотрим диффузию спинов в области энергий, когда разброс $\nu = \gamma q_a / q_0$ из-за разброса энергий в пучке много меньше единицы – расстояния между спиновыми резонансами.

При оптимальном выборе значений энергии расстояние по частоте от опасных резонансов будет много больше разброса $\nu(\gamma)$. При этом можно пренебречь медленными синхротронными колебаниями и пользоваться формулой (2.7), описывающей нерезонансный механизм диффузии.

Рассмотрим влияние радиального магнитного поля $B_x(\vec{z}_s)$ на равновесной орбите, которое может появиться, например, при наклонах магнитов поворотных участков, при вертикальных сдвигах фокусирующих элементов. Изучение этих эффектов было начато авторами работы /I/ и продолжено в /2/. Зависимость $\vec{n}$ от энергии в этом случае, в основном, определяется зависимостью от энергии частоты прецессии W_3, пропорциональной большому значению ν.

В интересующем нас случае

$$(W_1 + i W_2) dt = - q_a B_x dt = \nu \frac{B_x}{\langle B_z \rangle} d\theta$$

$$\int_0^t W_3 dt = \nu (\tilde{\mathcal{K}} - x'/R) ,$$

где

$$\tilde{\mathcal{K}} = \int_0^\theta \mathcal{K} d\theta .$$

Радиальное отклонение x удовлетворяет уравнению

$$x'' + g_x x = \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \mathcal{K} R, \tag{3.I}$$

где $g_x = \mathcal{K}^2 + R\partial B_z/\langle B_z\rangle\partial x$. Таким образом, с помощью (2.4) получаем:

$$\left(\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}\right)^2 = \frac{\nu^2}{\langle B_z\rangle^2}\left|\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[e^{i\nu\tilde{\mathcal{K}}}\int_{-\infty}^{\theta}\left(1+i\nu\frac{x'}{R}\right)B_x e^{-i\nu\tilde{\mathcal{K}}}d\theta\right]\right|^2 =$$

$$= \frac{\nu^4}{\langle B_z\rangle^2}\left|\int_{-\infty}^{\theta}\mathcal{K}\left(\int_{-\infty}^{\theta}B_x e^{-i\nu\tilde{\mathcal{K}}}d\theta\right)d\theta + \int_{-\infty}^{\theta}\mathcal{K}(\theta)\int_{-\infty}^{\theta}B_x(\theta_1)\,\mathrm{Im}\left[f_x(\theta)f_x^{*\prime}(\theta_1)\right]e^{-i\nu\tilde{\mathcal{K}}}d\theta d\theta_1\right|^2.$$

Здесь $f_x(\theta) = e^{2\pi i\nu_x} f_x(\theta - 2\pi)$ – решение Флоке уравнения (3.I), с нормировкой $\mathrm{Im}\, f_x' f_x^* = 1$ (ν_x –частота радиальных бетатронных колебаний в единицах частоты обращения). При вычислении производной по энергии учтено, что x и x' в момент скачка энергии непрерывны (в этот момент испытывает скачок, в согласии с уравнением (3.I), лишь x'').

Первый член в формуле (3.2) обязан изменению с энергией средней частоты прецессии спина. Для гармоник с номером K, близким к ν, этот член резонансно увеличивается пропорционально $(K-\nu)^{-2}$. Второй член, связанный с бетатронной модуляцией частоты прецессии, возрастает обратно пропорционально первой степени расстройки вблизи резонансов $K \approx \nu$ и $K \approx \nu \pm \nu_x$.

Для накопителей на большие энергии характерно большое число элементов магнитной системы и жёсткая фокусировка ($\nu_x, \nu_z \gg 1$). Поэтому в таких установках наибольшую опасность представляют эффекты, обязанные зависимости от энергии средней частоты прецессии (величина второго члена в (3.2) примерно в ν_x раз меньше первого). Это означает, что мощность резонансов $\nu = \pm\nu_x + K$ примерно в ν_x раз меньше, чем резонансов $\nu = K$. Поэтому воздействие радиального поля, за исключением малых окрестностей вблизи точек $\nu = \pm\nu_x + K$, можно описать формулой[x)]:

x) При получении окончательных формул в этой работе (за исключением последнего раздела 8) имеется в виду обычный накопитель с вертикальным полем постоянного знака ($\mathcal{K} > 0$) и с большим числом периодов на обороте частицы.

$$\frac{\left\langle \mathcal{K}^3\left(\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}\right)^2\right\rangle}{\langle\mathcal{K}^3\rangle} = \frac{\nu^4}{\langle\mathcal{K}^3\rangle\langle B_z\rangle^2}\left\langle\mathcal{K}^3\left|\int_{-\infty}^{\theta}\mathcal{K}\left(\int_{-\infty}^{\theta}B_x e^{-i\nu\tilde{\mathcal{K}}}d\theta\right)d\theta\right|^2\right\rangle \simeq \nu^2\sum_K\frac{|w_K|^2}{(\nu-K)^4}, \tag{3.3}$$

где w_K – гармоника ряда Фурье величины

$$\nu\frac{B_x}{\langle B_z\rangle}\exp\left[-i\nu\int_0^{\theta}(\mathcal{K}-1)d\theta\right] = \sum_K w_K e^{iK\theta}. \tag{3.4}$$

Величина $B_x(\vec{z}_s)$ может быть выражена через вертикальные отклонения z_s равновесной орбиты от идеальной, плоской

$$B_x = z_s''\langle B_z\rangle/R.$$

Отклонения z_s удовлетворяют уравнению

$$z_s'' + g_z z_s = RH,$$

где $g_z = -R\partial B_z/\langle B_z\rangle\partial x$, величина H выражается через радиальные поля на идеальной траектории: $H = B_x(\vec{z}_0)/\langle B_z\rangle$.

Если угол поворота спина вокруг поля при прохождении одного элемента периодичности мал ($\nu \ll N$), то можно положить $\mathcal{K} = 1$, $w_K = \nu K^2 z_s$ и формула (3.3) будет соответствовать полученной для этого случая впервые в работе /I/.

Для сохранения степени радиационной поляризации, как видно из (2.7) и (3.3), необходимо, чтобы ближайшая ν гармоника $B_x(\vec{z}_s)$ была достаточно мала:

$$|B_x^K| \lesssim \langle B_z\rangle\frac{(\nu-K)^2}{\nu^2}. \tag{3.6}$$

Для того, чтобы понять, насколько это реально может быть выполнено, нужно принимать во внимание следующее. Возмущающие поля могут быть связаны с систематическими погрешностями элементов периодической системы накопителя или со случайными (обусловленными, например, случайными ошибками при изготовлении элементов системы, неточностью выставки элементов и т.п.). Расстояния между линиями частотного спектра систематических возмущений, в единицах частоты обращения в накопителе, порядка большого числа элементов периодичности. Параметры накопителя должны выбираться так, чтобы частота прецессии спинов ν могла бы находиться на достаточном удалении от частот этих возмущений. Расстояние же между спектральными линиями случайных возмущений порядка частоты обращения частиц в накопителе. Однако, в виду того, что корреляция возмущений от отдельных элементов системы будет отсутствовать, результирующая амплитуда гармоник возмущающего поля будет примерно в $\sqrt{Q}$ раз меньше, чем для систематических возмущений, где Q – число независимых элементов системы.

Проведём расчёт влияния случайных возмущений. Пусть на орбите существует большое число Q участков, необязательно заполняющих всю орбиту, на которых возмущающие радиальные поля полностью некоррелированы между собой.

Обычно выполнено условие, что на каждом элементе с радиальным полем не успевают существенно измениться угол поворота спина вокруг вертикального направления и решения Флоке уравнения бетатронных колебаний, и мы ограничимся выписыванием формул в этом приближении; при этом возмущающее поле одного элемента можно представить дельта-функцией.

Мощности резонансов $|w_K^{(n)}|$ обязанные появлению радиального поля величиной $H_n = H(\theta_n)$ в безразмерных единицах на одном n -ом участке, занимающем долю орбиты $\eta_n = \ell_n / 2\pi R$, вычисляются по формуле, получаемой из (3.4) и (3.5)

$$|w_K^{(n)}| = \frac{\nu}{2\pi R} \left| \int_0^{2\pi} z_s'' \exp[-i\nu(\tilde{\chi}-\theta) - iK\theta]\, d\theta \right| \simeq \frac{\nu^2}{2\pi R} \left| \int_0^{2\pi} \chi z_s' \exp(-iK\tilde{\chi})\, d\theta \right| =$$

$$= \frac{\nu}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} H F^{\nu=K} \exp(-iK\theta)\, d\theta \right| \approx \nu \eta_n |H_n F_n^{\nu=K}|,$$

где F^ν – характеристическая функция накопителя, определяемая решением Флоке f_z уравнения вертикальных бетатронных колебаний

$$F^\nu = \frac{\nu}{2} \left[f_z \int_{-\infty}^{\theta} \chi f_z^{*\prime} e^{-i\nu\tilde{\chi}} d\theta - f_z^* \int_{-\infty}^{\theta} \chi f_z' e^{-i\nu\tilde{\chi}} d\theta \right] e^{i\nu\theta} =$$

$$= \frac{\nu}{2} \left\{ \frac{f_z(\theta) \int_{\theta-2\pi/P}^{\theta} \chi f_z^{*\prime} e^{-i\nu\tilde{\chi}} d\theta}{1 - \exp[i \frac{2\pi}{P}(\nu+\nu_z)]} - \frac{f_z^*(\theta) \int_{\theta-2\pi/P}^{\theta} \chi f_z' e^{-i\nu\tilde{\chi}} d\theta}{1 - \exp[i \frac{2\pi}{P}(\nu-\nu_z)]} \right\} \tag{3.7}$$

где P – число суперпериодов магнитной системы на одном обороте частицы. Функция F^ν возрастает вблизи резонансов $\nu = mP \pm \nu_z$, между этими резонансами $|F^\nu|$ обычно бывает порядка единицы или меньше, за исключением относительно малых областей ν , в которых функция по величине может стать порядка ν/P . В подинтегральное выражение (3.7) входит функция

Флоке лишь на поворотных участках орбиты. Величина $|F^\nu|$ пропорциональна $|f_z|$, что означает, что в мощность $|w_K|$ основной вклад дают участки с большими β -функциями.

