

30

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 43

Ф.М.Израйлев, С.И.Мишнев, Г.М.Тумайкин

**ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОПРЕ-
ДЕЛЕНИЮ КРИТЕРИЯ СТОХАСТИЧНОСТИ
ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВСТРЕЧНЫХ
ПУЧКОВ (ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ)**

Новосибирск

1977

Ф.М.Израйлев, С.И.Мишнев, Г.М.Тумайкин

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ КРИТЕРИЯ
СТОХАСТИЧНОСТИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВСТРЕЧНЫХ
ПУЧКОВ (ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ)

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе приводятся результаты численного моделирования взаимодействия частицы со встречным сгустком. Исследуются одномерные колебания в ленточной и цилиндрической моделях пучка с гауссовским распределением. Показывается, что в отсутствие какой-либо модуляции бетатронных колебаний стохастичность начинается при значительно больших значениях линейного сдвига бетатронной частоты ξ , чем на реальных установках. Выясняется роль модуляции, эквивалентной радиально-фазовым колебаниям, при этом неустойчивость возникает для существенно меньших значений параметра ξ . Обнаружено, что наиболее опасным является случай, когда направления бетатронных и синхротронных колебаний совпадают.

Электромагнитное взаимодействие встречных пучков в накопителе приводит к увеличению поперечных размеров пучков и потерям частиц. Нелинейное электромагнитное поле сгустка вызывает сдвиг бетатронной частоты встречной частицы, который зависит от амплитуды колебаний, а периодическая азимутальная зависимость силы этого поля ведет к возбуждению нелинейных резонансов, динамика частиц вблизи которых исследовалась многими авторами (см., например /1-3/). В этих работах было показано, что нелинейные резонансы приводят к образованию новых замкнутых через q оборотов орбит, удовлетворяющих в случае одномерного движения условию $\sqrt{a^2} = P/q$, и некоторой области устойчивости вокруг них. Ширина этой области, называемой областью автофазировки, зависит от порядка резонанса, положения её на фазовой плоскости бетатронных колебаний и вида нелинейной силы. Характер движения частицы, лежащей внутри этой области, определяется периодом колебаний вокруг центра области устойчивости. На границе области устойчивости (сепаратрисе) период колебаний стремится к бесконечности.

С увеличением тока встречного пучка число резонансов в области фазовой плоскости, занятой частицами, возрастает, области автофазировки соседних резонансов увеличиваются и происходит их перекрытие. Общие закономерности движения частиц в этих условиях рассмотрены в работе /4/, где показано, что при перекрытии резонансов движение на части фазовой плоскости носит стохастический характер.

В случае модуляции частоты бетатронных колебаний (например, радиально-фазовыми колебаниями) картина становится более сложной. Периодическое пересечение резонанса в зависимости от соотношений между девиацией частоты, частотой модуляции и частотой колебаний в области автофазировки может приводить к следующим эффектам /4,5/:

- а) медленному периодическому движению области автофазировки;
- б) появлению новых областей автофазировки модуляционных (синхробетатронных резонансов),
- в) стохастической неустойчивости в ограниченной области на фазовой плоскости из-за появления новых резонансов.

Таким образом, модуляция может быть причиной увеличения размеров пучков до перекрытия резонансов в обычном понимании этого явления. В работах /6/ дана несколько другая интерпретация влияния модуляции, а именно, захват частиц в область автофазировки и потеря частиц при движении области автофазировки. Оценки критериев неустойчивости, приводимые в указанных работах, носят в большей степени качественный характер, что связано с трудностями аналитического изучения рассматриваемых моделей.

Численное изучение эффектов встречи проводилось и ранее (см., например, /7-10/), но эти работы являются в большей степени иллюстративными и демонстрируют поведение частицы при каких-либо частных значениях параметров. Поэтому сравнение с экспериментом весьма затруднительно, даже если не обращать внимание на сравнительную простоту выбираемых моделей. Были предприняты также попытки аналитического рассмотрения вопроса, как например, в работах /11,12/, где исследовалась двумерная модель с гауссовым распределением заряда. Однако выражения для ширины областей автофазировки и критерий перекрытия резонансов получены в общем виде и мало пригодны для сопоставления с имеющимися экспериментальными данными (/13/).

Целью настоящей работы было численное моделирование эффектов встречи в широкой области условий и поиск на основе этого исследования основных закономерностей движения и численного критерия устойчивости движения. Для этого были использованы возможности ЭВМ БЭСМ-6 и диалоговой системы "Экран" со световым пером /14,15/. Исследование критерия перекрытия резонансов было проведено для одномерной модели цилиндрического и ленточного пучков с гауссовским распределением заряда. Показано, что критерий перекрытия резонансов в широкой области слабо зависит от частоты бетатронных колебаний. Численное значение параметра взаимодействия (см. формулу (I.5)) равно $\xi \approx 0.15-0.20$ и лежит существенно выше наблюдаемого на установках со встречными пучками (0.015-0.05).

При учёте синхротронных колебаний, что эквивалентно периодическому смещению оси встречного пучка, при численном моделировании обнаружено значительное понижение критерия

стохастичности. В частности, в том случае, когда направление смещения совпадало с направлением бетатронных колебаний, значение ξ падало до 0.005-0.025. На установках со встречными пучками такая модуляция соответствует возбуждению радиальных бетатронных колебаний при наличии радиальной Ψ_r -функции, или вертикальных колебаний при наличии Ψ_z -функции в области взаимодействия.

I. Описание модели

Для решения задачи периодического взаимодействия частицы со встречным пучком использовано дискретное преобразование, включающее в себя матрицу перехода через период магнитной системы (линейное преобразование) и матрицу для взаимодействия частицы с полем пучка. Модель взаимодействия удовлетворяет следующим условиям:

- рассматривается взаимодействие отдельной частицы с полем цилиндрического или ленточного пучка, имеющего гауссовское распределение в плоскости, перпендикулярной движению равновесной частицы;
- слусток короткий, что соответствует приближению тонкой линзы;
- изучается одномерное движение без учета бетатронных колебаний по другой степени свободы;
- предполагается, что места встречи располагаются через период магнитной системы накопителя.

Преобразование от одного места встречи до другого можно представить в виде:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \mu & \beta \sin \mu \\ -\frac{1}{\beta} \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad (I.1)$$

а преобразование для взаимодействия частицы с пучком:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 \\ p_3 &= p_2 + f(x_2) \end{aligned} \quad (I.2)$$

Из (I.1) и (I.2) получаем полную матрицу преобразования за один период:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n \cos \mu + \beta p_n \sin \mu + \beta f(x_n) \sin \mu \\ p_{n+1} &= -\frac{X_n}{\beta} \sin \mu + p_n \cos \mu + f(x_n) \cos \mu \end{aligned} \quad (I.3)$$

Здесь предполагается для простоты, что производная от β -функции равна нулю: $\dot{\beta} = 0$; $\dot{x} = p = ds/ds$, где S - продольная координата, μ - изменение бетатронной фазы за один период магнитной системы. Параметр μ связан с бетатронной частотой ν через соотношение $\mu = 2\pi\nu/m$, где m - число мест встречи.

Сила для цилиндрического пучка с гауссовским распределением плотности $\rho = \rho_0 \exp(-x^2/2\sigma^2)$ имеет вид:

$$f(x) = -\frac{2Nze}{\gamma} \frac{1-e^{-x^2/2\sigma^2}}{x} \quad (I.4)$$

где σ - среднеквадратичный размер пучка, N - число частиц в сгустке, ze - классический радиус электрона, γ - релятивистский фактор.

Знак минус соответствует электрон-позитронному взаимодействию.

Используя известное соотношение для параметра ξ (который приближенно равен линейному сдвигу бетатронной частоты на один период):

$$\xi_{z,2} = \frac{Nze\beta \beta_{z,2}}{2\pi\gamma\beta_z\beta_2(\beta_z + \beta_2)} \quad (I.5)$$

имеем для силы взаимодействия частицы с цилиндрическим пучком ($\beta_z = \beta_2 = \beta$):

$$f_z(x) = -\frac{8\pi\beta^2\xi}{\beta} \cdot \frac{1-e^{-x^2/2\sigma^2}}{x} \quad (I.6)$$

и для ленточного пучка ($\beta_z = \beta$; $\beta_2 \rightarrow \infty$):

$$f_z(x) = -\frac{4\pi\xi}{\beta} \int_0^x e^{-x'^2/2\sigma^2} dx' \quad (I.7)$$

На рис. 1 приведен график зависимости силы от координаты для цилиндрического и ленточного пучков для одного и того же значения ξ . Следует отметить, что при этом условии величина

на плотности в центре для цилиндрического пучка в 2 раза больше, чем для ленточного.

Введем безразмерные переменные

$$X = \frac{x}{\sigma} \quad ; \quad \mathcal{P} = \frac{p\beta}{\sigma} \quad (I.8)$$

Преобразование (I.3) в новых переменных будет иметь вид для цилиндрического пучка:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n \cos \mu + \mathcal{P}_n \sin \mu - \frac{8\pi\xi}{X_n} \left(1 - e^{-X_n^2/2}\right) \sin \mu \\ \mathcal{P}_{n+1} &= -X_n \sin \mu + \mathcal{P}_n \cos \mu - \frac{8\pi\xi}{X_n} \left(1 - e^{-X_n^2/2}\right) \cos \mu \end{aligned} \quad (I.9)$$

и для ленточного пучка:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n \cos \mu + \mathcal{P}_n \sin \mu - 4\pi\xi \int_0^{X_n} e^{-x'^2/2} dX_n \sin \mu \\ \mathcal{P}_{n+1} &= -X_n \sin \mu + \mathcal{P}_n \cos \mu - 4\pi\xi \int_0^{X_n} e^{-x'^2/2} dX_n \cos \mu \end{aligned} \quad (I.10)$$

Из (I.9) и (I.10) следует, что характер движения при взаимодействии частицы с полем встречного сгустка определяется значением параметра ξ и набегом фазы μ от одного места встречи до другого. Преобразование (I.9) или (I.10) может быть использовано для анализа устойчивости движения частицы с малой амплитудой бетатронных колебаний. Для этого представим его в виде:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= A(X_n, \mathcal{P}_n) \\ \mathcal{P}_{n+1} &= B(X_n, \mathcal{P}_n) \end{aligned} \quad (I.11)$$

Тогда движение вблизи центра ($X = \mathcal{P} = 0$) можно описать, варьируя (I.11):

$$\begin{aligned} \delta X_{n+1} &= \frac{\partial A}{\partial X_n} \delta X_n + \frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_n} \delta \mathcal{P}_n \\ \delta \mathcal{P}_{n+1} &= \frac{\partial B}{\partial X_n} \delta X_n + \frac{\partial B}{\partial \mathcal{P}_n} \delta \mathcal{P}_n \end{aligned} \quad (I.12)$$

Условие устойчивости для (I.12) может быть записано в стандартном виде: $-2 < S_p M < 2$, где

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial X_n} & \frac{\partial A}{\partial P_n} \\ \frac{\partial B}{\partial X_n} & \frac{\partial B}{\partial P_n} \end{pmatrix} \quad (I.13)$$

M — матрица линейного преобразования (I.12). После соответствующих подстановок получаем условие устойчивости для частиц вблизи равновесной орбиты:

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{ctg} \mu/2 < -4\pi \xi < 2 \operatorname{ctg} \mu/2 \quad \text{для } \sin \mu > 0 \\ 2 \operatorname{ctg} \mu/2 < -4\pi \xi < -2 \operatorname{ctg} \mu/2 \quad \text{для } \sin \mu < 0 \end{aligned} \quad (I.14)$$

Граница устойчивости малых колебаний в зависимости от набега фазы μ для $\xi > 0$ представлена на рис.2 (кривая I). Видно, что для встречных электрон-позитронных пучков область линейной устойчивости лежит справа от целого резонанса, удовлетворяющего условию $\mu/\pi = k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$. Можно показать, что и для нелинейного преобразования (I.9) или (I.10) условия устойчивости также периодичны с периодом $\Delta \mu = \pi$. Этот факт связан с нечетностью силы относительно $X = 0$. В общем же случае периодичность равна $\Delta \mu = 2\pi$. Выше кривой I движение равновесной частицы становится неустойчивым и ограничение амплитуды колебаний происходит лишь за счет нелинейности силы. Пример такого движения приведен на рис. I4a, I4б, I8a, I8б где изображены несколько траекторий на фазовой плоскости, отличающиеся начальными значениями (X_0, P_0) .

2. Критерий перекрытия резонансов

С целью выяснения характера движения частицы при любых амплитудах уравнение (I.3) численно решалось на ЭВМ. Исследовалась структура фазовой плоскости за 10^4 – 10^5 "соударений" частицы со встречным пучком. При этом наибольшую ценность представляла графическая информация, выводимая на экран дисплея. Использовался комплекс графических устройств ВЦ СО АН СССР, и диалоговая система БЭСМ-6 — "Экран" (I4, I5/).

Обычно на экран дисплея выдавалась картина фазовой плоскости по 400 очередных точек в каждом кадре, полученных по

(I.3). В качестве параметров, изменяемых с помощью светового пера использовались μ и параметр взаимодействия ξ . Начальное положение частицы на фазовой плоскости, определяемое координатой X_0 и импульсом P_0 , задавалось с помощью светового пера. Это давало возможность быстро находить на фазовой плоскости резонансы, оценивать ширину области автофазировки, определять положение её границы (сепаратрисы). Быстрая сменяемость кадров (до 400 в минуту) позволила достаточно надежно определять характер движения, например, отличать устойчивое движение внутри или вне резонанса от неустойчивого, приводящего к заметной диффузии на фазовой плоскости. После такого анализа наиболее характерные фазовые траектории могли быть выведены на графо- или фотопостроитель вместе с параметрами, при которых проводилось их исследование.