Для круглого накопителя (χ =I) и равномерной фокусировки, когда модуль функции Флоке $|f_z|$ слабо зависит от азимута , F^ν примерно равна

$$F^\nu = \frac{\nu^2}{\nu^2 - \nu_z^2}\ .$$

Результирующее воздействие всех участков, в силу их некоррелированности, будет определяться суммой

$$|w_K|^2 = \sum_{n=1}^{Q} |w_K^{(n)}|^2 = \nu^2 \sum_{n=1}^{Q} \eta_n^2 \overline{H_n^2} |F_n^{\nu=K}|^2\ . \tag{3.8}$$

Для того, чтобы получить условие существования радиационной поляризации, нужно в формуле (3.3) просуммировать по " K ". Наибольший вклад дают гармоники с номерами " K " ближайшими к ν . Как видно из (3.7), величины $|F^{\nu=K}|$, а значит и $|w_K|$, очень слабо зависят от " K ", кроме резонансных случаев, когда $[\nu]$ – целая часть ν – близка к $\pm\nu_z + mP$ и когда $|w_{K=[\nu]}|$ существенно вырастает. Таким образом, используя формулу

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\nu-K)^4} = \frac{\pi^4}{3} \frac{1+2\cos^2\pi\nu}{\sin^4\pi\nu}\ ,$$

получаем, что для существования в среднем степени радиационной поляризации выше 50%, нужно чтобы:

$$\sum_{n=1}^{Q} \eta_n^2 \overline{H_n^2} |F_n^{[\nu]}|^2 \leqslant \frac{54}{11\pi^4} \frac{\sin^4\pi\nu}{\nu^4(1+2\cos^2\pi\nu)}\ . \tag{3.9}$$

Условие (3.9) имеет вероятностный смысл. Это условие задаёт точность изготовления и установки элементов магнитной системы и позволяет оценить технические трудности при строительстве накопителей, используемых для получения поляризованных электронов и позитронов.

Например, при вертикальных сдвигах линз на величину Δz_L в области линз появляется радиальное поле $H = g_z \Delta z_L / R$. Предполагая одинаковыми величины $\eta_n |g_z|_n |F_n^{[\nu]}|$ для всех линз, из (3.9) получаем условие на возможные вертикальные смещения линз ($\nu = [\nu] + 1/2$):

$$\sqrt{\overline{(\Delta z_L)^2}} \leqslant \frac{\sqrt{54/11}}{\pi^2} \frac{R\sqrt{Q_L}}{|g_z|_n |F_n^{[\nu]}| \varepsilon \nu^2}, \tag{3.10}$$

где $\varepsilon = \sum_{n=1}^{Q_L} \eta_n$ – доля орбиты, занимаемая всеми линзами.

При случайных наклонах магнитов с вертикальным полем на угол α_M возникаёт радиальное поле $H = \alpha_M \mathcal{K}$. Предполагая одинаковыми все Q_M участков, получаем следующую формулу для требуемой точности выставки магнитов x):

$$\sqrt{\overline{\alpha_M^2}} \leqslant \frac{\sqrt{54/11}}{\pi^2} \frac{\sqrt{Q_M}}{\nu^2 |F^{[\nu]}|}. \tag{3.11}$$

Для случайных возмущений все гармоники поля H вплоть до высоких номеров порядка $1/\eta$ примерно одинаковы. В этом случае становится возможным условие (3.9) переписать как условие на максимально возможные вертикальные отклонения равновесной орбиты z_s, что иногда представляет интерес. Формула для средневероятного отклонения $\overline{z_s^2}$ на азимуте θ при наличии случайных радиальных полей на Q участках имеет вид /12/:

$$\overline{z_s^2} = \frac{\pi^2}{2} \frac{R^2 |f_z(\theta)|^2}{\sin^2 \pi \nu_z} \sum_{n=1}^{Q} \eta_n^2 \overline{H_n^2} |f_z|_n^2. \tag{3.12}$$

Предполагая для простоты одинаковыми $|f_z|_n$ и $|F_n^{[\nu]}|$ на всех Q участках и подставляя последнее выражение в (3.9), имеем:

$$|\sin \pi \nu_z| \sqrt{\overline{z_s^2}} / |f_z(\theta)| \leqslant \frac{\sqrt{27/11}}{\pi} R \frac{|f_z|_n}{|F_n^{[\nu]}|} \frac{\sin^2 \pi \nu}{\nu^2 \sqrt{1 + 2\cos^2 \pi \nu}} \tag{3.13}$$

Условие (3.13) определяет допустимое отклонение равновесной

---

x) Строго говоря при выписывании требуемого условия на приближать поворотный участок дельта-функцией неправильно. Учёт конечной длины магнита приводит к формуле (3.9), в которой нужно заменить $|F_n^{[\nu]}|$ в центре магнита на

$$|F_n^{[\nu]}| \to \frac{1}{2\pi \eta_n} \left| \int_n H F^{[\nu]} e^{-i\nu\theta} d\theta \right|.$$

Однако, такая поправка обычно численно мала.

орбиты x).

Заметим, что при стремлении ν_z к целому числу K, несмотря на увеличение $\sqrt{\overline{z_s^2}} \sim |\nu_z - K|^{-1}$, условие получения радиационной поляризации остаётся таким же, за исключением резонансов $\pm \nu_z = mp + [\nu]$.

Условия (3.9), (3.13) выписаны для случайных возмущений. Так как гармоники радиального поля, существенно влияющие на вертикальные отклонения и спиновую диффузию, разные, для специальных возмущений можно иметь независимо любые по величине отклонения равновесной орбиты от плоской и высокую степень поляризации пучка.

4. Влияние градиента радиального поля xx)

Рассмотрим теперь эффекты, обязанные неоднородной по сечению пучка части радиального поля $\Delta B_x = x\,\partial B_x/\partial x + \Delta z\,\partial B_x/\partial z$, где x и Δz удовлетворяют уравнениям:

$$x'' + g_x x = \mathcal{K} \frac{\Delta \gamma}{\gamma} - \text{æ}\, \Delta z, \tag{4.1}$$

$$(\Delta z)'' = \frac{R}{\langle B_z \rangle} \Delta B_x = -g_z \Delta z + \text{æ}\, x.$$

Параметр $\text{æ}(\theta) = R\,\partial B_x / \langle B_z \rangle \partial x$ как функция азимута θ может содержать гармоники с любым номером "K". Решение при малой связи можно записать в виде:

$$x = C_x f_x + C_x^* f_x^* + \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \psi_x, \tag{4.2}$$

$$\Delta z = C_z f_z + C_z^* f_z^* + C_x f_{xz} + C_x^* f_{xz}^* + \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \psi_z,$$

---

x) Формулы (3.9) и (3.13) получаются в предположении полной некоррелированности возмущений отдельных элементов относительно плоской орбиты. В общем случае при наличии корреляций условия (3.9) и (3.13) определяют допустимые отклонения радиального поля и вертикальной координаты от значений на средней орбите, получаемой сглаживанием по бетатронному периоду $2\pi R/\nu_z$. На длине значительно превышающей $2\pi R/\nu_z$ отклонение такой средней орбиты от плоской может существенно превышать средне-квадратичную погрешность, определяемую формулой (3.12).

xx) Эффекты деполяризации от продольного поля нетрудно рассчитать аналогичным образом, как это сделано для B_x и $\partial B_x/\partial x$. Однако, они могут быть существенными лишь при специальном введении продольных полей большой величины /2/.

где C_x, C_z – комплексные амплитуды свободных x и z колебаний с частотами $\pm\nu_x + mp$, $\pm\nu_z + mp$. Слагаемые $C_x f_{xz} + C_x^* f_x^*$ и $\frac{\Delta\gamma}{\gamma}\psi_z$ описывают "вынужденное" вертикальное движение с частотами $\pm\nu_x + K$ и K соответственно. Поперечное x- и z -движение возбуждается квантовыми флуктуациями энергии. В момент вылета кванта излучения остаются непрерывными x, x' и z, z', но скачком изменяются вместе с $\Delta\gamma$ амплитуды C_x и C_z; поэтому "вынужденная" и "свободная" части z -колебаний при возбуждении вертикального размера флуктуациями энергии имеют один порядок величины. Таким образом, градиент $\partial B_x/\partial x$ приводит к появлению в движении спина резонансов с частотами $\pm\nu_z + mp$, $\pm\nu_x + K$, K вблизи которых диффузия спинов будет сильно увеличиваться.

Формулы для скорости диффузии, возникающей из-за наличия на орбите градиента $\partial B_x/\partial x$, были получены ранее в работе /2/. Мы остановимся на этом вопросе более подробно в связи с тем, что параметр $\partial B_x/\partial x$ может использоваться для увеличения вертикального размера с целью повышения светимости встречных пучков. При этом возникает вопрос о соотношении между установившимся размером пучка и скоростью спиновой диффузии, т.е. об оптимальной светимости поляризованных пучков.

Приведём кратко вывод общей формулы. Прямое вычисление величины

$$\left(\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}\right)^2 = \nu^2\left|\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\int_{-\infty}^{\theta}(\Delta z)'' e^{-i\nu\tilde{\chi}}d\theta\right|^2 \qquad (4.3)$$

с подстановкой (4.2) довольно громоздко. Вычисление можно сделать более компактным, используя интегрирование по частям и условия непрерывности поперечного движения в момент вылета квантов ($\partial z/\partial\gamma = \partial z'/\partial\gamma = \partial x/\partial\gamma = \partial x'/\partial\gamma = 0$). При этом удобно уравнение (4.1) и его решение записать в следующей эквивалентной форме, введя зависящую от времени амплитуду $A_z(\theta)$:

$$z = A_z f_z + A_z^* f_z^*, \qquad (4.4)$$
$$A_z' = \frac{1}{2i}\,æ\, x f_z^*.$$

Тогда (4.3) преобразуется к виду

$$\left(\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}\right)^2 = \nu^2\left|\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\int_{-\infty}^{\theta}æ\, x F^{\nu} e^{-i\nu\theta}d\theta\right|^2 \qquad (4.5)$$

где F^{ν} определяется формулой (3.7). Представляя x -движение в форме, аналогичной (4.4), окончательно получаем следующую формулу, полностью описывающую диффузию спинов при наличии градиента поля $æ$:

$$\left\langle K^3\left(\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}\right)^2\right\rangle/\langle K^3\rangle = \frac{\nu^2}{4\langle K^3\rangle}\left\langle K^3\left|\int_{-\infty}^{\theta}K\left[f_x^*\int_{-\infty}^{\theta}æ f_x F^{\nu} e^{-i\nu\theta}d\theta - f_x\int_{-\infty}^{\theta}æ f_x^* F^{\nu} e^{-i\nu\theta}d\theta\right]d\theta\right|^2\right\rangle. \qquad (4.6)$$

Как видно, основное действие оказывают гармоники, для которых номер "K" наиболее близок к $\nu + mp$ и $\nu + mp \pm \nu_x$, в то время как вертикальный размер, очевидно, наиболее чувствителен к резонансам $\nu_z - \nu_x + mp \simeq K$. Например, при сближении частот ν_x и ν_z размер возрастает пропорционально $|\nu_x - \nu_z|^{-1}$, скорость же диффузии практически не меняется. Это явление нетрудно понять из общих соображений. Для спиновой диффузии существенны отклонения z -движения, появляющиеся после излучения кванта на временах порядка $|\nu - \nu_K|^{-1}$. Эти отклонения, очевидно, не зависят (при $|\nu - \nu_K| \gg |\nu_z - \nu_x|$) от близости частот ν_z и ν_x и определяются лишь величиной связи $æ$.

Пропорционально $|\nu_z - \nu_x|^{-1}$ увеличиваются скачки свободной части z -колебаний и вынужденной, однако сумма этих скачков, ввиду непрерывности z, z', x, x' в моменты флуктуаций энергии на временах $|\nu - \nu_K|^{-1}$ остается прежней. Независимость скорости диффузии спинов от резонансов в орбитальном движении является общим свойством рассмотренного механизма диффузии. Мы приходим к важному выводу, что можно увеличивать размеры пучка без изменения устойчивости радиационной поляризации. Для этого можно использовать "естественные" возмущения, связанные с погрешностью в выполнении фокусирующей системы, либо специально введенные, не содержащие гармоник, близких к $\nu + mp$ и $\nu + mp \pm \nu_x$.

С помощью (4.6) можно сформулировать требования к точности выполнения и установки фокусирующих элементов, необходимые для обеспечения радиационной поляризации.

Например, если $\varkappa(\theta)$ – случайная функция, представленная Q участками, некоррелированными между собой, то для обеспечения в среднем радиационной поляризации выше 50% нужно выполнить условие

$$\sum_{n=1}^{Q} \eta_n^2 \overline{\varkappa_n^2} |F_n^\nu|^2 \left\{ \left[\frac{1}{\sin^2\pi(\nu+\nu_x)} + \frac{1}{\sin^2\pi(\nu-\nu_x)} \right] \frac{|f_x|_n^2 \langle K^3 | \int_{-\infty}^{\theta} K f_x \, d\theta |^2 \rangle}{\langle K^3 \rangle} + \frac{4(\psi_x)_n^2}{\sin^2\pi\nu} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{72}{11\pi^2\nu^2},$$

где $\psi_x(\theta) = \operatorname{Im}\left(f_x \int_{-\infty}^{\theta} K f_x^* \, d\theta\right)$ – ψ – функция описывающая радиальные отклонения замкнутых орбит.

Как видно, основной вклад дают те участки, в которых величина $\varkappa^2 |f_x f_z|^2$ наибольшая.

Радиальный градиент радиального поля, , может появиться при случайных поворотах магнитных линз вокруг направления орбиты. При повороте линз на малый угол α_L появляется градиент $\varkappa = \alpha_L g_z$. Предполагая, для простоты одинаковыми все Q участков, из (4.5) получаем формулу для требуемой точности ориентации линз ($\nu = [\nu] + 1/2$, $\nu_x = [\nu_x] + 1/4$):

$$\sqrt{\overline{\alpha_L^2}} \leqslant \frac{\sqrt{9/11}}{\pi} \; \frac{\nu_x^2 \sqrt{Q_L}}{\nu \, \varepsilon \, |g_z|_n |F_n^\nu|} . \tag{4.8}$$

Для некоррелированных вдоль орбиты возмущений $\varkappa$, можно получить соотношение между скоростью диффузии спинов и вертикальным размером, возбуждаемым флуктуациями энергии из-за связи z и x движения. Формула для средневероятного значения $\overline{(\Delta z)^2}$ имеет вид ($|\nu_z - \nu_x| \ll 1$):

$$\overline{(\Delta z)^2} = \frac{11}{576\pi^2} \; \frac{R^2 |f_z(\theta)|^2}{|\nu_z - \nu_x|^2} \; \frac{\langle K^3 | \int_{-\infty}^{\theta} K f_x \, d\theta |^2 \rangle}{\langle K^3 \rangle} \left(\frac{\lambda}{\Lambda_x} + \frac{\lambda}{\Lambda_z} \right) \sum_{n=1}^{Q} \eta_n^2 \varkappa_n^2 |f_x f_z|_n^2 , \tag{4.9}$$

где Λ_z и Λ_x – декременты радиационного затухания, λ – декремент поляризации (см.(2.6)). При получении этой формулы использовано, что $\frac{d}{dt}\overline{\left(\frac{\varepsilon_\gamma}{\gamma}\right)^2} = \frac{11}{9}\lambda$. Предполагая одинаковыми $|f_x|_n$, $|f_z|_n$ и $|F_n^\nu|$ на всех Q участках, из (4.7) и (4.9) при $\nu = [\nu] + 1/2$, $\nu_x = [\nu_x] + 1/4$ получаем ограничение на максимальный размер $\overline{(\Delta z)^2}$, при котором будет сохраняться радиационная поляризация:

$$|\nu_z - \nu_x| \sqrt{\overline{(\Delta z)^2}} / |f_z(\theta)| \leqslant \frac{R}{4\pi} \; \frac{|f_z|_n}{|F_n^\nu|} \left(\frac{\lambda}{\Lambda_x} + \frac{\lambda}{\Lambda_z} \right)^{1/2} . \tag{4.10}$$

В работах /13,14/ была сделана попытка выразить скорость диффузии через вертикальный размер пучка. При этом, однако, игнорировалась реальная природа возбуждения бетатронных x и z колебаний флуктуациями энергии и принимались во внимание лишь свободные z –колебания с частотами $\pm \nu_z + m p$. Поэтому полученные формулы не содержали резонансов $\nu = k \pm \nu_x$, $\nu = k$, а с другой стороны скорость диффузии оказалась сильно завышенной в практически важной ситуации, когда $|\nu_z - \nu_x| \ll 1$. Ограничиться учётом свободных колебаний возможно лишь в случаях, когда возбуждение вертикальных колебаний и диффузия спинов происходит за счёт случайных ударов в вертикальном направлении (а не в продольном, как для излучения). Такой механизм диффузии рассмотрен в работе /2/. В применении к накопителям электронов и позитронов было показано, что флуктуации угла вылета квантов при излучении приводят к очень малому эффекту. Другие реальные факторы (например, внутреннее рассеяние частиц в сгустке, столкновения с остаточным газом) также дают пренебрежимо малый вклад в вертикальный размер и скорость диффузии спинов.*)

---

*) В работе /15/ предлагается считать некоррелированными от оборота к обороту поперечные удары полем встречного сгустка, что заведомо неправильно. В действительности, эффекты деполяризации от встречного пучка (как и эффекты встречи в орбитальном движении) обусловлены нелинейными по бетатронным колебаниям резонансами, стохастичность воздействия которых в условиях, близких к оптимальным, опять-таки связана с квантовой диффузией энергии (см.р.6).

5. Диффузия спинов при большом разбросе частот прецессии

При увеличении энергии, вследствие роста абсолютного энергетического разброса в пучке, возрастает разброс частоты прецессии $\nu(\gamma)$. Когда разброс достигает величины порядка или больше единицы, становятся возможными периодические прохождения спиновых резонансов. Модуляция частоты ν происходит из-за синхротронных колебаний энергии с частотой $\nu(\gamma)$:

$$\nu = \bar{\nu} + \Delta\cos\psi_\gamma\,,\quad \psi_\gamma' = \nu_\gamma\,,$$

где $\Delta = \nu(\Delta\gamma)_0/\gamma$ – амплитуда, ψ_γ – фаза синхротронных колебаний частоты прецессии.ж)

Задача о периодических прохождениях резонанса была решена в работе /8/, из результатов которой следует, что при полностью коррелированных последовательных быстрых прохожденияхжж), деполяризация возможна лишь в узких областях спиновых резонансов с синхротронной частотой колебаний. Стохастическое изменение частоты прецессии из-за квантовых флуктуаций энергии нарушает корреляцию фаз прохождений и приводит к диффузии спинов /2/.

Начнём с рассмотрения случая, когда уход фазы прецессии спина за период синхротронных колебаний из-за диффузии $\nu(\gamma)$ много меньше единицы. Последовательные прохождения будут коррелированы при условии /2/:

$$\frac{d}{dt}\overline{(\delta\nu)^2}/\nu_\gamma^2 \approx \frac{\nu^2\lambda}{\nu_\gamma^2} \ll \nu_\gamma\,. \qquad (5.1)$$

ж) Прохождения резонансов могут быть также связаны с временной нестабильностью магнитного поля накопителя. Не представляет большого труда, с помощью формул (2.6) и (2.8), провести исследование и этого деполяризующего фактора. Однако мы не будем останавливаться на этом, считая амплитуду колебаний поля вследствие нестабильности достаточно малой.

жж) Условие быстроты каждого прохождения ($|w_k|^2 \ll \nu_\gamma\cdot\Delta$) заведомо должно выполняться в области возможного существования радиационной поляризации.

В работе /16/ принималось, что корреляция между последовательными прохождениями отсутствует уже при энергиях порядка 30–100 ГэВ. Это привело к излишне пессимистической оценке возможности обеспечить радиационную поляризацию в проектируемых накопителях на эти энергии. В действительности, согласно соотношению (5.1), корреляция при таких энергиях сохраняется в течении большого числа синхротронных колебаний, и скорость диффузии оказывается значительно меньшей.

Будем также предполагать, что диффузия фаз прохождений резонансов также мала и за период обращения частиц в накопителе:

$$\frac{\nu^2\lambda}{\nu_\gamma^2} \ll 1\,. \qquad (5.2)$$

Очевидно, что при $\nu_\gamma \lesssim 1$ условие (5.2) следует из (5.1).

Для количественного описания процессов диффузии спинов при условиях (5.1) и (5.2) можно воспользоваться формулой (2.4). Для определённости будем предполагать, что наиболее мощные резонансы обязаны радиальному полю на равновесной орбите. С помощью разложения

$$exp\left(-i\frac{\Delta}{\nu_\gamma}\sin\psi_\gamma\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m\left(\frac{\Delta}{\nu_\gamma}\right)e^{-im\psi_\gamma}$$

(J_m – функция Бесселя) формула для $\vec{n}$ принимает вид:

$$\vec{n} = \vec{e}_3 + Re\left\{(\vec{e}_1 - i\vec{e}_2)exp\left[i\nu(\tilde{x}-\theta) + i\frac{\Delta}{\nu_\gamma}\sin\psi_\gamma\right]\sum_{k,m}\frac{w_k J_m(\Delta/\nu_\gamma)}{(k-\bar{\nu}_0 - m\nu_\gamma)}e^{i(k\theta - m\psi_\gamma)}\right\},$$

где w_k определяются равенством (3.4). При вычислении производной по энергии используем, что

$$\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}(\Delta\cos\psi_\gamma) = \nu\,,\quad \frac{\partial}{\partial\gamma}(\Delta\sin\psi_\gamma) = 0\,.$$

Для величины $(\gamma\,\partial\vec{n}/\partial\gamma)^2$, усреднённой в соответствии с формулой (2.7), получаем

$$\left\langle \mathcal{K}^3\left(\gamma\frac{\partial\vec{n}}{\partial\gamma}\right)^2\right\rangle / \langle\mathcal{K}^3\rangle = \nu^2\sum_{k,m}\frac{|w_k|^2\left\langle J_m^2\left(\frac{\Delta}{\nu_\gamma}\right)\right\rangle}{\left[(k-\bar{\nu}-m\nu_\gamma)^2 - \nu_\gamma^2\right]^2} \qquad (5.3)$$

Здесь скобки $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение по равновесному распределению амплитуд Δ в пучке. Например, при гауссовском распределении квадрата амплитуды Δ в пучке

$$\rho(\Delta^2)=\frac{1}{\sigma_\nu^2}\exp(-\Delta^2/\sigma_\nu^2)$$

получаем

$$\langle J_m^2\rangle = I_m\left(\frac{\sigma_\nu^2}{2\nu_\gamma^2}\right)\exp(-\sigma_\nu^2/2\nu_\gamma^2),$$

где $\sigma_\nu^2=\langle\Delta^2\rangle = 2\nu^2\langle(\frac{\Delta\gamma}{\gamma})^2\rangle = 11\nu^2\lambda/(18\Lambda_\gamma)$ (Λ_γ -декремент радиационного затухания энергии). Явные выражения для мощностей резонансов $|w_K|$ случайных возмущений приведены в формуле (3.8).