При каждом значении μ величина ξ (пропорциональная току пучка) увеличивалась до тех пор, пока на фазовой плоскости не начинали перекрываться области автофазировки соседних резонансов. Такое значение ξ принималось за критическое ($\xi_{кр}$). Обычно в небольшом диапазоне $\Delta \xi$ почти одновременно с первой парой резонансов перекрывались области автофазировки еще нескольких резонансов. При этом движение на некоторой части фазовой плоскости принимало стохастический характер. Область перекрытия резонансов лежала обычно в диапазоне $X \approx 2 + 6$. В основном рассмотрение фазовой плоскости было ограничено размерами $X_{max} = 10$, хотя программа позволяла в случае надобности оперативно изменять X_{max} , сжимая или растягивая фазовую плоскость. Наиболее подробно было исследовано взаимодействие с цилиндрическим пучком. Многочисленные рисунки для различных значений ξ и μ (рис.7–20) дают некоторое представление о структуре фазовой плоскости ниже и выше критерия стохастичности $\xi_{кр}$. Отчетливо видны наиболее значительные области автофазировки, соответствующие выполнению резонансного условия $\sqrt{a^2} = P/q$ (a — амплитуда бетатронных колебаний). Из симметрии силы взаимодействия следует, что имеются только четные резонансы (q — четное), это хорошо видно и из рисунков.

С увеличением ξ площадь на фазовой плоскости, занятая стохастической областью, возрастала, области автофазировки около резонансов уменьшались, превращаясь в изолированные

островки. При этом фиксировалось значение ξ (называемое ξ_{\max}) при котором перекрытие резонансов распространялось на всю рассматриваемую область. В этом случае частицы с начальной амплитудой колебаний $X_0 \approx 2-3$ выходят за пределы области $X=10$. Полученные таким образом значения $\xi_{кр}$ и ξ_{\max} для цилиндрического и ленточного пучков в зависимости от μ представлены на рис. 2-3. Шаг по оси μ/π выбран равным 0.02.

Анализируя полученную зависимость для $\xi_{кр}$ можно сделать следующие выводы:

а) Для электрон-позитронных встречных пучков в большой области μ критическое значение $\xi_{кр}$ слабо зависит от частоты бетатронных колебаний.

б) Имеется существенное увеличение $\xi_{кр}$ при значениях μ справа от целого резонанса. Это связано с тем, что вблизи целого резонанса возрастает порядок q работающих нелинейных резонансов, а следовательно, и уменьшается их мощность. Из рис. 7-II хорошо видно, как изменяются области автофазировок с изменением μ справа от целого значения μ/π . Отметим, что если перейти от ξ к истинному сдвигу частоты $\Delta\nu$ для малых амплитуд (которое вблизи целого резонанса значительно отличается от ξ , см. например /16/):

$$\frac{1}{\pi} (\cos \mu - \cos \mu_0) = -\xi \cdot \sin \mu_0 \quad (2.1)$$

$$\Delta\nu = \mu - \mu_0$$

то зависимость $\Delta\nu_{кр}$ (на одно место встречи) будет иметь другой вид (рис. 4). Величина $\Delta\nu_{кр}$ также может служить в качестве критерия стохастичности.

в) Слева от целого значения μ/π критерий стохастичности также повышается, хотя для малых амплитуд этот диапазон частот не является устойчивым (центр разрушен). Перекрытие областей автофазировок в этом случае происходит на больших расстояниях от центра ($X \approx 6$).

г) Для цилиндрической модели пучка перекрытие областей автофазировок наступает при меньших значениях ξ ($\xi_{кр} \approx 0.16$), чем для ленточной модели пучка ($\xi_{кр} \approx 0.24$). Однако как уже

отмечалось, при одинаковых значениях ξ плотность заряда в центре для цилиндрического пучка вдвое больше, чем для ленточного (см. I.5). Характер областей автофазировок для цилиндрического и ленточного пучков существенно различен. Из рисунков фазовой плоскости видно, что для ленточной модели из-за меньшей нелинейности области автофазировок распространяются на большую фазовую площадь, а расстояние между ними возрастает (см. рис. I9-20).

д) Значение ξ_{\max} для цилиндрического пучка, характеризующее выход частицы за границу $X_{\max}=10$, (рис. 3, кривая II) не обнаруживает такой плавной, как для $\xi_{кр}$, зависимости от μ . Вблизи нелинейных резонансов низких порядков имеется резкий переход от неустойчивого движения (слева от резонанса) к относительно более устойчивому (справа от резонанса). Это хорошо проиллюстрировано на рис. I1 - I2, где μ лежит слева и справа от резонанса $\mu/\pi = 2/6$. Однако для ленточного пучка в этой области X такой резкой зависимости не обнаружено.

3. Влияние синхротронных колебаний

Экспериментальные значения $\xi_{кр}$, достигнутые на установках со встречными пучками, намного меньше расчетных (рис. 2, кривая II). Одной из возможных причин этого уменьшения является модуляция бетатронной частоты из-за синхротронных колебаний.

Такая модуляция имеет место, если:

а) Ψ_z или $\Psi_{\bar{z}}$ - функция в области взаимодействия не равна нулю,

б) длина ступки превышает величину β -функции в месте встречи. В приближении короткого ступки рассмотрим только первую возможность. Будем также считать, что набег фазы μ остается постоянным при синхротронных колебаниях.

Для случая, когда плоскость синхротронных колебаний совпадает с плоскостью бетатронных колебаний, выражение для силы при взаимодействии с цилиндрическим пучком имеет вид:

$$f(x, u) = -\frac{8\pi e^2 \xi}{\beta} \cdot \frac{1 - \exp[-(x+u)^2/2\sigma^2]}{x+u} \quad (3.1)$$

где $u = a_s \sin\left(\frac{c n v_s \eta}{m}\right)$

a_s — амплитуда синхротронных колебаний (максимальное отклонение частицы по z или \bar{z} в месте взаимодействия);

v_s — частота синхротронных колебаний.

m — число мест встречи.

Если плоскости синхротронных и бетатронных колебаний перпендикулярны, то

$$f(x, u) = -\frac{8u^2 \xi}{\beta} \cdot x \cdot \frac{1 - \exp[-(x^2 + u^2)/2\xi^2]}{x^2 + u^2} \quad (3.2)$$

Для ленточной модели будет иметь смысл только случай, когда плоскости бетатронных и синхротронных колебаний совпадают. Выражение для силы может быть получено заменой в (I.7) x на $(x+u)$. Используя такие модели взаимодействия, можно получить соответствующие преобразования с учетом синхротронных колебаний, подобно (I.9) и (I.10).

Картина фазовой плоскости при таком взаимодействии значительно сложнее, однако момент возникновения стохастического режима при наблюдении на дисплее еще прослеживается (рис. 21-24).

На рис. 5 представлена зависимость $\xi_{кр}$ от амплитуды синхротронных колебаний $Y = a_s/\xi$ для разных моделей взаимодействия и нескольких значений частот бетатронных колебаний. Видно, что модуляция значительно понижает критерий стохастичности. При увеличении Y до значений $Y \approx 1 + 1,5$ критерий резко уменьшается и затем выходит на плато.

Особенно значительное уменьшение $\xi_{кр}$ для цилиндрической модели наблюдается, если плоскости бетатронных и синхротронных колебаний совпадают (кривая II). Для ленточной модели влияние синхротронных колебаний сказывается еще сильнее, и критерий стохастичности уменьшается не менее, чем на порядок (см. рис. 5, кривая III).

Для вертикальных бетатронных колебаний такая модуляция соответствует случаю, когда в области взаимодействия пучков

вертикальная Ψ_z -функция не равна нулю. Появление её обычно связано с возмущениями магнитного поля. Приведенные на рис. 5 результаты получены для $v_s = 0.01$, что примерно соответствует частоте радиально-фазовых колебаний накопителя ВЭШ-2М /17/. Зависимость $\xi_{кр}$ от частоты радиально-фазовых колебаний для ленточной и цилиндрической модели представлена на рис. 6. Оказывается, что критерий стохастичности практически не зависит от v_s , и только при совсем малых значениях $v_s \leq 10^{-3}$ для цилиндрической модели наблюдается увеличение $\xi_{кр}$. Для ленточной модели такое увеличение, по видимому, имеет место при более низких значениях частот, однако, для его обнаружения нужны большие времена счета. Интересно отметить, что и для более низких значений $\xi < \xi_{кр}$ (для ленточной модели рис. 5, кривая IV), есть слабая диффузия в области $X \approx 1 + 2$, однако, область перекрытия резонансов значительно меньше ($\Delta X \approx 0.5 + 1.0$). С самого начала за критерий было выбрано условие образования значительной области диффузии ($X \approx 2+5$), когда перекрываются большие по площади области автофазировок. Поэтому вопрос о слабой диффузии подробно не исследовался, тем не менее при тех же параметрах для цилиндрической модели такой диффузии обнаружено не было (на "временах" $N \leq 10^5$).

В дополнение была снята зависимость $\xi_{кр}$ для цилиндрической модели от величины μ (при условии, что плоскости бетатронных и синхротронных колебаний совпадают). Эта зависимость приведена на рис. 2 (кривая IV) для параметров $v_s = 0.01$; $Y = a_s/\xi = 1.5$. Как и при отсутствии синхротронного движения выше целого резонанса имеется существенное увеличение $\xi_{кр}$, хотя абсолютное его значение при учете синхротронных колебаний уменьшается в несколько раз.

4. Заключительные замечания

I) Как уже отмечалось, из уравнений (I.9-I.10) следует, что при заданном виде взаимодействия критерий зависит лишь от двух параметров — ξ и μ . При увеличении числа мест встречи m меняется только набег фазы $\mu = 2\pi v/m$. Поэтому критерий стохастичности зависит от ξ , а не от $Q = m\xi$, независимо от числа мест встречи. Конечно, этот вывод верен только

для выбранной модели, где пренебрегается возмущениями магнитного поля, которое имеет свою периодичность. В случае учета возмущений, в частности, при нетождественности областей взаимодействия, ответ уже не очевиден; по-видимому, все будет определяться относительным действием обоих факторов — машинными резонансами и взаимодействием с пучком.

2) Третий параметр, от которого зависит стохастический предел — вид нелинейной силы встречного пучка. Для двух выбранных моделей сравнение результатов дает определенный ответ — ленточный пучок менее устойчив, чем цилиндрический. Особенно это заметно при введении модуляции.

3) Как правило, реальный пучок в накопителях имеет в сечении форму, близкую к эллипсу. Поэтому возникает один из основных вопросов — что даст учет двумерности модели взаимодействия? Можно предположить, что из-за увеличения числа резонансов (появятся разностные и суммовые резонансы) критерий понизится. Однако, по-видимому, результат в значительной степени будет зависеть от выбора рабочей точки (μ_2, μ_3). Предварительные численные эксперименты для круглого двумерного пучка $\beta_2 = \beta_3$;

$\left\{ \frac{M_2}{N} \right\} = \left\{ \frac{M_3}{N} \right\}$ показывают, что вдали от основного резонанса связи $\left\{ \frac{M_2}{N} \right\} = \left\{ \frac{M_3}{N} \right\}$, например, для $\nu_2 \approx 3.08$, $\nu_3 \approx 3.12$ критерий остается тем же, что и в одномерном случае. Введение модуляции понижает критерий во столько же раз. В дальнейшем предполагается более подробное исследование двумерной модели как для круглого, так и для эллиптического в сечении пучка.

4) Один из основных результатов исследования — обнаружение значительного влияния модуляции на устойчивость движения частицы. Понижение в 5–10 раз критерия стохастичности в разных моделях дает основание считать этот эффект одним из самых существенных при достижении максимальных значений ξ на реальных установках.

5) Более сильное влияние модуляции в случае, когда плоскости модуляции и бетатронных колебаний совпадают, частично объясняется тем, что симметрия силы (3.1) при $u \neq 0$ нарушается. Поэтому возможно появление новых резонансов (Q -нечетное), приводящих к уменьшению критерия стохастичности. Для выяснения того, насколько этот эффект может быть существен-

но, было исследовано влияние стационарного смещения центра пучка (что эквивалентно условию $\nu_s = 0$). Для смещения $Y = 1.5$ и $\left\{ \frac{M_2}{N} \right\} \approx 0.08$ критерий заметно понижается (от $\xi_{кр} \approx 0.20$ до $\xi_{кр} \approx 0.12 + 0.14$). Для вертикальных колебаний модуляция имеет место при наличии вертикальной Ψ -функции или при пересечении встречных сгустков под углом, как это имеет место на установке DORIS /18/. В случае, когда плоскости модуляции и бетатронных колебаний перпендикулярны, симметрия силы не нарушается (см. (3.2)). Нетрудно показать также, что в случае (3.1) глубина модуляции частоты бетатронных колебаний сильнее, чем в случае (3.2), при одной и той же амплитуде синхротронных колебаний.

6) Возникает также вопрос о влиянии затухания на общее движение частицы. Поскольку нас интересовало в первую очередь сильное перекрытие резонансов и сильная диффузия, когда за $10^4 + 10^5$ оборотов частица уходит на большие амплитуды, затухание можно считать слабым. Действительно, характерное время затухания для ВЭПП-2М, выраженное в N — числе взаимодействий с пучком, составляет $N \approx 10^6$, что позволяет в первом приближении затуханием пренебречь. В рассмотренной модели также не учтены и другие эффекты, например, влияние возмущений магнитного поля и квантовые флуктуации (шум). Тем не менее, на наш взгляд, даже такая простая модель дает много полезного в понимании динамики частиц в накопителях.

В заключение приносим нашу благодарность Л.Ф.Хайло за помощь в проведении вычислений.