Как видно из (5.3) синхротронные колебания при условиях (5.I), (5.2) приводит к появлению модуляционных резонансов с частотами, кратными частоте синхротронных колебаний*):

$$\bar\nu \approx K + m\nu_\gamma .$$

Мощности этих резонансов существенно зависят от соотношений $|\bar\nu - K|$, σ_ν и ν_γ .

В области

$$|K-\bar\nu| \gg max(\sigma_\nu, \nu_\gamma) \tag{5.5}$$

мощности модуляционных резонансов экспоненциально малы и, если ими пренебречь, формула (5.3) переходит в (3.3) ($\sum\limits_m J_m^2 = 1$).

Формула (5.3) позволяет учесть также и модуляционные резонансы $\bar\nu = K + m\nu_\gamma$. При выполнении (5.5) номера резонансов $m \simeq (\bar\nu - K)/\nu_\gamma \gtrsim \nu_\gamma^{-1}$ очень велики. После суммирования по m вблизи $m_\circ = (\bar\nu-K)/\nu_\gamma$ получаем следующие условие сохранения радиационной поляризации:

$$\frac{11}{18}\nu^2\sum_K |w_K|^2\left\{\frac{1}{(\bar\nu-K)^4}+\frac{\pi^2}{2\nu_\gamma^4}\,\frac{\exp(-\sigma_\nu^2/2\nu_\gamma^2)}{\sin^2[\pi(\bar\nu-K)/\nu_\gamma]}\,\frac{I_{|\bar\nu-K|}}{\nu_\gamma}\left(\frac{\sigma_\nu^2}{2\nu_\gamma^2}\right)\right\}\leqslant 1 . \tag{5.6}$$

---

*) Мы предполагаем, что разброс расстройки ($\bar\nu - K - m\nu_\gamma$) из-за разброса частот $\bar\nu$ и ν_γ в пучке много меньше расстояния между резонансами, равного $max(1, \nu_\gamma)$.

Если $\sigma_\nu^2 \ll \nu_\gamma$, то вклад модуляционных резонансов очень мал. При этом условие получения поляризованных пучков (5.6) для случайных возмущений совпадает с (3.9). Учёт синхротронных колебаний частоты прецессии приводит лишь к появлению узких линий в области модуляционных резонансов, в которых может отсутствовать радиационная поляризация.

При $\sigma_\nu^2 \gg \nu_\gamma$ можно воспользоваться известной асимптотикой при больших аргументах функции I_m

$$I_m(t)\simeq (1/\sqrt{2\pi t})\exp(t-m^2/2t).$$

Для случайных возмущений, у которых мощности $|w_K| = |w_{[\nu]}|$ примерно равны, из (5.6) получаем условие сохранения поляризации ($\bar\nu = [\bar\nu] + 1/2$)

$$\frac{11\pi^4}{54}\nu^2|w_{[\nu]}|^2\left\{1+\frac{3}{\pi^2\sqrt{\pi}}\,\frac{\exp(-1/4\sigma_\nu^2)}{\nu_\gamma^3\,\sigma_\nu}\right\}\leqslant 1 \tag{5.7}$$

Появившийся в (5.7) дополнительный к (3.9) член, пропорциональный $\exp(-1/4\sigma_\nu^2)$, обязан прохождениям резонанса $\nu = K$ на больших амплитудах Δ , где частицы проводят экспоненциально малую долю времени.

Следует отметить сильное убывание влияния модуляционных резонансов при возрастании частоты синхротронных колебаний ($\sim \nu_\gamma^3$). Ещё более резкое убывание имеет место при $\sigma_\nu^2 \ll \nu_\gamma$.

Если σ_ν или ν_γ больше единицы, то всегда существует номер гармоники K , для которой условие (5.5) нарушается. В случае малой синхротронной частоты ν_γ и большой средней амплитуды колебаний частоты прецессии σ_ν

$$\nu_\gamma \ll 1\ , \quad \sigma_\nu \gg 1$$

число таких резонансов порядка σ_ν . Для каждого такого номера K при оптимальной величине ν_γ существует номер m , при котором отстройка от резонанса $(K-\bar\nu-m\nu_\gamma)$ порядка ν_γ . Предполагая, что частота ν_γ такова, что минимальная расстройка может быть порядка ν_γ для всех наиболее существенных резонансов, из (5.6) после суммирования по K получаем:

$$\frac{11}{18}\,\frac{\pi^2}{2\nu_\gamma^8}\,\nu^2|w_{[\nu]}|^2\leqslant 1 .$$

Таким образом, вместо условия $(11\pi^4/54)\nu^2|w_{[\nu]}|^2 \le 1$, полученного без учёта синхротронной модуляции, получаем в случае $\nu_\gamma \ll 1$, $\sigma_\nu \gg 1$ более жёсткое условие существования радиационной поляризации.

В случае большой синхротронной частоты $\nu_\gamma \gg 1$ из (5.3) получаем при $\sigma_\nu \ll \nu_\gamma$ (J_0^2 =I):

$$\frac{\langle K^3(\gamma\partial\vec{n}/\partial\gamma)^2\rangle}{\langle K^3\rangle}=\frac{\pi^2\nu^2}{4\nu_\gamma^2}|w_{[\nu]}|^2\left\{\frac{1}{\sin^2\pi(\bar\nu+\nu_\gamma)}+\frac{1}{\sin^2\pi(\bar\nu-\nu_\gamma)}-\frac{\sin 2\pi\nu_\gamma}{\pi\nu_\gamma\sin\pi(\bar\nu-\nu_\gamma)\sin\pi(\bar\nu+\nu_\gamma)}\right\}.$$

Условие возможности получения радиационной поляризации таким образом запишется в виде $(\sin^2\pi(\bar\nu-\nu_\gamma)=\sin^2\pi(\bar\nu+\nu_\gamma)=1)$:

$$(11\pi^2/36)\,\nu^2|w_{[\nu]}|^2 \le \nu_\gamma^2 \qquad (5.8)$$

Условие (5.8) будет примерно такое же и при $\sigma_\nu \gg \nu_\gamma \gg 1$,если ν_γ такова, что для всех существенных в этом случае резонансов, число которых $\sim\sigma_\nu/\nu_\gamma$, расстройка $|k-\bar\nu-m\nu_\gamma|$ может быть порядка единицы.

Сравнивая (5.8) с (3.9), видим, что выбором достаточно большой частоты синхротронных колебаний можно облегчить получение радиационной поляризации.

При очень больших энергиях возможно нарушение условий (5.I) (при этом $\sigma_\nu \gg \nu_\gamma$). В этом случае синхротронные прохождения резонанса полностью некоррелированы, и скорость диффузии не зависит от значения синхротронной частоты ν_γ . Диффузия будет описываться формулой (2.8). Отметим, что в ситуации, когда последовательные прохождения являются коррелированными, но из-за разброса синхротронной частоты ν_γ перекрываются резонансы $\bar\nu=k+m\nu_\gamma$ $(\Delta\nu_\gamma \gg \frac{\nu_\gamma^2}{\sigma_\nu})$, скорость диффузии будет определяться также формулой (2.8).

Такой же формулой описываются и случаи, когда раньше условия (5.I) нарушается (5.2), если мощности $|w_k|$ с номерами " k " в интервале $|\bar\nu-k| \le \sigma_\nu$ примерно равны.

При гауссовском распределении по отклонениям энергии частиц от равновесной имеем ($\nu=\bar\nu+\Delta\nu$):

$$\langle\delta(\nu-k)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\bar\nu-k+\Delta\nu)\exp[-(\Delta\nu)^2/\sigma_\nu^2]\,d\Delta\nu/\sqrt{\pi}\sigma_\nu=\frac{\exp[-(\bar\nu-k)^2/\sigma_\nu^2]}{\sqrt{\pi}\,\sigma_\nu}.$$

При $\sigma_\nu \ll 1$ диффузия спинов из-за некоррелированных прохождений экспоненциально мала и может сравниваться с обычной диффузией, обязанной "дрожанию" оси прецессии $\vec{n}$. Поэтому условие получения радиационной поляризации $\lambda_d^0+\lambda_d^z \le \lambda$ при $\sigma_\nu \ll 1$ запишется в виде ($\bar\nu=[\bar\nu]+1/2$):

$$(11\pi^4/54)\,\nu^2|w_{[\nu]}|^2\left\{1+\frac{108}{11\pi^3\sqrt{\pi}}\,\frac{\exp(-1/4\sigma_\nu^2)}{\nu^2\lambda}\right\} \le 1 \qquad (5.9)$$

(сравни (5.9) с (5.7)).

При $\sigma_\nu \gg 1$ "нерезонансная" диффузия пренебрежимо мала всегда, и условие получения поляризованных электронов и позитронов $\lambda_d^z \le \lambda$ следующее:

$$\pi\,|w_{[\nu]}|^2 \le \lambda \qquad (5.I0)$$

Следует отметить отсутствие резонансной зависимости скорости диффузии спинов от энергии при $\sigma_\nu \gg$ I. Как видно, при возрастании энергии из-за роста скорости поляризации λ выполнение условий получения радиационной поляризации становится всё менее трудным ($\nu \gtrsim \nu_z$).

6. Устойчивость поляризации встречных пучков

Практически важным является вопрос о устойчивости радиационной поляризации встречных пучков. Из-за сильной нелинейности коллективного поля встречных частиц мощности связанных с ним спиновых резонансов слабо уменьшаются с повышением их номеров. Частоты орбитального движения становятся зависящими от амплитуд колебаний частицы возле равновесной орбиты. Средняя частота прецессии при больших энергиях испытывает синхротронные колебания большой амплитуды. В этих условиях, всегда существуют резонирующие гармоники, которыми и определяется деполяризующее воздействие встречного пучка.

В условиях оптимальной светимости встречные частицы существенным образом не изменяют размеры пучка. Размеры, в основном, по-прежнему определяются радиационными эффектами вследствие связи вертикального движения с радиальным. Воздействие встречного пучка связано с нелинейными по бетатронным колебаниям резонансами.

$$\nu = \nu_K \equiv K_\theta + K_z \nu_z + K_x \nu_x \qquad (6.I)$$

с $|K_x| + |K_z| \geq 2$. Эффекты резонансов с $|K_x| + |K_z| \leq 1$, ввиду того, что встречный пучок слабо возмущает орбитальное движение, будет связаны с неидеальностью фокусирующей системы. Сразу ясно, что в ситуациях, когда неизбежны резонансы с основными гармониками возмущения с $|K_x| + |K_z| \leq 1$ (например, когда амплитуда синхротронных колебаний частоты прецессии больше или порядка расстояния между линейными резонансами, которое для случайных возмущений порядка единицы) эффектами деполяризации от встречного пучка можно пренебречь.

Условия сохранения радиационной поляризации выпишем для случая лобовых встреч, когда равновесные орбиты сгустков в области взаимодействия совпадают. Выводы этого параграфа основаны на результатах работы /5/. Формула для мощностей резонансов (6.I) имеет вид

$$w_K = \frac{\nu}{\langle B_z \rangle} \langle 2 B_x \exp(-i\nu\tilde{z} + i\nu\theta - i\psi_k) \rangle = \qquad (6.2)$$

$$= \frac{\nu}{R} \langle z'' \exp(-i\nu\tilde{z} + i\nu\theta - i\psi_k) \rangle,$$

где $\psi_k' = \nu_K$, B_x – магнитное поле встречных сгустков, усреднение производится при фиксированной энергии. Вертикальное движение подчиняется уравнению

$$z'' + g_z z = \varkappa x + 2R \frac{B_x(z, x, \theta)}{\langle B_z \rangle} \qquad (6.3)$$

Предполагая, что связь $z - x$ движений мала (при этом можно пренебречь обратным влиянием вертикального движения на радиальное) при решении уравнения (6.3) по теории возмущений, нужно в функцию $B_x(z, x, \theta)$ подставить решения уравнений (4.2) для z и (3.I) для x.

Вычисление мощностей резонансов высших порядков, обязанных встречному пучку, удобно производить по формуле, вытекающей из (6.2) и (6.3)

$$w_K = 2\nu \langle B_x F^{\nu_K} e^{-i\nu_K\theta} \rangle, \qquad (6.4)$$

где $F^{\nu_K} \equiv F^{\nu = \nu_K}$ – периодическая функция азимута (3.7).

Вычисление величин $\langle |w_K|^2 \rangle$ в общем случае будет довольно громоздким и его удобнее производить с помощью вычислительной машины. Для иллюстрации рассмотрим электрон-позитронные встречные пучки в накопителе с одной дорожкой. Ограничимся исследованием спиновых резонансов с частотой вертикальных колебаний ($K_x = 0$, $|K_z| \geqslant 2$) и будем считать, что $B_x = B_x(z, 0, \theta)$. Азимутальное распределение плотности частиц будем считать пропорциональным дельта-функциям, удвоенное число которых на обороте, равное числу мест встречи в накопителе P, для простоты будем считать равным числу суперпериодов магнитной системы. В местах встречи учтём лишь свободные вертикальные колебания $z_{\theta=0} = a_z \cos\psi_z$, пренебрегая вынужденными*), где амплитуда a_z определяется значением β-функция в месте встречи ($a_z = 2|C_z||f_z|_0$). Такие приближения позволяют выявить особенности воздействия встречных частиц на поляризацию.

В используемом приближении при чётном $|K_z|$, мощность w_K равна нулю. При нечетном $|K_z|$ для гауссовского распределения по поперечному сечению пучка величина $\langle |w_K|^2 \rangle$ равна ($|K_z| \gg 1$):

при $\langle a_z^2 \rangle \ll K_z^2 z_0^2$

$$\langle |w_K|^2 \rangle = \frac{8}{\pi^2}\sqrt{\frac{2}{\pi |K_z|^3}} \frac{N_e^2 r_e^2 \nu^2 |F^\nu|^2}{\gamma^2 x_0^2} \frac{(1 + 2\langle a_z^2 \rangle / z_0^2)^{1/4}}{(1 + \langle a_z^2 \rangle / z_0^2)^{1/2}} \left[\frac{\langle a_z^2 \rangle}{\langle a_z^2 \rangle + z_0^2 + z_0\sqrt{z_0^2 + 2\langle a_z^2 \rangle}} \right]^{|K_z|} \qquad (6.5)$$

при $K_z^2 x_0^2 \gg \langle a_z^2 \rangle \gg K_z^2 z_0^2$

$$\langle |w_K|^2 \rangle = \frac{16}{\pi^3 K_z^2} \frac{N_e^2 r_e^2 \nu^2 |F^\nu|^2}{\gamma^2 x_0^2},$$

при $\langle a_z^2 \rangle \gg K_z^2 x_0^2$

$$\langle |w_K|^2 \rangle = \frac{4}{\pi^2} \frac{N_e^2 r_e^2 \nu^2 |F^\nu|^2}{\gamma^2 \langle a_z^2 \rangle} \ln \frac{\langle a_z^2 \rangle}{K_z^2 x_0^2}.$$

Здесь N_e – число встречных частиц в накопителе, $2x_0$, $2z_0$ – радиальный и вертикальный размеры встречного пучка в местах встречи, $\langle a_z^2 \rangle$ – среднеквадратичная амплитуда вертикальных бетатронных колебаний в местах встреч.

---

*) Учёт вынужденных колебаний при резонансном механизме диффузии (в отличие от нерезонансного) не может привести к существенному изменению эффекта.

Разброс бетатронных частот ν_z и ν_x, вносимый встречными частицами, порядка сдвига частот $(\Delta\nu_z)_S$ и $(\Delta\nu_x)_S$ равновесной частицы. Для гауссовского распределения плотности частиц по поперечному сечению встречного пучка получаем

$$(\Delta\nu_z)_S = \frac{2N_e r_e R\,|f_z|_0^2}{\pi\gamma z_0(z_0+x_0)}\ ,\quad (\Delta\nu_x)_S = \frac{2N_e r_e R\,|f_x|_0^2}{\pi\gamma x_0(z_0+x_0)}\ , \tag{6.6}$$

где $|f_z|_0$ и $|f_x|_0$ – значение функций Флоке в местах встреч.

Величина σ_0, равная разбросу расстройки $|\nu_0 - k p - k_z\nu_z|$, усреднённой по фазовым колебаниям, практически из-за малого вертикального размера определяется сдвигом частоты вертикальных колебаний

$$\sigma_0 \simeq |k_z(\Delta\nu_z)_S|\ .$$

В условиях, когда[*] $\sigma_\gamma \ll \sigma_0$, синхротронными колебаниями ν можно пренебречь. При этом скорость диффузии на формулы (2.8) равна

$$\lambda_d = \pi\sum_k \frac{|w_k|^2 \exp(-a_z^2/\langle a_z^2\rangle)}{|k_z|\,\langle a_z^2\rangle\,|\partial\nu_z/\partial a_z^2|}\ , \tag{6.7}$$

где все величины под знаком суммы берутся в точках a_z^2, для которых $\nu = \nu_k(a_z^2)$. По порядку величины λ_d из формулы (6.7) примерно равна

$$\lambda_d \simeq \pi\frac{\langle|w_k|^2\rangle}{\sigma_0}$$

Здесь $\langle|w_k|^2\rangle$ –наибольшая по величине гармоника, для которой значения $\nu - \nu_k(a_z^2)$ лежат в интервале $0 \div k_z(\Delta\nu_z)_S$. Ширина области наиболее эффективного воздействия каждой гармоники обычно порядка σ_0.

Вертикальные размеры встречающихся пучков при максимальной светимости одного порядка. При этом диффузия спинов происходит с наибольшей скоростью, если резонанс $\nu = k p + k_z\nu_z(a_z^2)$ (для чисел k, k_z, задающих наибольшую на ширине σ_0 величину

---

[*]) Заметим, что при учёте вынужденных x и z -колебаний сдвиг частоты ($\Delta\nu_z$)$_S$ будет испытывать медленные изменения с частотой фазовых колебаний ν_γ. Однако, в первом приближении этими колебаниями можно пренебречь.

$|w_k|^2$) осуществляется для значения амплитуды, равного ($|k_z| \gg 1$)

$$a_z^2 = |k_z|\,\langle a_z^2\rangle\frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + 2\langle a_z^2\rangle}}\ .$$

Радиационная поляризация будет сохранена, если выполнено условие:

$$(\lambda_d)_{max} = \frac{4}{\pi}\,\frac{N_e r_e}{\gamma R}\,\nu^2\frac{|F^{\nu_k}|_0}{|f_z|_0}\,A\left[\frac{\langle a_z^2\rangle}{\langle a_z^2\rangle + z_0^2 + z_0\sqrt{z_0^2 + 2\langle a_z^2\rangle}}\right]^{|k_z|} \leqslant \lambda\ , \tag{6.8}$$

где A – число, зависящее от значения $a_z^2 = |k_z|\langle a_z^2\rangle\frac{z_0}{\sqrt{z_0^2+2\langle a_z^2\rangle}}$:

$$A = \frac{\langle a_z^2\rangle}{|k_z|\,x_0^2}\,\frac{z_0^2}{z_0^2 + \langle a_z^2\rangle} \qquad \text{при} \quad a_z^2 \gg x_0^2\ ,$$

$$A = \left[\frac{\pi}{|k_z|^3}\,\frac{\langle a_z^2\rangle}{x_0^2}\right]^{1/2}\frac{\left[1 + 2\langle a_z^2\rangle/z_0^2\right]^{1/4}}{1 + \langle a_z^2\rangle/z_0^2} \qquad \text{при} \quad x_0^2 \gg a_z^2 \gg z_0^2$$

$$A = \frac{4z_0^3}{|k_z|^3 x_0\langle a_z^2\rangle} \qquad \text{при} \quad z_0^2 \gg a_z^2\ .$$

При знаке равенства условие (6.8) определяет максимальный номер $|k_z|_{max}$ "работающих" спиновых резонансов. При достаточной близости к резонансам с номерами $|k_z| \leqslant |k_z|_{max}$ происходит деполяризация пучка. "Опасный" интервал по ν, в котором происходит деполяризация, при $|k_z| \gg 1$ примерно равен

$$\Delta\nu \simeq \sigma_0 \simeq |k_z(\Delta\nu_z)_S|\ .$$

При больших $|k_z|$ распределение резонансов по ν можно считать примерно равновероятным. Если сумма "опасных" интервалов по ν не превышает числа суперпериодов накопителя

$$\sum_{|k_z| \leqslant |k_z|_{max}} |\Delta\nu| \leqslant |k_z|_{max}^2\,(\Delta\nu_z)_S \leqslant P \tag{6.9}$$

обязательно существуют интервалы энергии, в которых сохраняется радиационная поляризация.[*])

---

[*]) При выборе значения ν_z вблизи рационального числа m/n с невысокими n ($n < k_z^{max}$) происходит наложение спиновых резонансов, в связи с чем можно дополнительно по сравнению с (6.9) увеличить допустимый сдвиг частоты ($\Delta\nu_z$)$_S$. Однако, при невысоких значениях n может ухудшиться устойчивость встреч.