Л и т е р а т у р а

1. A. Schoch, CERN Report, 57-21 (1958)
2. А.А. Коломенский, А.Н. Лебедев. Теория циклических ускорителей. Физматгиз, 1962.
3. Я.С. Дербенёв, С.И. Мишнев, А.Н. Скринский. Атомная энергия 20, (1966), 217.
4. Б.В. Чириков. "Исследование по теории нелинейного резонанса и стохастичности" ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1969.
5. Г.Н. Кулипанов, С.И. Мишнев, А.Н. Скринский. Труды УП Международной конференции по ускорителям. Ереван (1969), т.2, 353.
6. M. Month, "Proc. IXth. Int. Conf. on High Energy Acc." Stanford (1974), 402; IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-22 (1975), 1376.
7. E.D. Courant, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-12 (1965) 550.
8. M. Bassetti "Proc. Vth. Int. Conf. on High Energy Acc." Frascati., (1965), 708.
9. А.Н. Довбня и др. "Труды VI Межвузовской конференции по электронным ускорителям". Томск (1966), 60.
10. A. Renieri "Proc. IXth. Int. Conf. on High Energy Acc." Stanford (1974), 414
11. E. Keil, CERN/ISR-TH/72-7; CERN/ISR-TH/72-25.
12. A.G. Ruggiero, "Proc. IXth. Int. Conf. on High Energy Acc." Stanford, (1974), 419
13. F. Amman, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-20, (1963) 858; И.Б. Вассерман, И.А. Кооп, С.И. Мишнев и др. Изучение эффектов электромагнитного взаимодействия встречных пучков в накопителе ВЭПП-2М. Новосибирск, ИЯФ СО АН СССР, 1976.
14. Л.Ф. Васильева, Ф.М. Израйлев, Г.А. Ким. Машинная графика и её применение. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР (1974), 104.
15. Е.Г. Бабат, Ф.М. Израйлев, Б.В. Чириков. Материалы конференции. "Автоматизация научных исследований на основе применения ЭВМ". Новосибирск ИАЭ СО АН СССР (1974), 17.
16. F. Amman, Proc. VIII th. Int. Conf. on High Energy Acc. Geneva (1971), 63
17. И.Б. Вассерман, И.А. Кооп, В.П. Кутовой и др. Получение высокой светимости на электрон-позитронном накопителе ВЭПП-2М. Труды У Всесоюзного совещания по ускорителям. Москва, 1976.
18. DESY STORAGE RING GROUP; DORIS: Present Status and Future Plan, "Proc. IXth Int. Conf. on High Energy Acc." Stanford, (1974), 43

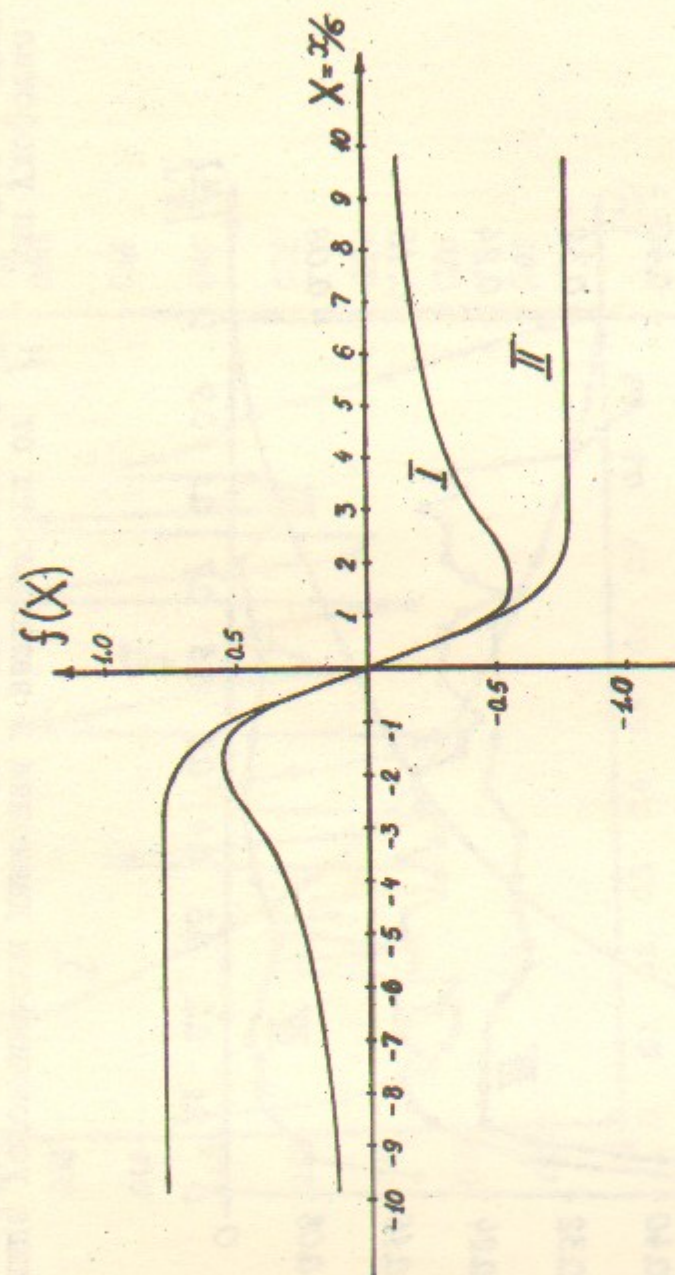


Рис. 1. Зависимость силы от координаты для цилиндрического пучка (кривая I) и для ленточного пучка (кривая II)

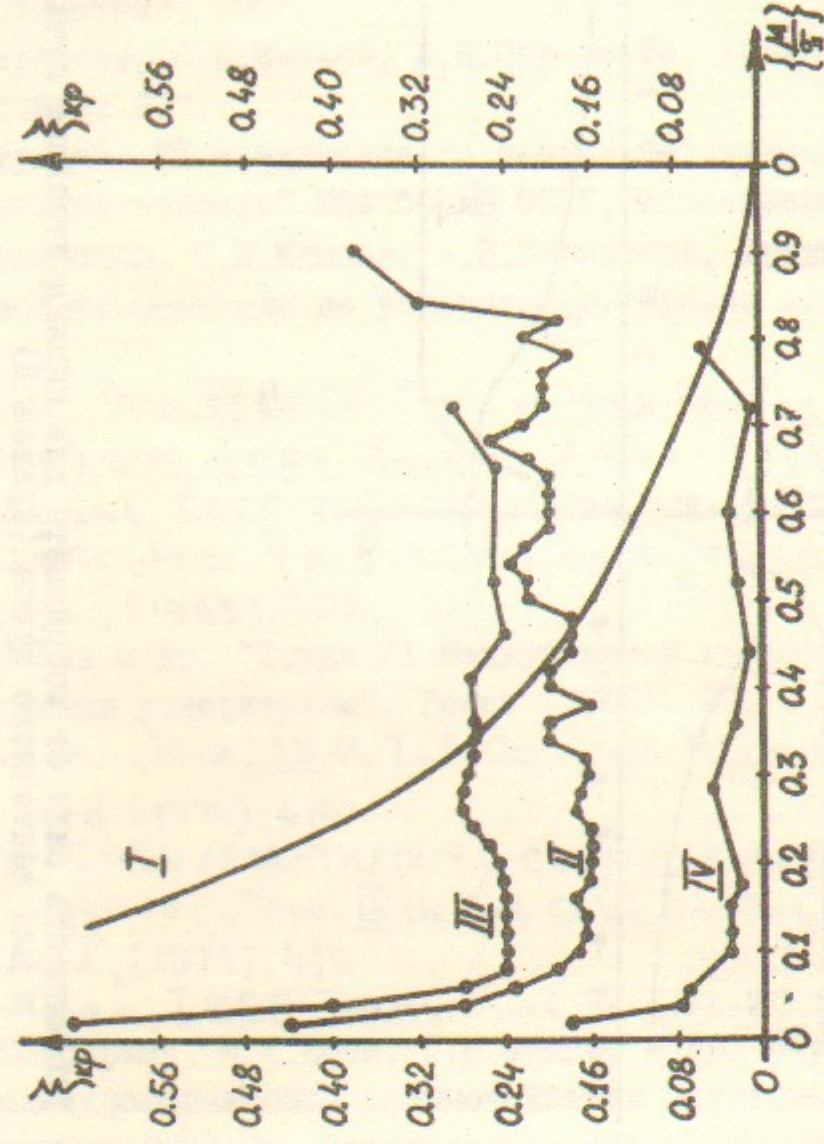


Рис. 2. Граница устойчивости движения в зависимости от M . Для удобства по горизонтальной оси отложена дробная часть от $M/5$. Кривая I дает условие устойчивости малых колебаний. Кривая II — граница стохастичности для цилиндрического пучка, кривая III — для ленточного. Кривая IV соответствует границе стохастичности для цилиндрического пучка при модуляции типа (3.1). ($\gamma = 1.5$, $\nu_s = 0.01$)

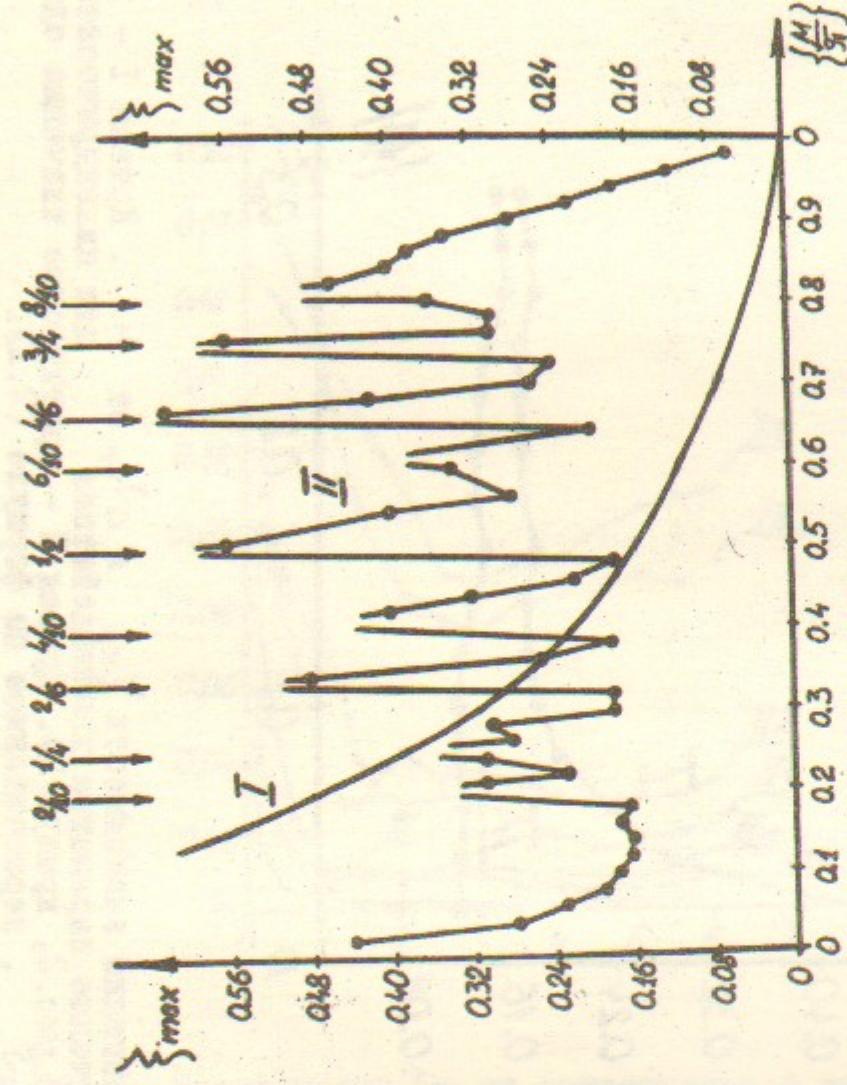


Рис. 3. Зависимость z_{\max} от M (Кривая II) стрелками указано расположение наиболее сильных резонансов. Для сравнения приведена кривая I — граница устойчивости центра (см. рис. 2).

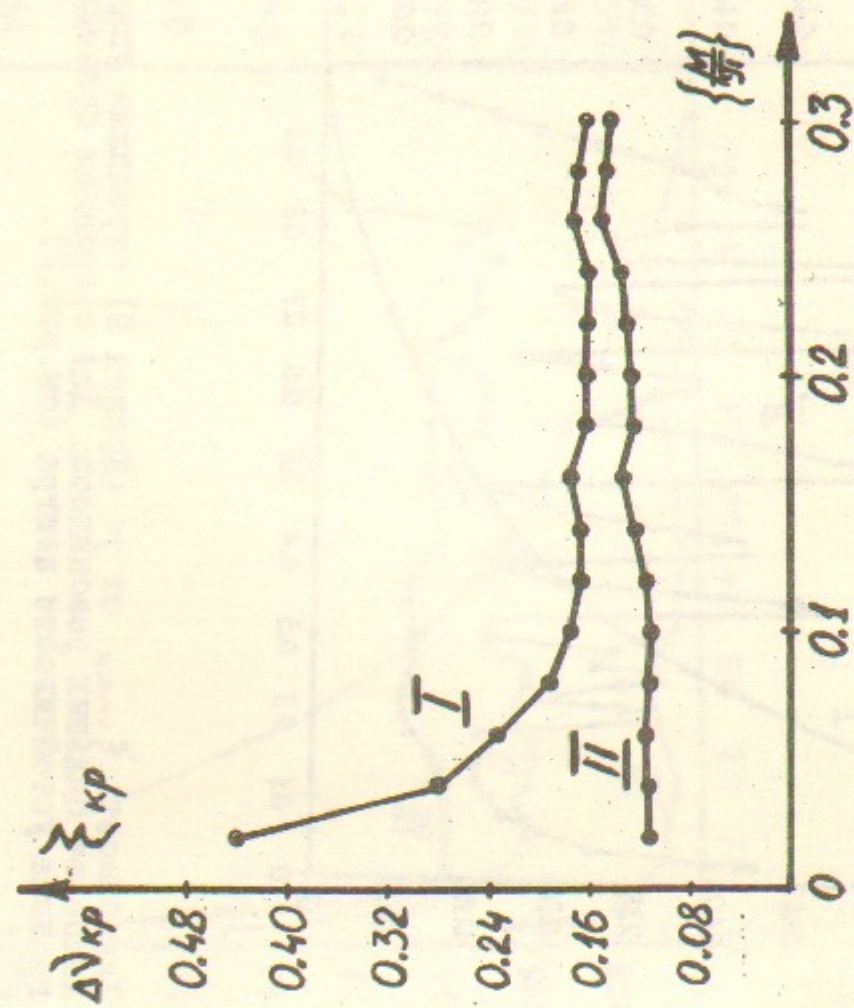


Рис. 4. Сравнение зависимости $\xi_{кр}$ и $\Delta\nu_{кр}$ от M . Кривая I — критическое значение параметра взаимодействия для цилиндрического пучка (см. рис. 2, кривую II). Кривая II — критическое значение сдвига частоты $\Delta\nu$, пересчитанное по формуле (2.1).