Последнее условие (вместе с (6.8), определяющим значение $|K_z|_{max}$) позволяет найти ограничение на максимальную светимость, при которой не разрушается радиационная поляризация.

При высоких энергиях требуется рассматривать также случаи, когда $\sigma_\nu \gg \sigma_0$. При этом эффективная ширина спиновых резонансов становится порядка σ_ν и вероятность попадания в этот интервал гармоник с большой мощностью возрастает. Следует отметить, что на столь больших энергиях сильно возрастает (в единицах частоты обращения) и скорость поляризации λ . Если при этом последовательные прохождения резонанса (6.I) при синхротронной модуляции прецессии будут полностью некоррелированы, что справедливо при

$$\bar{\sigma}_0 = max\,(\sigma_0\,,\ \nu^2\lambda/\nu_\gamma^2) \gg \nu_\gamma$$

то резонансы с синхротронной частотой не проявляются. Условие сохранения поляризации с помощью (2.8) при гауссовском распределении по $\Delta\nu = \nu - \bar{\nu}$ запишется следующим образом:

$$\lambda_d = \sqrt{\pi}\sum_K \frac{\langle|w_K|^2\rangle}{\sigma_\nu}\,exp\left[-(\bar{\nu}-\nu_K)^2/\sigma_\nu^2\right] \le \lambda\ , \qquad (6.I0)$$

где величины $\langle|w_K|^2\rangle$ определяются из формул (6.5). Условие на максимальную светимость, при большом числе работающих резонансов, когда их распределение по ν можно считать равновероятным, можно найти из условия

$$|K_z|^2_{max}\sigma_\nu \le P\ , \qquad (6.II)$$

в котором максимальный номер работающих резонансов находится из уравнения

$$\sqrt{\pi}\,\langle|w_K|^2\rangle = \lambda\sigma_\nu\,. \qquad (6.I2)$$

При $\bar{\sigma}_0 \ll \nu_\gamma$ проявляются спиновые резонансы с синхротронными колебаниями. Скорость диффузии λ_d будет значительно меньше, чем в (6.I0), если ($\bar{\nu} - \nu_K$) на ширине $\approx \sigma_\nu$ не совпадает с $m\nu_\gamma$. В этом случае происходит "нерезонансная" диффузия, скорость которой находится по приведенным в этой работе формулам (см.§ 5).

Существенным для практических приложений является включение резонансов с частотами радиальных колебаний. В первом при-

ближении это приведёт к увеличению числа работающих резонансов. Ограничение на максимальную светимость при $\sigma_\nu \ll \sigma_0$ находится из условия

$$|K_z|^2_{max}\,|K_x|_{max}\,(\Delta\nu_z)_s \le P\ , \qquad (6.I3)$$

заменяющего (6.9), а при $\sigma_\nu \gg \sigma_0$ из условия

$$|K_z|_{max}\,|K_x|_{max}\,\sigma_\nu \le P \qquad (6.I4)$$

записанного вместо (6.II). Максимальный номер работающих резонансов с частотами радиальных колебаний $|K_x|_{max}$ обычно порядка номера $|K_z|_{max}$, определяемого соответственно из (6.8) и (6.I2).

Обсудим полученные результаты. Как следует из (6.8) и (6.I0), скорость диффузии λ_d^{max} зависит от размеров пучков и β -функций следующим образом:

$\lambda_d^{max} \sim (\Delta\nu_z)_s\, z_0^3/(|f_z|_0^2\, x_0)$ при $|K_z|_{max}\, z_0^2 > x_0^2$;

$\lambda_d^{max} \sim (\Delta\nu_z)_s\, z_0^2/|f_z|_0^2$ при $|K_z|_{max}\, z_0^2 < x_0^2$;

$\lambda_d^{max} \sim [(\Delta\nu_z)_s^2/\sigma_\nu]\,(z_0^2/|f_z|_0^2)$ при $\sigma_\nu \gtrsim |K_z|_{max}(\Delta\nu_z)_s$.

Светимость же пропорциональна фактору $(\Delta\nu_z)_s^2\, z_0\, x_0/|f_z|_0^4$. Отсюда следует, что уменьшением β -функций ($|f_z|_0 \sim |f_x|_0$ при фиксированном сдвиге частот $(\Delta\nu_z)_s$ можно увеличить светимость без ухудшения устойчивости поляризации. Дополнительный выигрыш можно получить, увеличивая $|f_x|_0$. Однако при этом для получения максимальной светимости потребуется повысить ток пучков.

Представляет интерес проследить, как изменяются условия устойчивости радиационной поляризации при сближении частот бетатронных колебаний ν_z и ν_x (условия получения радиационной поляризации без встреч остаются при этом прежними). Мощности резонансов $|w_K|$, как видно из (6.5), при фиксированном $(\Delta\nu_z)_s$, будут увеличиваться пропорционально $|\nu_z - \nu_x|^{-1}$. Это приводит к некоторому увеличению опасных интервалов каждого резонанса обязанного встречному пучку и к малому увеличению (логарифмическому) величин $|K_{z,x}|_{max}$. Однако, более существенным является факт совпадения нелинейных резонансов с частотами вертикальных колебаний и радиальных. При $\nu_z \to \nu_x$ вместо двумерной картины резонансов мы приходим к одномерной. Это даёт возможность (как видно из сравнения (6.I3) и (6.I4) с (6.9) и (6.II)) при оптимальном выборе частоты ν (энергии) дополнительно увеличить $(\Delta\nu_z)_S$ примерно в $|K_x|_{max}$ раз и таким образом поднять светимость поляризованных пучков.

Отметим также, что для повышения светимости поляризованных пучков полезно выбирать частоту бетатронных колебаний вблизи целого резонанса сверху (аналогичный приём применяется для повышения светимости встречных пучков). Это уменьшает эффективный разброс частоты ν_z по амплитудам колебаний возле равновесной орбиты по сравнению с (6.6) и затрудняет попадание в нелинейные резонансы.

Ситуация, когда частоты ν_z и ν_x близки не только друг другу, но и целому числу является, повидимому, наиболее оптимальной как для сохранения радиационной поляризации, так и для обеспечения устойчивости самих встреч.

Для накопителей с двумя независимыми дорожками полезным является использование многосгусткового режима,

позволяющего при той же эффективности встреч каждой пары сгустков резко повышать полную светимость поляризованных пучков (если число частиц в накопителе не ограничено по каким-либо другим причинам).

7. Сводка результатов

В этом разделе приведем основные формулы работы и обсудим их на простом примере фокусирующей системы, в надежде, что это послужит удобным ориентиром читателю.

Для получения поляризованных электронов и позитронов необходимо, чтобы неточности выполнения магнитной системы накопителя не приводили к появлению радиального поля и его радиального градиента слишком большой величины. При энергиях, пока разброс частот прецессии очень мал:

$$\sigma_\nu = \nu\sqrt{11\lambda/18\Lambda_\gamma} \ll 1$$

для существования степени поляризации в среднем выше 50% необходимо выполнить условия (р.3,4):

$$\sum_{n=1}^{Q}\eta_n^2\,\overline{H_n^2}\,|F_n^{[\nu]}|^2 \le \frac{54}{11\pi^4}\,\frac{\sin^4\pi\nu}{\nu^4(1+2\cos^2\pi\nu)}, \tag{7.I}$$

$$\sum_{n=1}^{Q}\eta_n^2\,\overline{\varkappa_n^2}\,|F_n^{\nu}|^2\left\{\left[\frac{1}{\sin^2\pi(\nu+\nu_x)}+\frac{1}{\sin^2\pi(\nu-\nu_x)}\right]\frac{|f_x|_n^2\langle K^3|\int^{\theta}Kf_x\,d\theta|^2\rangle}{\langle K^3\rangle}+\frac{4(\psi_x)_n^2}{\sin^2\pi\nu}\right\} \le \frac{72}{11\pi^2\nu^2}. \tag{7.2}$$

С повышением энергии наиболее быстро усиливаются ограничения на величину радиального поля. Поэтому при $\sigma_\nu \gtrsim$ I выпишем лишь требования на возможную величину H_n^2 при $\nu_\gamma \ll$ I (р.5):

$$\left(\sum_{n=1}^{Q}\eta_n^2\,\overline{H_n^2}\,|F_n^{[\nu]}|^2\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\exp[-(k-\bar\nu)^2/\sigma_\nu]}{\sigma_\nu\sin^2\pi\frac{(k-\bar\nu)}{\nu_\gamma}} \le \frac{36}{11\pi^{3/2}}\,\frac{\nu_\gamma^3}{\nu^4} \qquad \nu^2\lambda \ll \nu_\gamma^3,\ (\Delta\nu_\gamma) \ll \frac{\nu_\gamma^2}{\sigma_\nu} \tag{7.3}$$

$$\sqrt{\pi}\left(\sum_{n=1}^{Q}\eta_n^2\,\overline{H_n^2}\,|F_n^{[\nu]}|^2\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\exp[-(k-\bar\nu)^2/\sigma_\nu]}{\sigma_\nu} \le \frac{\lambda}{\nu^2} \qquad \nu^2\lambda \gg \nu_\gamma^3,\ (\Delta\nu_\gamma) \gg \frac{\nu_\gamma^2}{\sigma_\nu}, \tag{7.4}$$

где $(\Delta\nu_\gamma)$ – разброс частоты синхротронных колебаний.