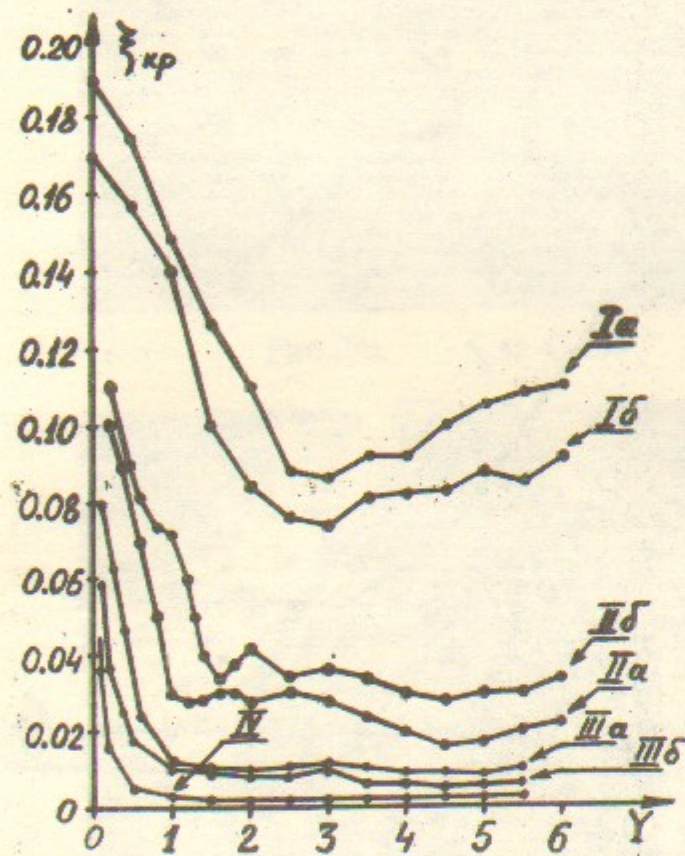


Рис. 5. Зависимость $\xi_{кр}$ от относительной амплитуды модуляции γ . Кривая I — цилиндрический пучок, плоскости бетатронных и синхротронных колебаний перпендикулярны. Кривая II — цилиндрический пучок, плоскости колебаний параллельны. Кривая III — ленточный пучок с модуляцией. Для а- $\{M/\gamma\} \approx 0.08$, для б- $\{M/\gamma\} \approx 0.12$. Кривая IV — критерий слабого перекрытия резонансов для ленточного пучка ($\{M/\gamma\} \approx 0.12$). Для всех кривых $\nu_s = 0.01$.

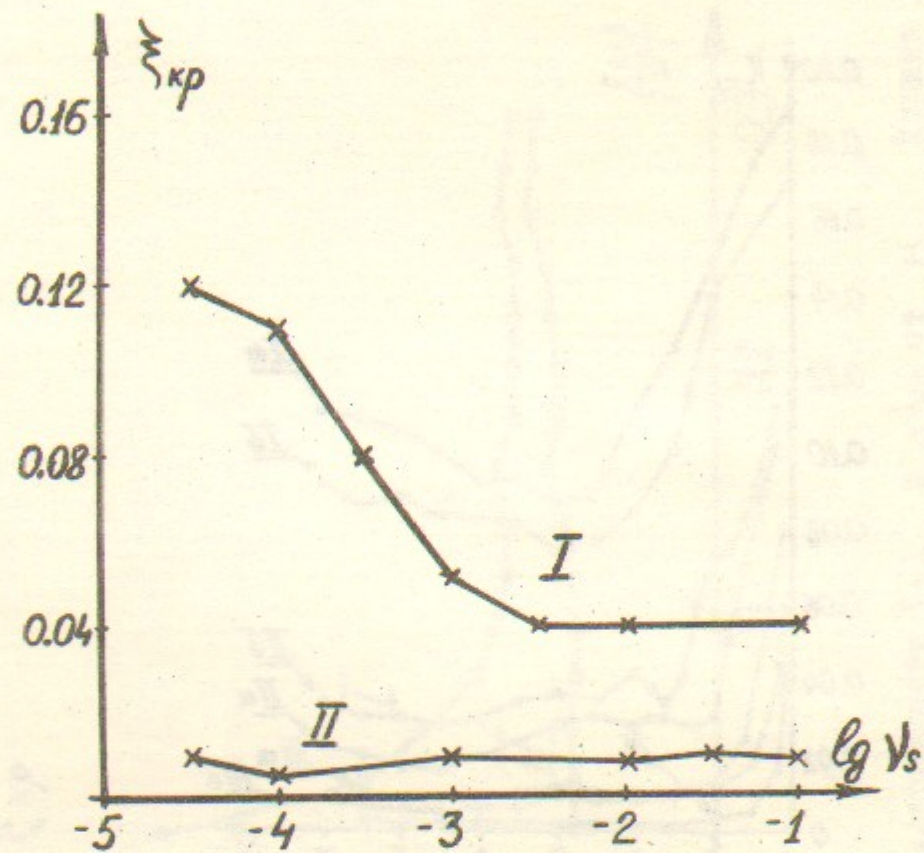


Рис. 6. Зависимость $\xi_{кр}$ от частоты радиально-фазовых колебаний ν_s . Кривая I - цилиндрический пучок, плоскости бетатронных и синхротронных колебаний параллельны, кривая II - ленточный пучок; $\gamma = 1.5$, $\{r_k\} = 0.12$.

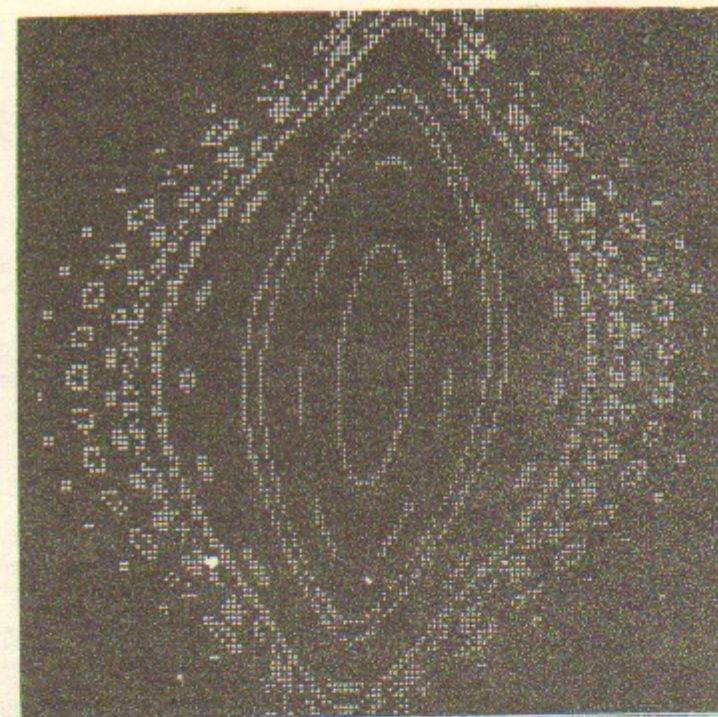


Рис. 7а $\xi \approx 0.24$

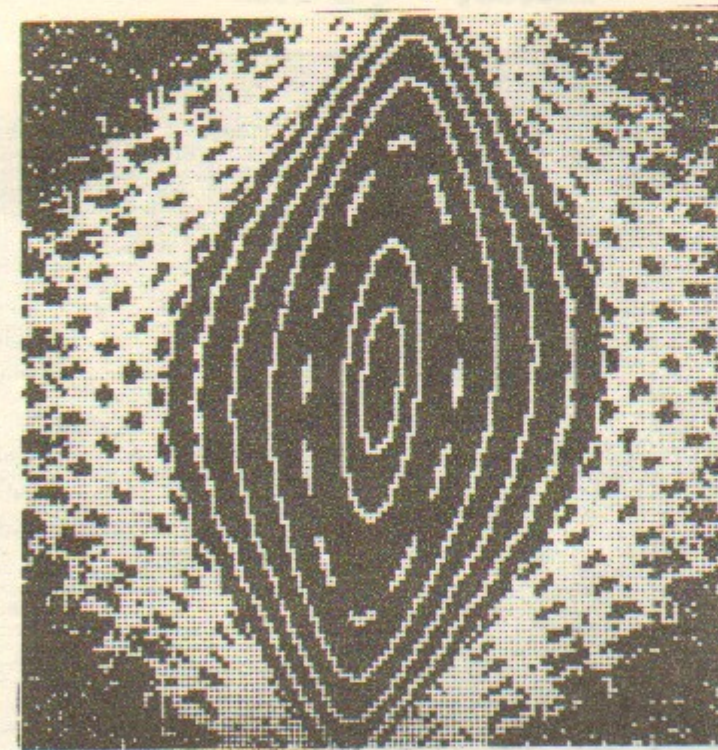


Рис. 7б $\xi \approx 0.32$

Вид фазовой плоскости при взаимодействии с цилиндрическим пучком, $\{r_k\} \approx 0.04$. Центр фазовой картины соответствует $\chi = \varphi = 0$; $\chi_{max} = 10$, $\varphi_{max} = 15$. Рис. (а) - для $\xi \approx 0.24$ - ниже границы стохастичности, рис. (б) для $\xi \approx 0.32$ - выше границы стохастичности (см. рис. 2)

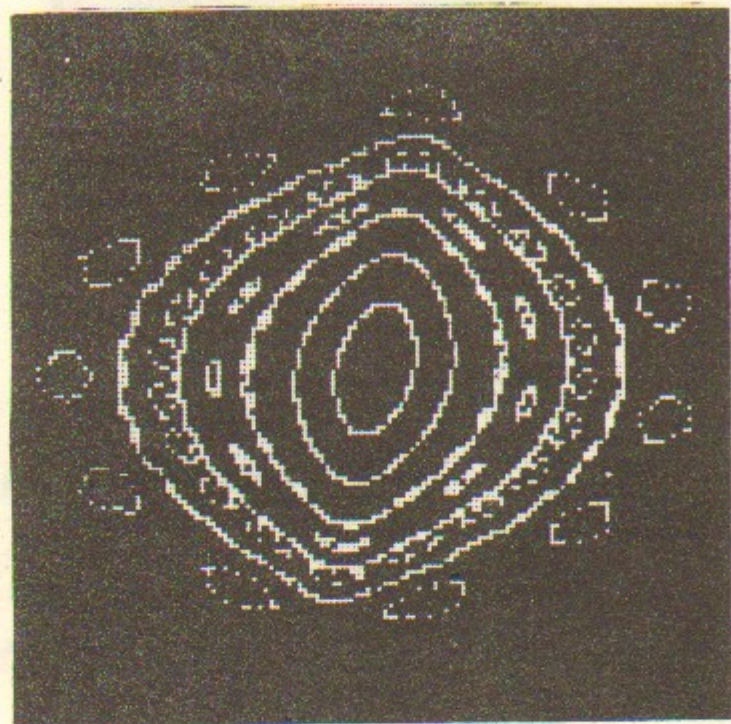


Рис.8а, $\xi \approx 0.12$

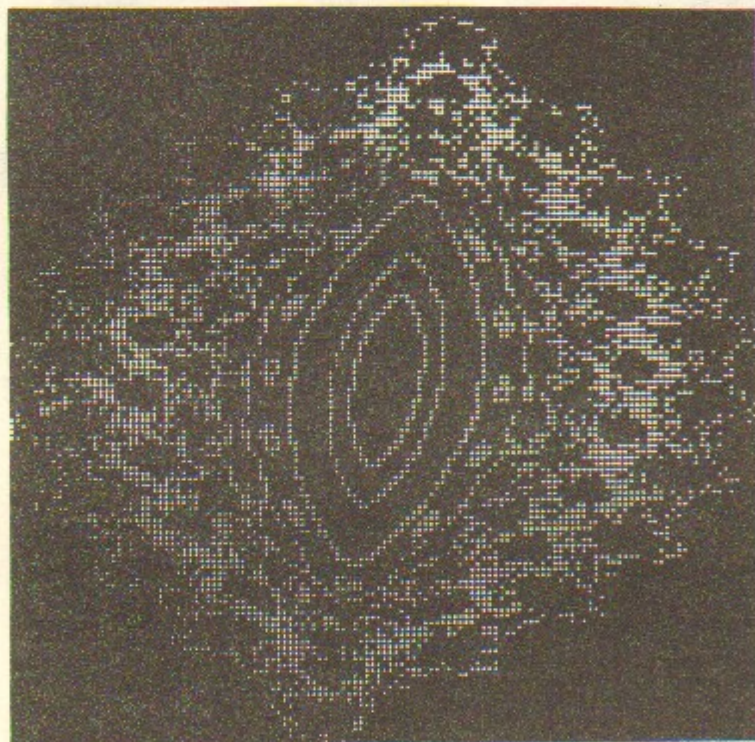


Рис.8б $\xi \approx 0.24$

То же, что на рис.7 (цилиндрический пучок - для $\{M/\kappa\} \approx 0,08$)



Рис.9а, $\xi \approx 0,12$



Рис.9б $\xi \approx 0.24$

То же, что на рис.7 (цилиндрический пучок - для $\{M/\kappa\} \approx 0.12$)

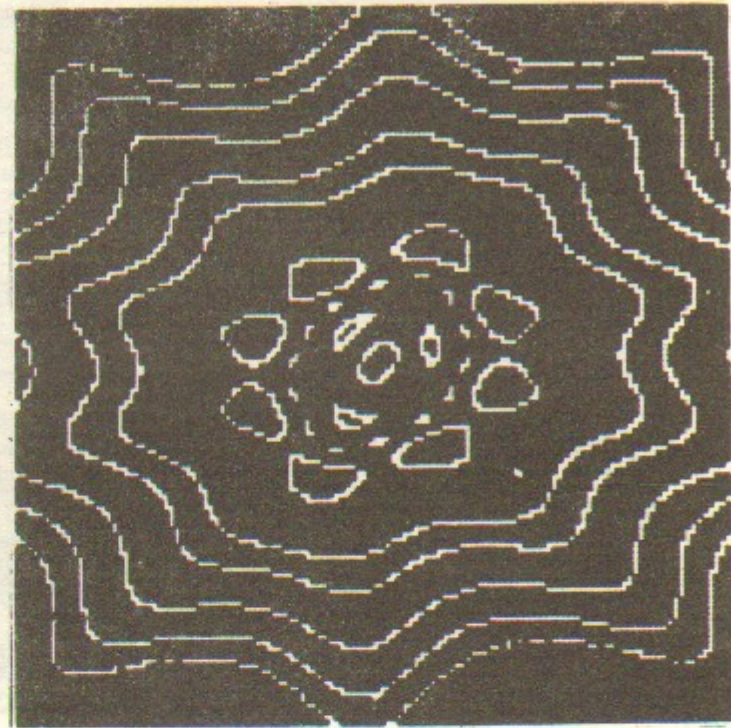


Рис. 10а $\xi \approx 0.12$

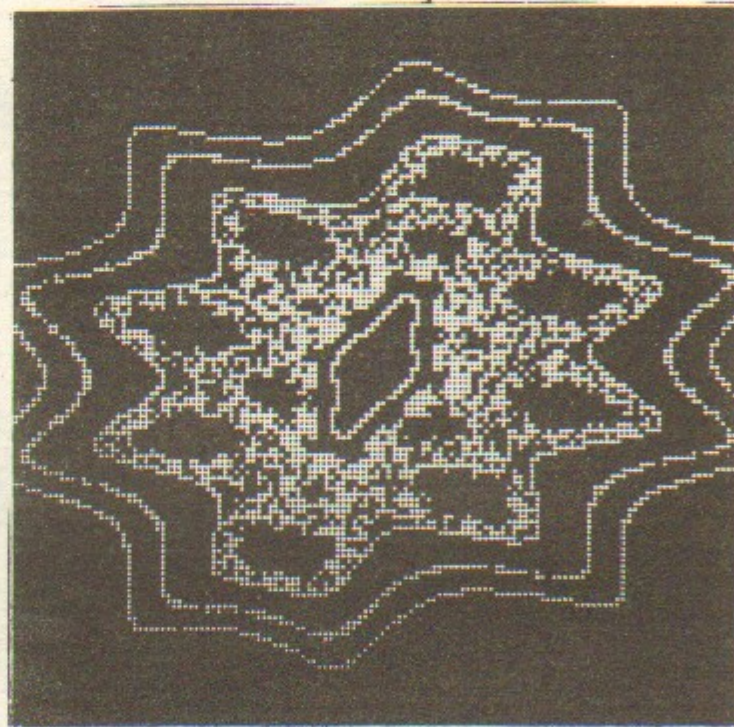


Рис. 10б $\xi \approx 0.24$

То же, что на рис. 7 (цилиндрический пучок - для $\{r/\pi\} \approx 0.20$)

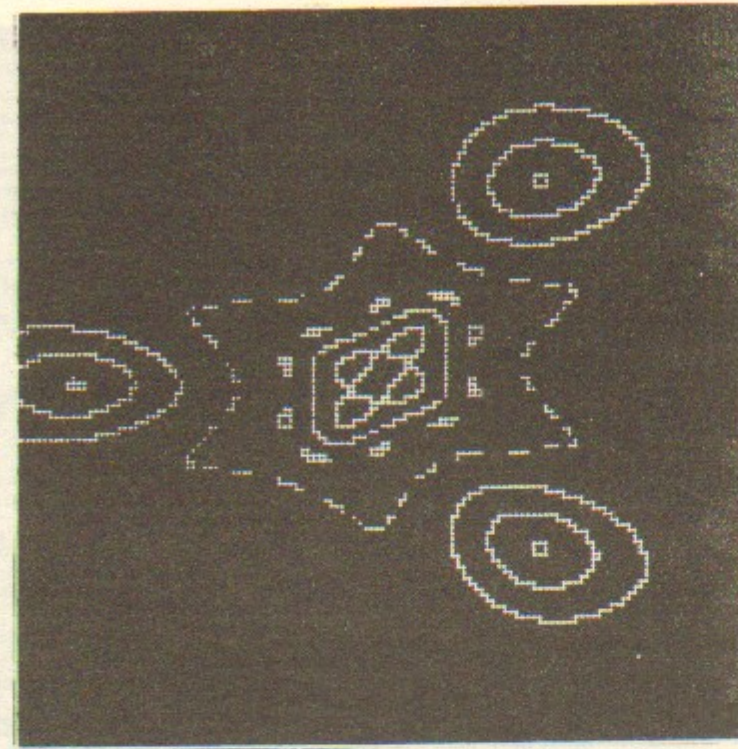


Рис. 11а $\xi \approx 0.12$

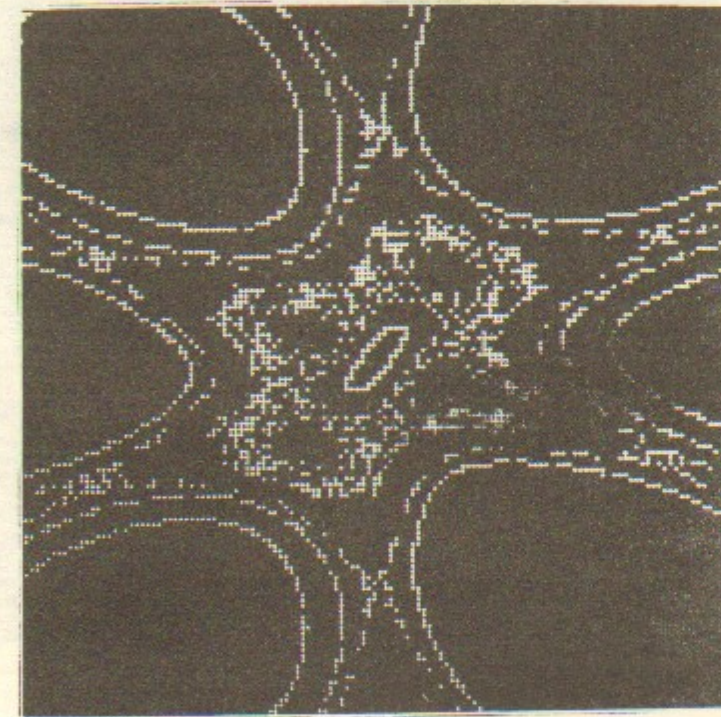


Рис. 11б $\xi \approx 0.24$

То же, что на рис. 7 (цилиндрический пучок - для $\{r/\pi\} \approx 0.32$)

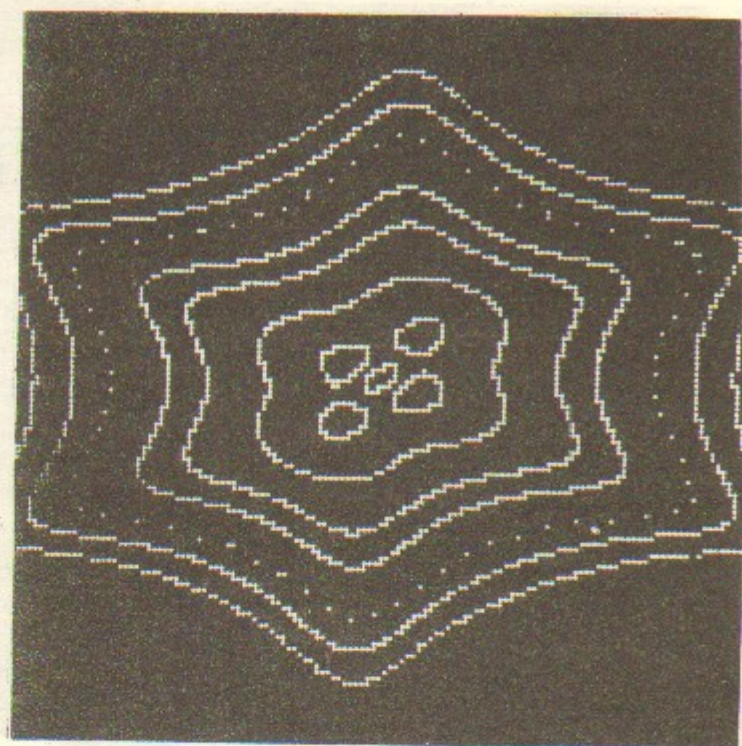


Рис. 12а $\xi \approx 0.12$

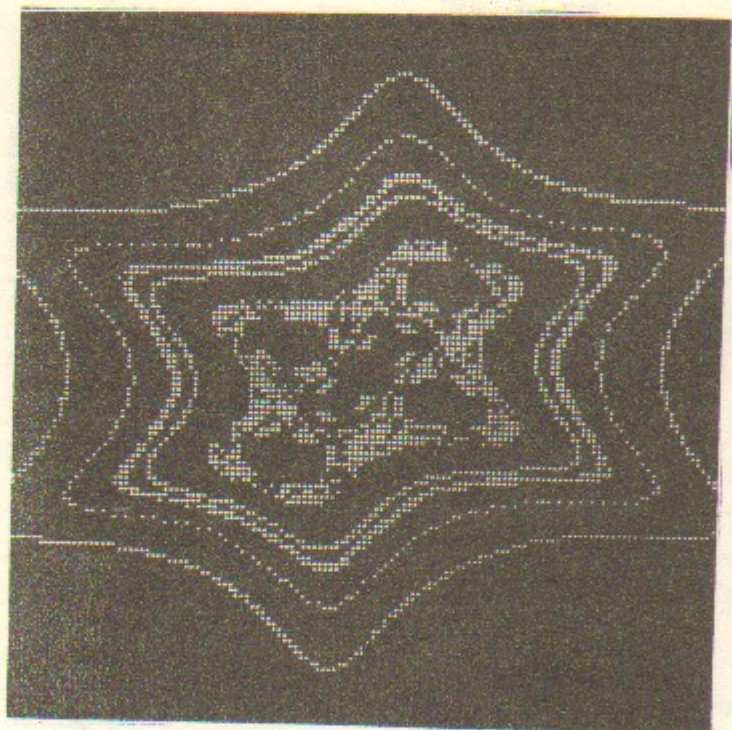


Рис. 12б $\xi \approx 0.24$

То же, что на рис. 7 (цилиндрический пучок - для $\{N_{\Gamma}\} \approx 0.34$)

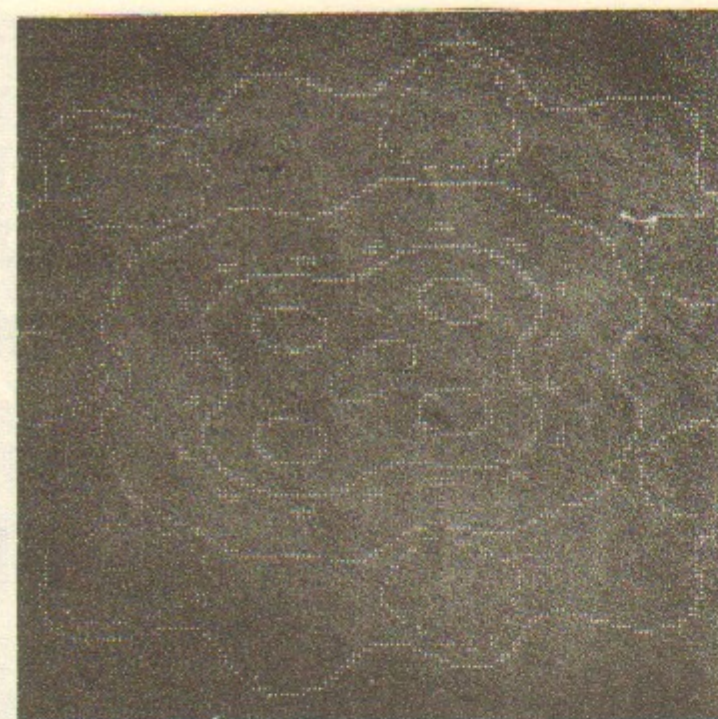


Рис. 13 а 0.12

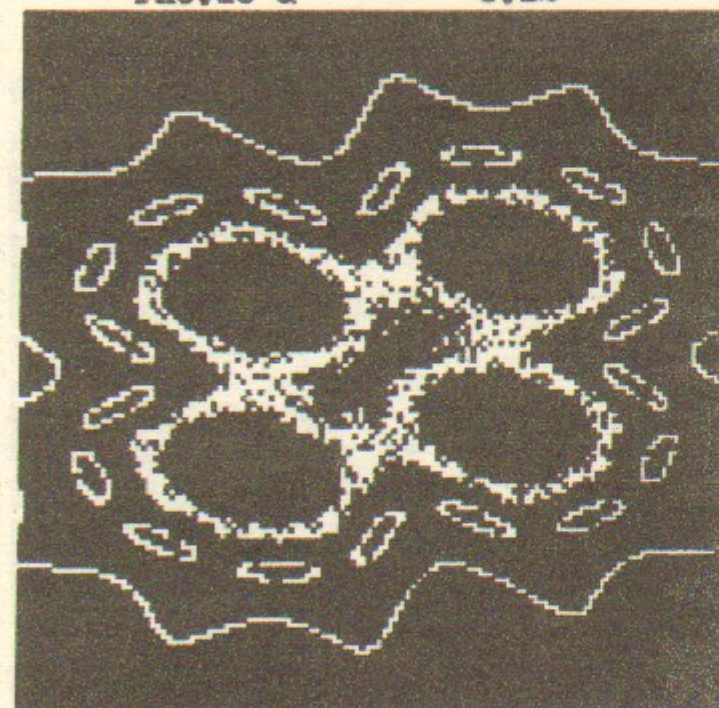


Рис. 13б 0.24

То же, что на рис. 7 (цилиндрический пучок - для 0.42)