В частности, при $\sigma_\nu \gg$ I получаем (в (7.3) $\bar\nu$ и ν_γ выберем так, чтобы для всех существенных резонансов $\sin\pi\frac{(k-\bar\nu)}{\nu_\gamma} = 1$):

$$\sum_{n=1}^{Q}\eta_n^2\,\overline{H_n^2}\,|F_n^{[\nu]}|^2 \le \frac{36}{11\pi^2}\,\frac{\nu_\gamma^3}{\nu^4}, \tag{7.5}$$

$$\pi\sum_{n=1}^{Q}\eta_n^2\,\overline{H_n^2}\,|F_n^{[\nu]}|^2 \le \frac{\lambda}{\nu^2}. \tag{7.6}$$

Условия сохранения поляризации при встречах выпишем здесь для ситуаций, близких к оптимальным, когда частоты бетатронных колебаний ν_z ν_x близки. При этом критерии существования примерно такие же, как и в модели, учитывающей резонансы лишь с частотами вертикального движения. Если разброс частоты прецессии не сильно превышает сдвиг частоты бетатронных колебаний ($\sigma_\nu \lesssim (\Delta\nu_z)_s$), требования сохранения поляризации принимает вид: (при равных размерах встречающихся пучков $z_0^2 \approx 2\langle a_1^2\rangle$):

$$2A(\Delta\nu_z)_s \frac{\nu^2|F^\nu|_0^2}{|f_z|_0^4} \frac{z_0 x_0}{R^2} (3+2\sqrt{2})^{-|K_z|} \lesssim \lambda , \qquad (7.7)$$

где $|K_z|$ - минимальное из номеров гармоник, для которых выполняется условие резонанса $\nu = KP + K_z\nu_z$ в интервале изменения вертикальной частоты бетатронных колебаний $(\Delta\nu_z)_s$. Число A равно

$$A = \frac{z_0^2}{3|K_z| x_0^2} \quad \text{при} \quad 2x_0^2 \ll z_0^2|K_z| ,$$

$$A \simeq \frac{z_0}{K_z^{3/2} x_0} \quad \text{при} \quad 2x_0^2 \gg z_0^2|K_z| .$$

В области $\sigma_\nu \gg (\Delta\nu_z)_s$ радиационная поляризация существует при

$$3\frac{(\Delta\nu_z)_s^2}{\sigma_\nu} \frac{\nu^2|F^\nu|_0^2}{|f_z|_0^4} \frac{z_0^2}{R^2} \sum_{K_z} \frac{\exp[-(\bar\nu - K_\theta - K_z\nu_z)^2/\sigma_\nu^2]}{(3+2\sqrt{2})^{|K_z|}} \lesssim \lambda . \qquad (7.8)$$

Формулы (7.7) и (7.8) позволяют оценивать деполяризующее влияние встречного пучка. В критических ситуациях, когда $\lambda_d \approx \lambda$, пользуясь общими формулами (2.8), (6.4) можно провести и более точный расчет. Следует отметить, что обычно критерии (7.7) и (7.8) в области устойчивости встреч ($(\Delta\nu_z)_s \ll 1$) можно выполнить, выбирая должным образом параметры пучка в накопителях.

Величина $|F^\nu|$, входящая в выписанные критерии, определяется вертикальной фокусировкой и расположением поворачивающих магнитов (см. 3.7). Для примера рассмотрим жесткофокусирующую систему, состоящую из $2N$ одинаковых тонких фокусирующих и дефокусирующих магнитных линз. Между линзами симметрично

расположены $2N$ поворачивающих магнитов. Для такой системы $\eta_n|g_z| = \frac{N}{\pi^2}\sin\frac{\pi\nu_z}{N}$. Среднее значение $\sqrt{|F_L^\nu|^2}$ в линзах и значение $\sqrt{|F_M^\nu|^2}$ в магнитах равны соответственно[x)]

$$|F_L^\nu| = \frac{\left(\sin^4\frac{\pi\nu}{N} + 4\sin^2\frac{\pi\nu_z}{N}\sin^4\frac{\pi\nu}{2N}\right)^{1/2}}{\left|\sin^2\frac{\pi\nu}{N} - \sin^2\frac{\pi\nu_z}{N}\right|} , \qquad (7.9)$$

$$|F_M^\nu| = \left\{\left[\frac{\cos\frac{\pi\nu}{2N}\sin^2\frac{\pi\nu_z}{N}}{\sin^2\frac{\pi\nu}{N} - \sin^2\frac{\pi\nu_z}{N}} + \frac{\sin(\pi\nu/2N)}{\pi\nu/2N}\right]^2 + \frac{4\sin^2\frac{\pi\nu}{N}\sin^6\frac{\pi\nu}{2N}}{\left(\sin^2\frac{\pi\nu}{N} - \sin^2\frac{\pi\nu_z}{N}\right)^2}\right\}^{1/2} .$$

Видно, что значения $|F^\nu|$ обычно порядка единицы или меньше, за исключением области вблизи $\nu = \pm\nu_z + KN$. Величина $|F^\nu|$ резко уменьшается при увеличении числа периодов системы на обороте частицы:

$$|F_L^\nu| \simeq \frac{\sqrt{9/2}\,\pi^2\nu^2}{N^2} \qquad (N \gg \nu, \quad \nu_z \simeq \frac{N}{4})$$

$$|F_M^\nu| \simeq 2\frac{\pi^2\nu^2}{N^2} \qquad (7.10)$$

Приведем, например, ограничения на точность выставки элементов магнитной системы накопителя, предполагая, что число независимых элементов равно числу линз или магнитов соответственно ($Q_L = Q_M = 2N$) (Напомним, что приводимые ограничения на Δz_L α_M (или на H_n) фактически относится лишь к "коротковолновой" части возмущений с длинами корреляции $\lesssim R/\nu$ и не запрещают "медленных" вариаций Δz_L и α_M большей амплитуды, с которыми могут быть связаны значительные отклонения орбиты от плоской на длинах $\gg R/\nu$). В области $\sigma_\nu \ll 1$ из (7.1) получаем ограничения на возможные вертикальные сдвиги линз и углы наклонов магнитов:

x) Здесь приведено эффективное значение $|F^\nu|$ в магните с учетом его конечной длины (см. примечание на стр.16).

$$\sqrt{\overline{(\Delta z_L)^2}} \leqslant \frac{\sqrt{27/11}}{N^{3/2}} \frac{\sin^2\pi\nu}{\nu^2\sqrt{1+2\cos^2\pi\nu}} \frac{R}{|F_L^\nu|\,|\sin\pi\frac{\nu_z}{N}|}, \qquad (7.11)$$

$$\sqrt{\overline{\alpha_M^2}} \leqslant \frac{2\sqrt{27/11}}{\pi^2} \frac{\sqrt{N}}{\nu^2} \frac{\sin^2\pi\nu}{|F_M^\nu|\sqrt{1+2\cos^2\pi\nu}}$$

где $|F_L^\nu|$ и $|F_M^\nu|$ определяются формулами (7.9), (7.10). Требованию на углы поворота линз α_L, получаемому из (7.2), обычно легко удовлетворить, и мы ограничимся оценкой допустимого значения:

$$\sqrt{\overline{\alpha_L^2}} \lesssim 0{,}7\cdot 10^{-2} \frac{N^{5/2}}{\nu^3} \frac{1}{|F_L^\nu|}, \quad \left(\nu_z \simeq \frac{N}{4}\right). \qquad (7.12)$$

В области $\sigma_\nu \gg 1$ из (7.5) и (7.6) имеем

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\overline{(\Delta z_L)^2}} &\leqslant \frac{\pi\sqrt{18/11}}{N^{3/2}} \frac{\nu_\gamma^3 R}{\nu^2|F_L^\nu|} \\ \sqrt{\overline{\alpha_M^2}} &\leqslant \frac{6\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sqrt{N}\,\nu_\gamma^3}{\nu^2|F_M^\nu|} \end{aligned}\right\} \text{при} \quad \begin{aligned} &\nu^2\lambda \ll \nu_\gamma^3 \\ &\Delta\nu_\gamma \ll \nu_\gamma^2/\sigma_\nu, \end{aligned} \qquad (7.13)$$

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\overline{(\Delta z_L)^2}} &\leqslant \frac{\pi\sqrt{\lambda}\,R}{\sqrt{2}\,\nu N^{3/2}|F_L^\nu|} \\ \sqrt{\overline{\alpha_M^2}} &\leqslant \frac{\sqrt{2N\lambda}}{\sqrt{\pi}\,\nu\,|F_M^\nu|} \end{aligned}\right\} \text{при} \quad \nu^2\lambda \gg \nu_\gamma^3 \ \text{ либо } \Delta\nu_\gamma \gg \frac{\nu_\gamma^2}{\sigma_\nu}. \qquad (7.14)$$

Если каждый из $2N$ элементов магнитной системы сам состоит из независимых элементов, выписанные критерии сохранения поляризации улучшаются примерно в $\sqrt{Q/2N}$ раз.

Полученные условия указывают, что для обеспечения радиационной поляризации высокой степени выгоднее иметь накопители с возможно большим числом периодов магнитеой системы. Критерии устойчивости поляризации при встрече при естественном вертикальном размере (обязанном имеющимся неидеальностям магнитной системы) обычно очень хорошо выполнены. При специальном увеличении вертикального размера для максимальной светимости критерии (7.7) и (7.8) иногда могут нарушаться. Более выгодным, как и в ситуациях без встреч, являются накопители с большим числом элементов периодичности ($N \gg \nu$).

Интересно проследить, как изменяются ограничения на точность выполнения магнитных систем с ростом максимальной энергии накопителей. Основные требования предъявляются к допускам на Δz_L и α_M . Примем следующие зависимости от энергии параметров накопителей традиционного типа

$$R \sim \gamma^2, \quad N \sim \gamma, \quad Q \sim R \sim \gamma^2, \quad \nu_\gamma \sim \sqrt{\gamma}, \quad \sigma_\nu \sim \gamma, \quad \lambda \sim \gamma,$$

где Q – полное число независимых элементов, с учетом субструктуры периода системы. При повышении энергии $(\Delta z_L)_{доп.}$ и $(\alpha_M)_{доп.}$ изменяются следующим образом:

при $\sigma_\nu \ll 1$

$$(\Delta z_L, \alpha_M)_{доп.} \sim \gamma^{-1}$$

при $\sigma_\nu \gtrsim 1$

$$(\Delta z_L, \alpha_M)_{доп.} \sim \begin{cases} \gamma^{-1/4} & \nu^2\lambda \ll \nu_\gamma^3, \quad \Delta\nu_\gamma \ll \nu_\gamma^2/\sigma_\nu, \\ \gamma^{1/2} & \nu^2\lambda > \nu_\gamma^3, \quad \Delta\nu_\gamma > \nu_\gamma^2/\sigma_\nu. \end{cases}$$

Отметим, что критерии усиливаются до тех пор, пока определяющим не становится резонансный механизм диффузии, после чего требования к точности выполнения магнитной системы начинают ослабевать с ростом максимальной энергии. Наиболее жесткими требования оказываются для накопителей на энергии несколько сотен ГэВ.

Для встречных пучков отношение λ_d/λ при фиксированном $(\Delta\nu_z)_s$ с ростом максимальной энергии уменьшается:

$$\lambda_d/\lambda \sim \gamma^{-1} \qquad \text{при} \quad \sigma_\nu \lesssim (\Delta\nu_z)_s,$$

$$\lambda_d/\lambda \sim \gamma^{-2} \qquad \text{при} \quad \sigma_\nu \gg (\Delta\nu_z)_s.$$

При изменении энергии в заданном накопителе, получаем, что для энергий, пока разброс σ_ν мал, требования на α_M и Δz_L возрастают с энергией следующим образом (см. (7.12) и 7.13)):

$$(\Delta z_L, \alpha_M)_{доп.} \sim \gamma^{-4} \qquad \text{при} \quad \nu \ll N \qquad (7.15)$$

$$(\Delta z_L, \alpha_M)_{доп.} \sim \gamma^{-2} \qquad \text{при} \quad \nu \gtrsim N$$

При приближении σ_ν к единице критерии резко усиливаются (при $\nu_\gamma \ll 1$) в сравнительно узкой области (см. (7.5), (7.6), про -

должая далее изменяться по прежнему закону (7.I5) (если считать $\nu_z = const$). При достаточно большой энергии включается резонансный механизм диффузии (см. (7.I4). Требования на α_M и ΔZ_L изменяются как $\gamma^{-1/2}$ при $\nu \ll N$ и как $\gamma^{3/2}$ при $\nu \gtrsim N$.