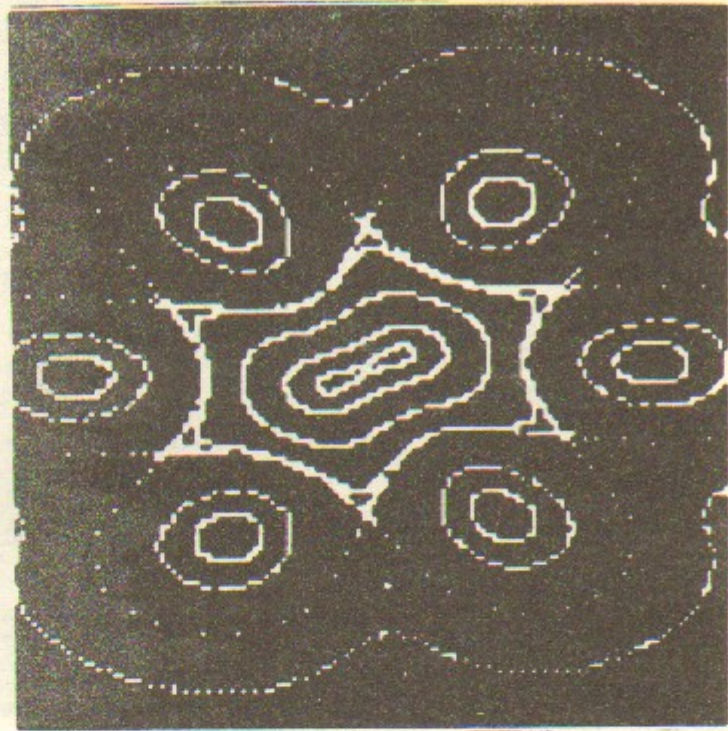


Рис. 14а $\xi \approx 0.12$

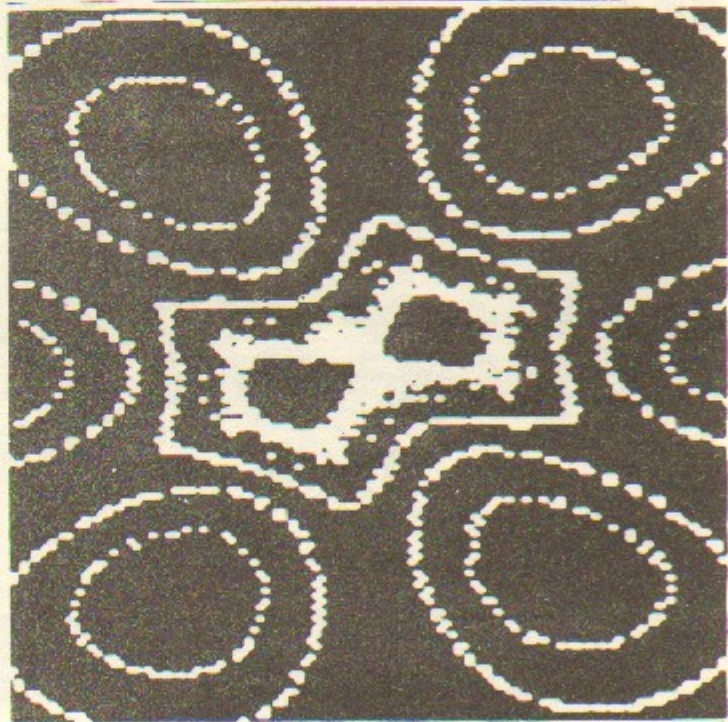


Рис. 14б $\xi \approx 0.24$

То же, что на рис. 7 (цилиндрический пучок - для $\{1/\pi\} \approx 0.65$)

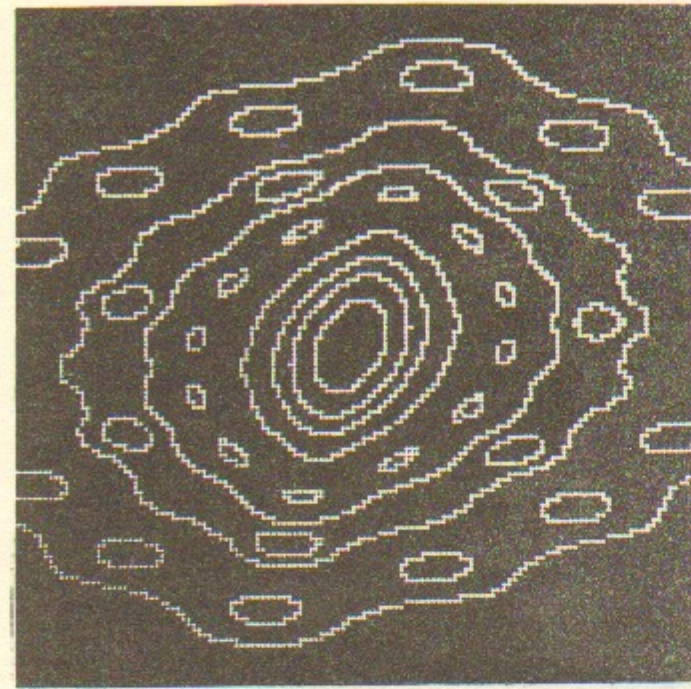


Рис. 15а $\xi \approx 0.20$

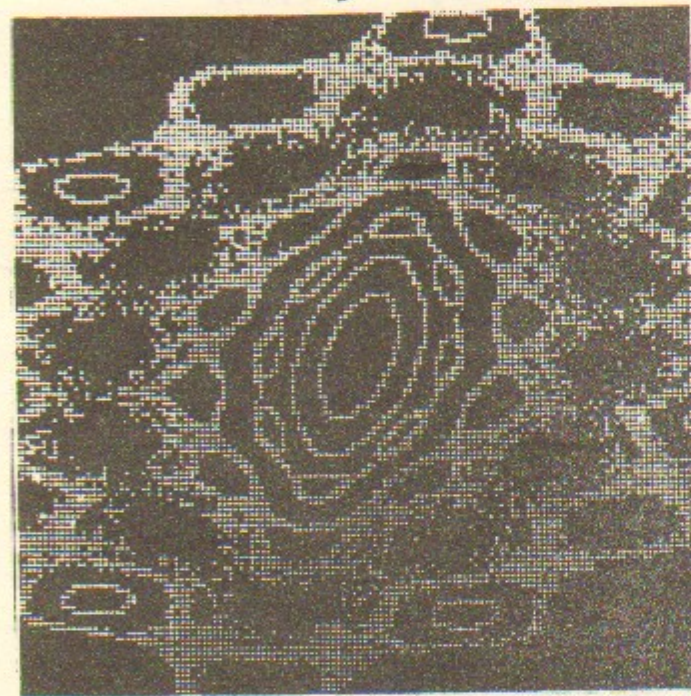


Рис. 15б $\xi \approx 0.32$

Ленточный пучок; $X_{\max} = 10$, $P_{\max} = 25$. Рис. (а) - для $\xi < \xi_{\text{кр}}$ ниже границы стохастичности, рис. (б) - для $\xi > \xi_{\text{кр}}$ выше границы стохастичности; $\{1/\pi\} \approx 0.08$

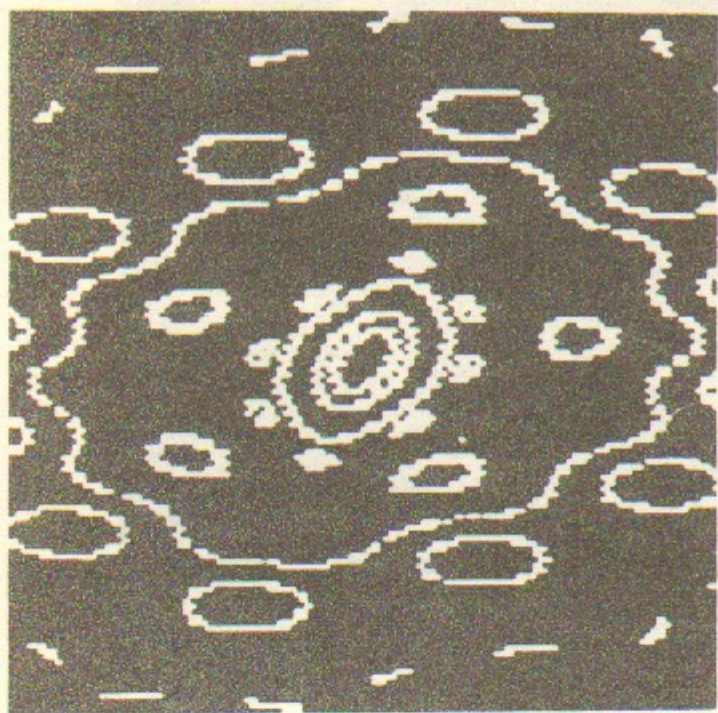


Рис. 16а $\xi \approx 0.20$

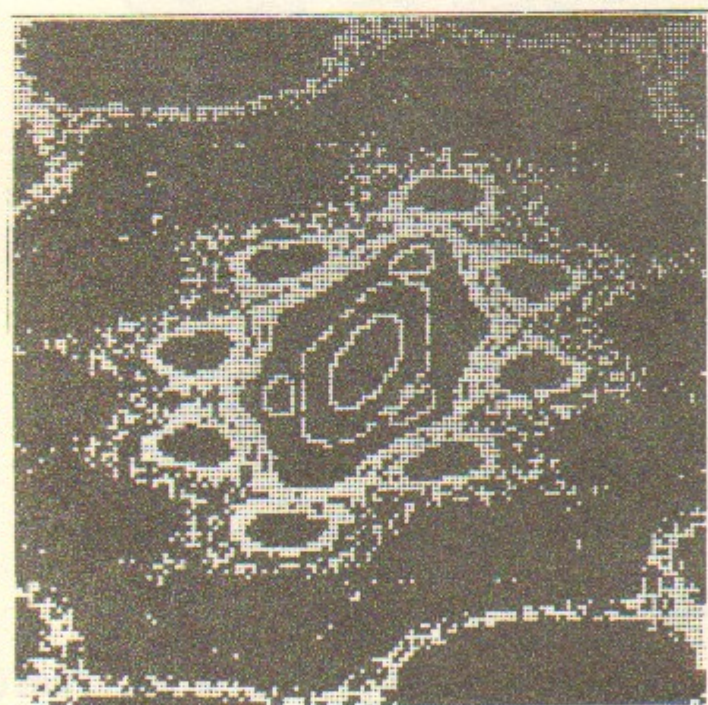


Рис. 16б $\xi \approx 0.32$

То же, что на рис. 15 (ленточный пучок - для $\{\frac{1}{4}\} \approx 0.12$)

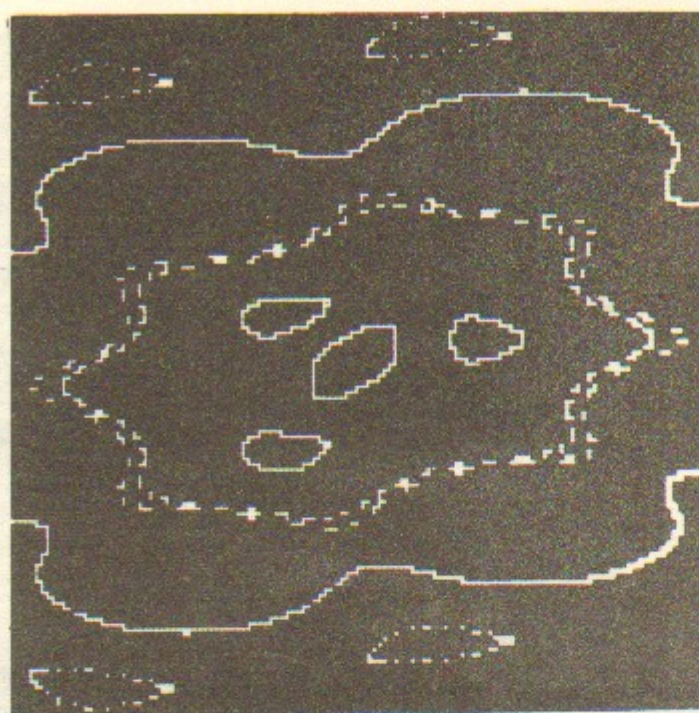


Рис. 17а $\xi \approx 0.20$

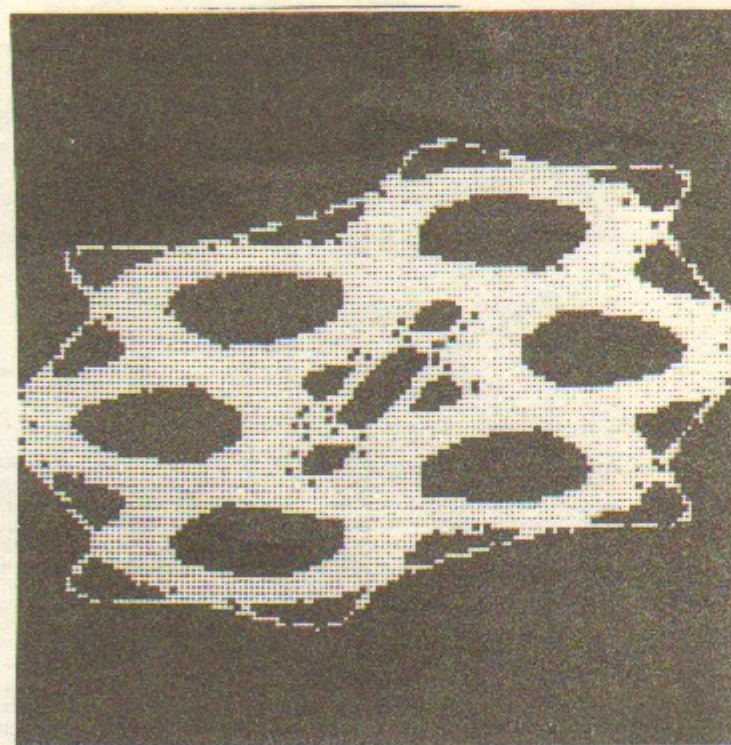


Рис. 17б $\xi \approx 0.32$

То же, что на рис. 15 (ленточный пучок - для $\{\frac{1}{4}\} \approx 0.20$)

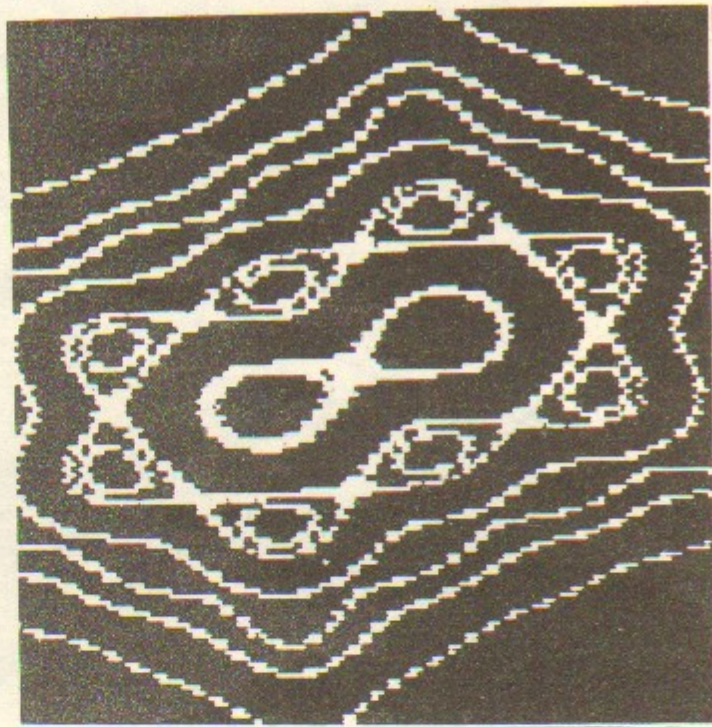


Рис.18а $\xi \approx 0.20$

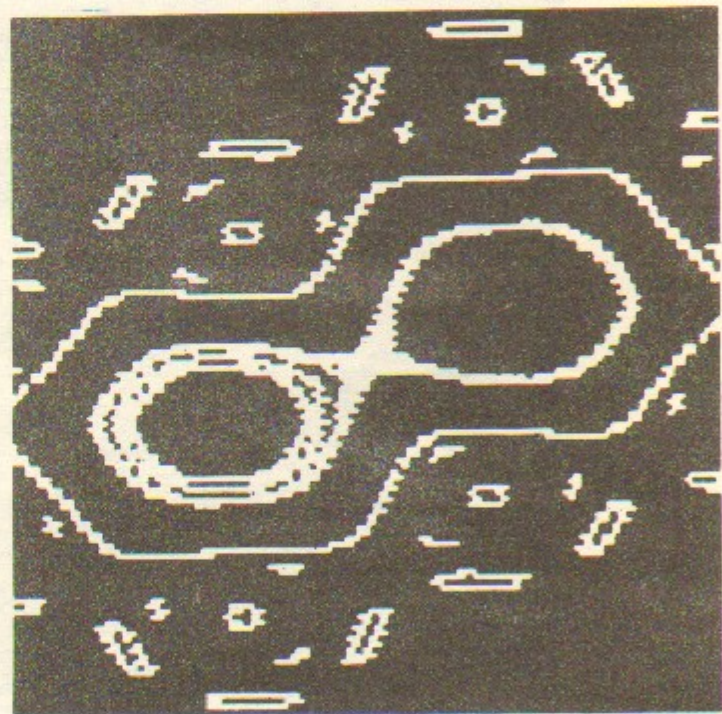


Рис.18б $\xi \approx 0.32$

То же, что на рис.15 (ленточный пучок - для $\{N/\pi\} \approx 0.65, \rho_{\max} = 15$)

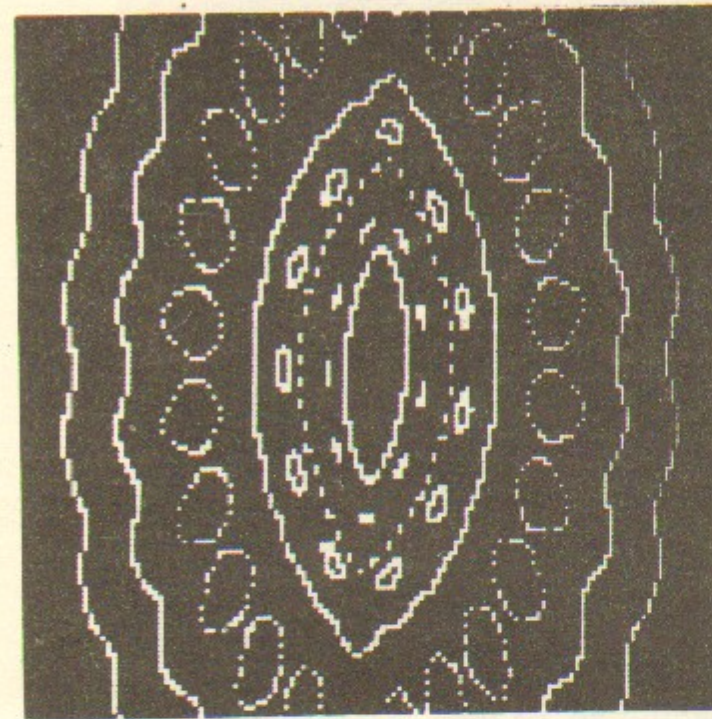


Рис.19а - цилиндрический пучок $\xi \approx 0.10$

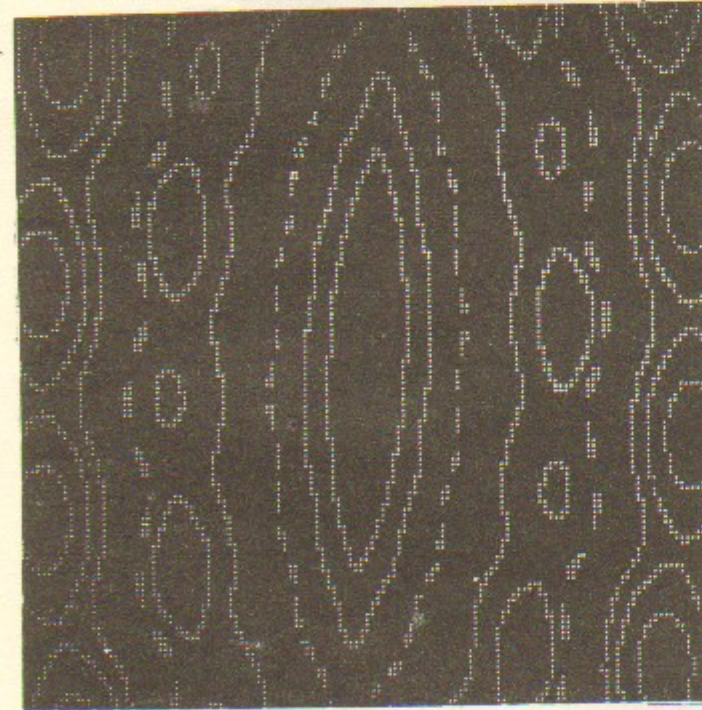


Рис.19б - ленточный пучок $\xi \approx 0.20$

Сравнение фазовой плоскости для цилиндрического и ленточного пучка при одной и той же плотности частиц в центре ниже границы стохастичности (с увеличенным масштабом $X_{\max} = 30, \rho_{\max} = 15, \{N/\pi\} \approx 0.08$)

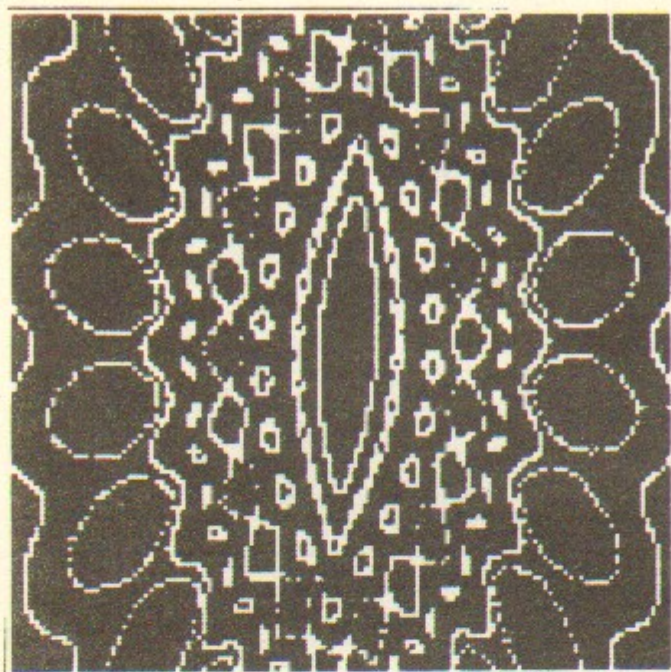


Рис.20а -цилиндрический пучок, $\xi \approx 0,20$

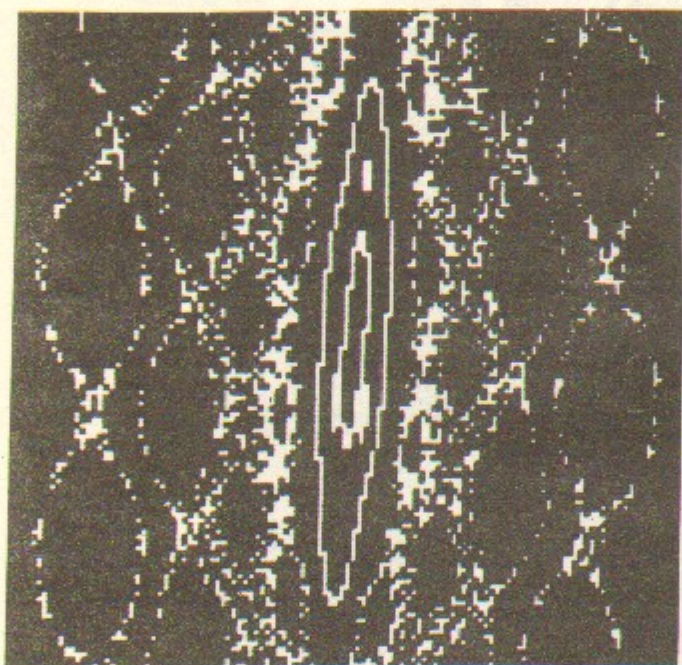


Рис.20б - ленточный пучок, $\xi \approx 0,40$
 Сравнение фазовой плоскости цилиндрического и ленточного пучков при одной и той же плотности частиц в центре выше границы стохастичности (с увеличенным масштабом $X_{max} = 30$, $P_{max} = 15$, $\{1/\xi\} \approx 0,08$)

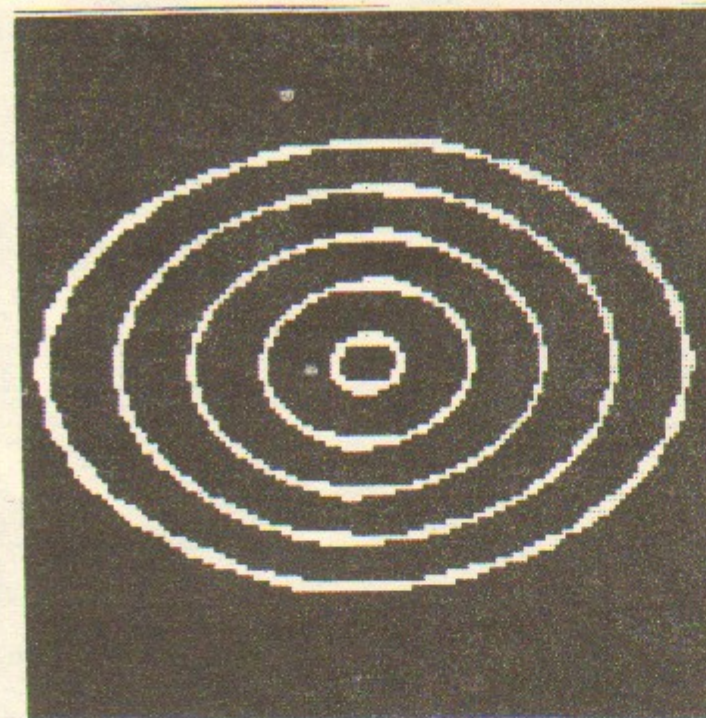


Рис.21а $\xi = 0,08$

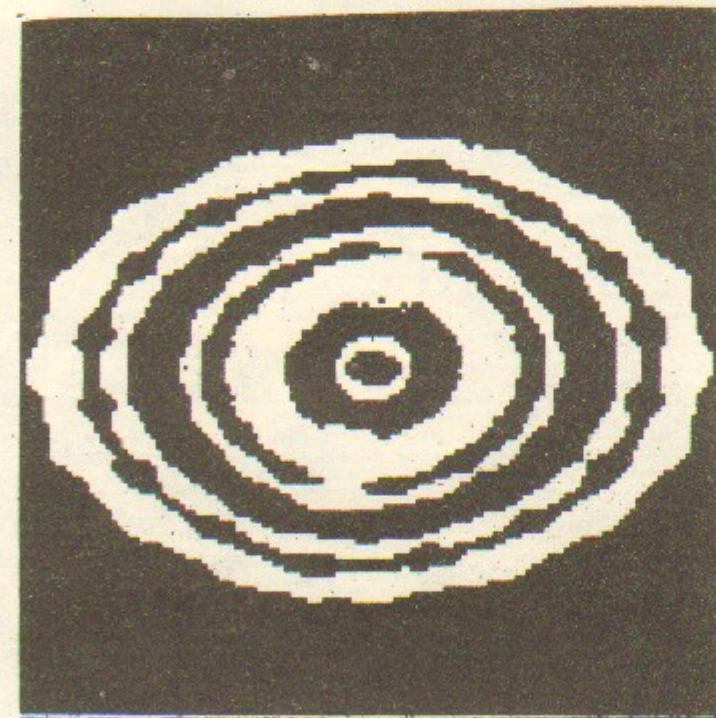


Рис.21б $\xi \approx 0,04$

Цилиндрический пучок при наличии модуляции типа (3.1), $X_{max} = 10$, $P_{max} = 15$, $\{1/\xi\} \approx 0,12$; $\gamma = 1,5$, $\nu_c = 0,01$. Рис. (а) - для $\xi < \xi_{кр}$ - ниже границы стохастичности, рис. (б) - для $\xi > \xi_{кр}$ - выше границы стохастичности (см.рис.2).

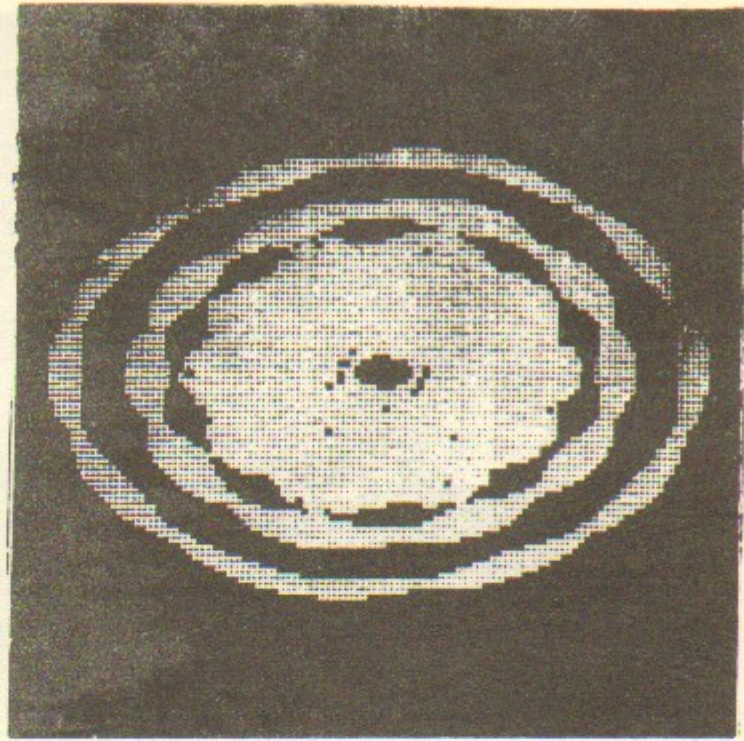


Рис.22а $\xi \approx 0.04$, $\{1/\xi\} \approx 0.18$

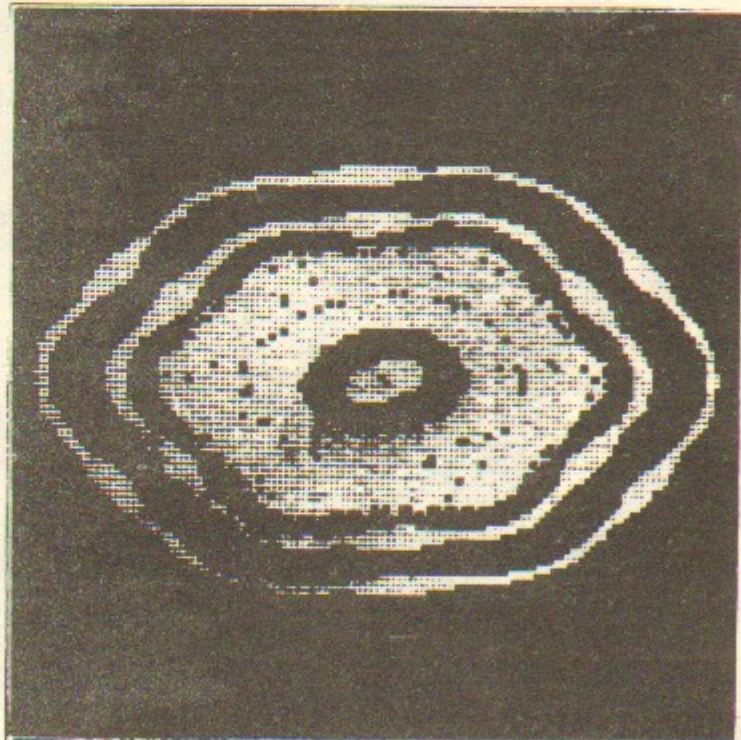


Рис.22б $\xi \approx 0.04$, $\{1/\xi\} \approx 0.65$

То же, что на рис.21 (цилиндрический пучок с модуляцией)
- для $\xi > \xi_{кр}$

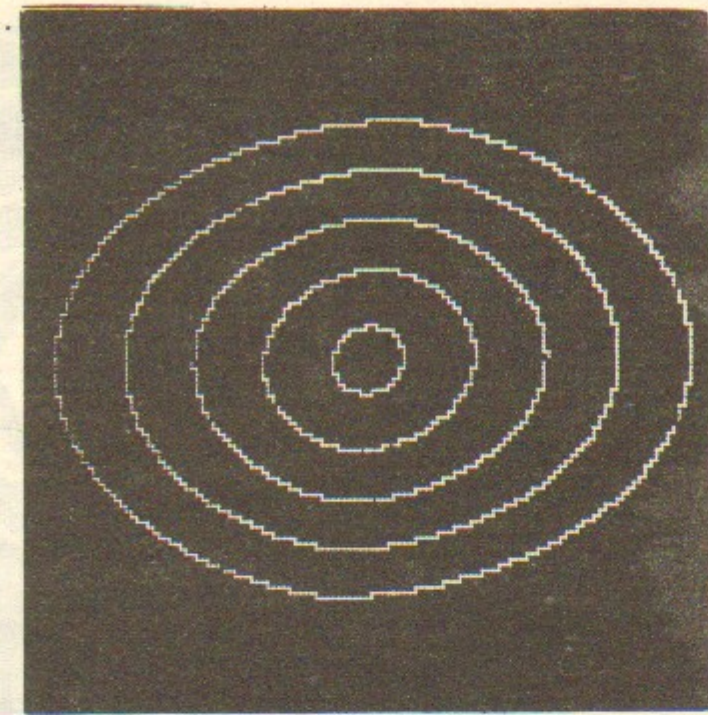


Рис.23а $\xi \approx 0.012$

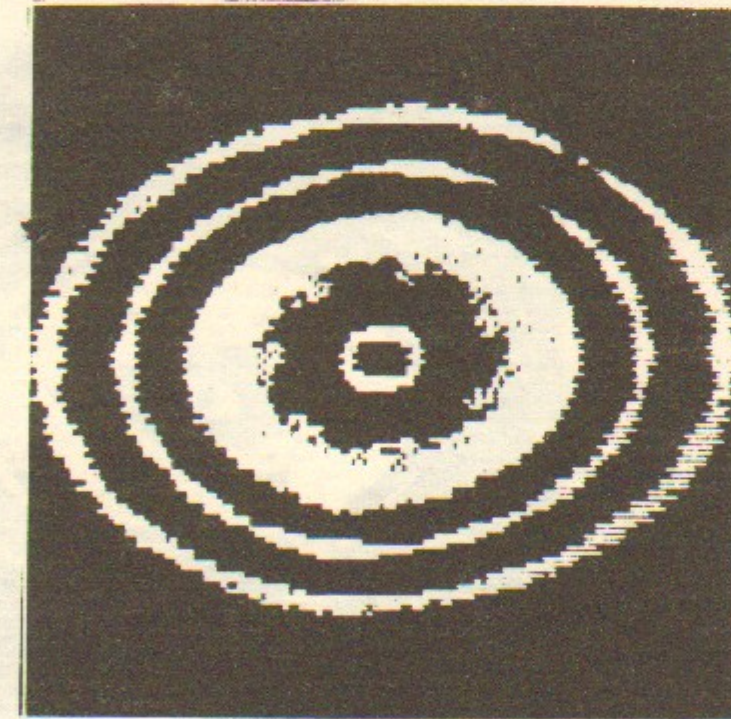


Рис.23б $\xi \approx 0.022$

Ленточный пучок при наличии модуляции $X_{max}=10$,
 $\Phi_{max}=15$, $\{1/\xi\} \approx 0.12$, $\sqrt{\xi} = 0.01$. Рис.(а) -
для $\xi < \xi_{кр}$ - ниже границы стохастичности, рис.(б) -
- для $\xi > \xi_{кр}$ - выше границы стохастичности (см.рис.5)

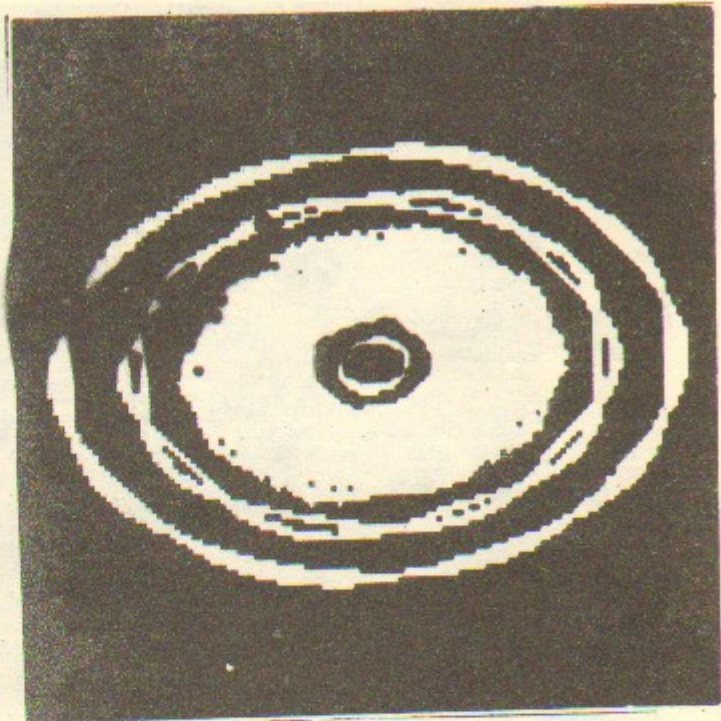


Рис.24а $\xi \approx 0,022$, $\left\{ \frac{1}{\xi} \right\} \approx 0,18$

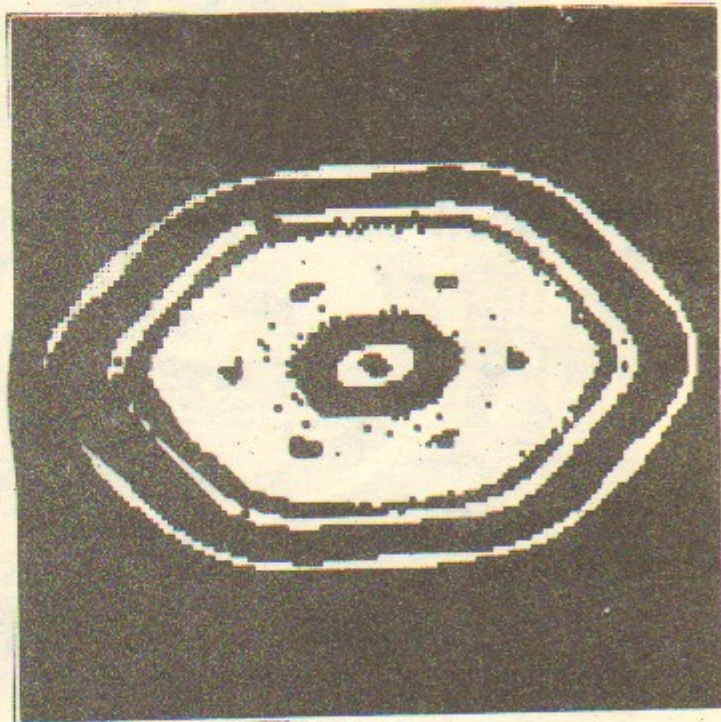


Рис.24б $\xi \approx 0,022$ $\left\{ \frac{1}{\xi} \right\} \approx 0,65$

То же, что на рис.23 (ленточный пучок с модуляцией -
для $\xi > \xi_{кр}$)

Работа поступила - 12 февраля 1977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ

Подписано к печати 9.УІ-1977г. МН 02815

Усл. 2,5 печ.л., 2,00 учетно-изд.л.

Тираж 250 экз. Бесплатно

Заказ №43.

Отпечатано на ротапринтере ИЯФ СО АН СССР