При осуществлении встречи пучка в данном накопителе условие сохранения поляризации ($\lambda_d \lesssim \lambda$) при фиксированном $(\Delta\nu_z)_s$ изменяется следующим образом (см. (7.7) и (7.8):

при $\sigma_\nu \lesssim (\Delta\nu_z)_s$

$\lambda_d/\lambda \sim \gamma^3$ если $\nu \ll N$,

$\lambda_d/\lambda \sim \gamma^{-1}$ если $\nu \gtrsim N$.

при $1 \gg \sigma_\nu \gg (\Delta\nu_z)_s$

$\lambda_d/\lambda \sim \gamma$ если $\nu \ll N$,

$\lambda_d/\lambda \sim \gamma^{-3}$ если $\nu \gtrsim N$.

При $\sigma_\nu \gtrsim 1$ влиянием встречного пучка можно пренебречь по сравнению с эффектами, связанными с "несовершенством" магнитной системы.

8. Заключение

Проведенное подробное исследование позволяет ответить на вопрос о возможности самополяризации электронов и позитронов в зависимости от условий движения частиц. Может оказаться, что в заданном накопителе эти условия не будут выполнены. Тогда, для предотвращения деполяризации потребуются дополнительные меры. Очевидный способ заключается в компенсации опасных гармоник возмущения. При этом очень важно иметь возможность оперативного измерения степени поляризации пучка без ее разрушения, чтобы непрерывно контролировать эффективность компенсации. Однако, при значительном числе гармоник, ответственных за деполяризацию, использовать этот способ не так просто.

Усилить роль поляризующих процессов можно также с помощью "змейки", введенной в прямолинейный промежуток накопителя, как предложено в работах /I7-I9/. "Змейка" представляет собой участки с сильным знакопеременным вертикальным магнитным полем с

равным нулю средним значением и большим $\langle B_z^3 \rangle$. Минимальное число осцилляций поля определяется допустимой амплитудой пространственных биений орбиты в промежутке. В простейшем варианте это три участка с длинами θ_- , θ_+ , θ_- и полями на них B_- , B_+ , B_- . Нулевое среднее значение $B_+\theta_+ + 2B_-\theta_- = 0$ и симметрия относительно среднего участка обеспечивают сохранение траектории частиц вне области "змейки". Для получения высокой степени поляризации необходимо выполнить условие:

$$B_+^2 \gg B_-^2 .$$

Введение полей B_+ и B_- достаточно большой величины приводит к тому, что как поляризующие, так и деполяризующие процессы будут определяться излучением на участках "змейки": В условиях $\sigma_\nu \ll 1$, когда $\lambda_d \sim \langle (\gamma \frac{\partial \vec{n}}{\partial \gamma})^2 |B|^3 \rangle$, деполяризующее влияние излучения будет относительно мало, если в области "змейки" параметр $|\gamma \partial\vec{n}/\partial\gamma|$ будет много меньше единицы. Ввиду малой доли орбиты, занятой змейкой, вектор $\gamma\partial\vec{n}/\partial\gamma$ практически определяется возмущениями на остальных участках орбиты, и поэтому по всей длине змейки задается всего двумя параметрами. Компенсацию зависимости $\vec{n}$ от энергии в этом промежутке можно осуществить, если, например, ввести в двух местах орбиты (между которыми угол поворота спина вокруг вертикального направления не кратен π) радиальные магнитные поля. Требуемые величины этих полей можно подобрать, добиваясь минимальной скорости деполяризации.

Следует иметь в виду, что "змейка" увеличивает энергетический разброс в пучке, а следовательно и σ_ν .

При $\sigma_\nu \gtrsim 1$ или в условиях встречных пучков, когда деполяризация обязана диффузионным прохождением резонансов, введение "змейки" не увеличивает скорости диффузии спинов, и при достаточной величине полей "змейки" поляризующее действие излучения становится определяющим.

В оптимальных случаях при введении "змейки" степень поляризации будет стремиться к величине

$$\zeta = \frac{8}{5\sqrt{3}} \frac{\langle B_z^3 \rangle}{\langle |B_z|^3 \rangle} = \frac{8}{5\sqrt{3}} \frac{B_+^2 - B_-^2}{B_+^2 + B_-^2} ,$$

а время поляризации к величине

$$T \equiv \lambda^{-1} = \frac{8}{5\sqrt{3}} \frac{R^2}{\lambda r_e} \frac{|\langle B_z \rangle|^3 2\pi \gamma^{-5}}{2|B_-|^3\theta_- + |B_+|^3\theta_+} .$$

Важно, что введение "змейки" одновременно значительно уменьшает время поляризации. Особенно удобен этот способ повышения роли поляризующих процессов в больших накопителях на предельно высокие энергии с малым полем $\langle B_z \rangle$. При непредельных по радиационным потерям энергиях скорость поляризации можно увеличить примерно в $B_+^3\theta_+/2\pi\langle B_z^3 \rangle$ раз, одновременно с увеличением радиационных потерь в $B_+^2\theta_+/2\pi\langle B_z^2 \rangle$ раз. Если же иметь в распоряжении достаточно большие поля B_+, этот способ можно применять и в случаях, когда целесообразно увеличивать значения λ, пропорциональные $\langle |B_z|^3 \rangle$, без существенного увеличения радиационных потерь на обороте, пропорциональных $\langle B_z^2 \rangle$. При этом условии скорость поляризации удается увеличить примерно в B_+/B_z раз. Возможны также ситуации, когда процессы диффузии не позволяют поляризовать частицы при нужной энергии, но время деполяризации оказывается достаточно большим для проведения эксперимента. При этом может оказаться целесообразным поляризовать пучок с помощью "змейки" при более низкой энергии, где параметр $\gamma\partial\vec{n}/\partial\gamma$ мал и его компенсация не требуется. Деполяризацию, связанную с пересечением спиновых резонансов при переводе пучка на высокую энергию при необходимости можно подавить с помощью приемов, описанных в работах /20 - 22/.

Ускорять поляризацию (пропорционально значению $\mathcal{K}^2$ в магнитах) можно также, уменьшая длину поворотных участков (при этом уменьшается отношение магнитного радиуса накопителя к среднему). При $\sigma_\nu \gtrsim 1$ или в условиях встречных пучков, это приведет к увеличению и степени равновесной поляризации, так как скорость деполяризующих эффектов $\lambda_d \sim \lambda_d^{\tau}$, при увеличении $\mathcal{K}$, остается, примерно, той же самой. Радиационные потери возрастают пропорционально первой степени величины $\mathcal{K}$ в магнитах.

В данной работе рассмотрены возможности обеспечения поперечной поляризации частиц большой энергии в накопителях с вертикальным полем. Известно, что продольное направление поляризации можно получить введением в промежуток радиальных полей (или

комбинаций радиальных и вертикальных) с восстановлением орбиты и ориентации спина на выходе из промежутка (см. /I4/ и обзоры /I8, I9/). Исследование радиационной устойчивости поляризации в таком накопителе существенно не отличается от обычного случая постоянно вертикального поля, и есть основания считать, что можно обеспечить высокую степень поляризации вдоль скорости.

Отметим также, что восстановление спина на выходе из промежутка с поворачивающими полями не является принципиальным требованием. Напротив, в специально созданных ситуациях, когда направление спина не постоянно на основных участках орбиты, могут открываться дополнительные возможности управления поляризацией и борьбы с деполяризующими факторами.

Нам приятно поблагодарить В.Н.Байера за интерес к работе.

Литература

I. В.Н.Байер, Ю.Ф.Орлов, "Квантовая деполяризация электронов в магнитном поле". ДАН СССР I65, 783 (I965).

2. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, "Диффузия спинов частиц в накопителях". ЖЭТФ, 62, 430 (I972).

3. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, "Получение продольно-поляризованных электронов и позитронов с помощью нового механизма радиационной поляризации". Препринт ИЯФ СО АН СССР 76-84, Труды У Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, октябрь, I976.

4. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский, "О движении спина частиц в накопителе с производным полем", ДАН СССР, I92, I255 (I970); Препринт ИЯФ СО АН СССР 2-70 (I970).

5. А.М.Кондратенко, "Устойчивость поляризации встречных пучков", ЖЭТФ 66, I2II (I974).

6. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, "Кинетика поляризации частиц в накопителях". ЖЭТФ, 64, I9I8 (I973).

7. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, "Релаксация и равновесное состояние поляризации электронов в накопителях", ДАН СССР, 2I7, 3II (I974).

8. Я.С. Дербенев, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский, "Динамика поляризации частиц вблизи спиновых резонансов", ЖЭТФ 60, I2I6 (I97I).

9. А.А.Соколов, И.М.Тернов "О поляризационных и спиновых эффектах в теории синхротронного излучения", ДАН СССР I53, I052, (I963).

I0. В.Н.Байер, В.М.Катков, "Радиационная поляризация электронов в магнитном поле", ЖЭТФ, 52, I422 (I967).

II. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко, "Кинетика радиационной поляризации", ЖЭТФ, 58, I695 (I970).

I2. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев, "Теория циклических ускорителей", Ф.М. Москва, I962, глава Ш, § 3.

I3. R.F.Schwitters. Nucl.Instr. and Meth. 117, 331 (1974).

I4. A.W.Chao, R.F.Schwitters. "Linear theory of beam depolarization due to vertical betatron motion". SPEAR-194 PEP-217 (1976).

I5. A.W.Chao, R.F.Schwitters. "More on beam depolarization at PEP" PEP-233 (1977).

I6. D.Möhl, B.W.Montague "Depolarization in large electron storage rings" Nucl. Instr. and Meth. 137, 423 (1976).

I7. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский. "О получении пучков с нужной поляризацией в накопителях и ускорителях". Препринт ИЯФ СО АН СССР 76-62.

I8. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, С.И.Середняков, А.Н.Скринский, Г.М.Тумайкин, Ю.М.Шатунов, "Радиационная поляризация: получение, управление, использование".

I9. А.Н.Скринский. Доклад на ХУШ Международной конференции по физике высоких энергий. Тбилиси, июль I976 г. (Сокращенный вариант обзора /I8/).

20. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко. ДАН СССР 223, 830 (I975)

2I. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко. Ускорение поляризованных частиц в синхротронах до высоких энергий". Доклад на X Международной конференции по ускорителям, Серпухов, I977 г.

22. Я.С.Дербенев, А.М.Кондратенко, А.Н.Скринский, Ю.М.Шатунов. "Сохранение поляризации электронов в накопителях при пересечении спиновых резонансов". Доклад на X Международной конференции по ускорителям, Серпухов, I977 г.

Работа поступила - 28 января 1977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 6.7-1977 г. МН 07464
Усл. 2,7 печ.л., 2,I учетно-изд.л.
Тираж 290 экз. Бесплатно
Заказ № 60.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР