

29

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 77 - 42

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

ПОЛУЧЕНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ
ЭЛЕКТРОНОВ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ
В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Новосибирск

1977

ПОЛУЧЕНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ
ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрено явление поляризации электронов сверхвысокой энергии при прохождении ими мегагауссного магнитного поля. Поляризация возникает из-за зависимости вероятности магнитотормозного излучения от проекции спина на направление поля, что, в конечном счете приводит к пространственному разделению частиц с разными значениями указанной проекции. Проблема сводится к изучению соответствующих кинетических уравнений, которые решались как в приближении Фоккера-Планка, так и с большей точностью, что позволило выяснить область применимости метода и учесть такие качественные эффекты, как радиационная поляризация пучка в целом, уточнить значение степени поляризации. Величина последней приводится для реалистических значений входящих параметров.

І. В В Е Д Е Н И Е

Использование поляризованных электронов и позитронов существенно расширяет возможности опытов в области высоких энергий. Ярким примером этого являются результаты, полученные на накопителе со встречными электрон-позитронными пучками **SPEAR** (в котором действует механизм радиационной поляризации), где использование поляризованных частиц позволило с хорошей точностью выделить вклады виртуальных фотонов с поперечной (σ_{\perp}) и продольной поляризацией (σ_{\parallel}) в инклюзивное сечение рождения адронов, а также сыграло определяющую роль в обнаружении струй адронов в реакции $e^{-} + e^{+} \rightarrow \text{адроны}$ /1/. Оба результата весьма важны для понимания партонной картины. Несомненный интерес представляло бы использование поляризованных электронов в опытах на покоящейся мишени, в частности, для изучения глубоконеупругого рассеяния, а также эффектов слабого взаимодействия.

Создание поляризованных пучков в области очень высоких энергий, где использование накопителей встречает серьезные технические трудности, представляет весьма сложную задачу, особенно в случаях, когда используются вторичные пучки ускорителей. В данной работе показано, что при очень высоких энергиях существует способ создания пучков поляризованных электронов и позитронов, основанный на том, что при прохождении через сильные магнитные поля частицы с разной проекцией спина ζ на направление магнитного поля пространственно разделяются вследствие зависимости вероятности излучения от указанной проекции.

Эффект становится заметным уже при $\chi \sim 0,05$. Параметр

$$\chi = \chi(\varepsilon) = \frac{H}{H_0} \frac{\varepsilon}{m} \quad (1.1)$$

где H - магнитное поле, $H_0 = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} = 4,41 \cdot 10^{13}$ э, ε - энергия электрона, m - его масса, служит для описания квантовых свойств магнитотормозного излучения. При энергии электронов 250 ГэВ (вторичные пучки ускорителей *FNAL, CERN II*) для получения $\chi \sim 0,05$ необходимо магнитное поле ~ 4 Мггс. Такого рода мегагауссные поля в малых объемах и на короткие времена получают в настоящее время взрывным способом. Подобные устройства, называемые магнитными конвертерами, многократно обсуждались в литературе (см., например, /2/). Предлагаемый способ существ-

венно расширяет возможности магнитных конвертеров, поскольку в них могут быть использованы как жесткие фотоны (максимум спектрального распределения которых для $\chi \ll 1$ лежит при $\omega \sim \epsilon \chi$), так и вторичные электроны, что представляет интерес, особенно если учесть сложность получения электронов сверхвысоких энергий.

Для анализа эффекта поляризации необходимо рассмотреть задачу прохождения электрона через магнитное поле с учетом излучения в зависимости от проекции спина λ , угла отклонения электрона в поле φ и энергии ϵ на глубине t . Для этого необходимо решить кинетические уравнения для функций $\rho_{\lambda}(\epsilon, \varphi, t)$. В разделе 2 приведена корректная форма кинетических уравнений, ранее не использовавшаяся в литературе, проведено преобразование этих уравнений в форму, удобную для решения их в приближении $\chi \ll 1$ и найдено решение в приближении Фоккера-Планка, в конце раздела рассмотрена структура отброшенных членов. В разделе 3 функция распределения изучена с учетом членов более высокого порядка. В разделе 4 проведен анализ угловых распределений и поляризации пучка при $\chi = 0,05$ и $\chi = 0,1$. В приложении получены моменты распределений, содержащие важную информацию о характеристиках пучка электронов при прохождении через магнитное поле.

2. Кинетические уравнения, функция распределения в низшем порядке.

Как известно, см., напр., /3/, магнитотормозное излучение ультрарелятивистских частиц сосредоточено в узком конусе с углом раствора $\sim \frac{m}{\epsilon}$ по отношению к направлению движения частицы. С этой точностью можно пренебречь изменением поперечных составляющих импульса частицы в процессе излучения, тогда в случае, когда начальная скорость частицы перпендикулярна магнитному полю, задача о движении заряженной частицы в однородном магнитном поле становится плоской, причем непосредственное изменение азимутального угла φ , характеризующего направление импульса частицы в плоскости ее движения, происходит только за счет воздействия магнитного поля на движение частицы. Это обстоятельство позволяет написать уравнения для функций распределения в зависимости от энергии ϵ , азимутального угла φ , спиновой переменной $\lambda = \pm 1$, характеризующей поляризацию частицы на направление

магнитного поля, и времени (глубины) t в виде^{*}

$$\frac{\partial \rho_{\lambda}(\epsilon, \varphi, t)}{\partial t} + \frac{eH}{\epsilon} \frac{\partial \rho_{\lambda}(\epsilon, \varphi, t)}{\partial \varphi} = - \int W_{\lambda}(\epsilon', \epsilon) \rho_{\lambda}(\epsilon, \varphi, t) d\epsilon' + (2.1)$$

$$+ \int W_{\lambda}(\epsilon, \epsilon') \rho_{\lambda}(\epsilon', \varphi, t) d\epsilon' + \int W_{-\lambda, \lambda}(\epsilon, \epsilon') \rho_{-\lambda}(\epsilon', \varphi, t) d\epsilon' - \int W_{\lambda, -\lambda}(\epsilon, \epsilon') \rho_{\lambda}(\epsilon', \varphi, t) d\epsilon'$$

здесь $W_{\lambda}(\epsilon', \epsilon)$ - плотность вероятности перехода электрона из состояния с энергией ϵ и спином λ в состояние с энергией ϵ' , просуммированная по конечным спиновым состояниям; $W_{-\lambda, \lambda}(\epsilon', \epsilon)$ - плотность вероятности перехода электрона из состояния с энергией ϵ и спином λ в состояние с энергией ϵ' и спином $-\lambda$ (см., напр., /3/):

$$W_{\lambda}(\epsilon', \epsilon) d\epsilon' = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{3}\pi\epsilon} \frac{du}{(1+u)^2} \left[\int_{\frac{2u}{3x}}^{\infty} K_{5/3}(y) dy + \frac{u^2}{1+u} K_{3/2}\left(\frac{2u}{3x}\right) - \right. (2.2)$$

$$\left. - \lambda \frac{u}{1+u} K_{1/2}\left(\frac{2u}{3x}\right) \right] \equiv W_{\lambda}(u, \epsilon) du,$$

$$W_{-\lambda, \lambda}(\epsilon', \epsilon) d\epsilon' = \frac{\alpha m^2}{2\sqrt{3}\pi\epsilon} \frac{u^2 du}{(1+u)^3} \left[K_{2/3}\left(\frac{2u}{3x}\right) + \right. (2.3)$$

$$\left. + \lambda K_{1/3}\left(\frac{2u}{3x}\right) \right] \equiv W_{-\lambda, \lambda}(u, \epsilon) du$$

где $u = \frac{\epsilon - \epsilon'}{\epsilon}$, $K_{\nu}(x)$ - функции Макдональда.

Уравнения (2.1) справедливы в области $\chi \ll 1$, в которой вероятность рождения пары фотоном в магнитном поле экспоненциально подавлена. Следует отметить, что использовавшееся ранее (см. /4,5/) кинетическое уравнение для $\sum_{\lambda} \int d\varphi \rho_{\lambda}(\epsilon, \varphi, t)$ фактически справедливо лишь в первом порядке разложения по степеням χ , поскольку в нем не учитывались спиновые корреляционные члены.

Если известно решение уравнения (2.1) с начальными условиями

$$\rho_{\lambda}(\epsilon, \varphi, 0) = \delta(\epsilon - \epsilon_0) \delta(\varphi - \varphi_0) (2.4)$$

то решение с начальными условиями общего вида $\rho_{\lambda}^{(q)}(\epsilon, \varphi, 0) = \rho_{(\epsilon_0)}^{(q)}(\epsilon, \varphi)$ можно представить следующим образом

$$\rho_{\lambda}^{(q)}(\epsilon, \varphi, t) = \int \rho_{\lambda}(\epsilon, \varphi, t; \epsilon_0, \varphi_0) \rho_{(\epsilon_0)}^{(q)}(\epsilon_0, \varphi_0) d\varphi_0 d\epsilon_0 (2.5)$$

В дальнейшем везде, где это допустимо, мы полагаем $\varphi_0 = 0$.

Найти решение уравнения (2.1) с начальными условиями (2.4) в аналитическом виде не представляется возможным. В важном для приложений случае, когда $\chi_0 \equiv \chi(\epsilon_0) = \frac{H}{H_0} \frac{\epsilon_0}{m} \ll 1$, можно провести разложение входящих в (2.1), (2.2), (2.3) величин по степе-

ням $x \leq x_0$. При этом уравнение (2.1) принимает следующий вид (подобная процедура применялась в [4/])

$$\frac{\partial \rho_{\pm}(\varepsilon, \varphi, t)}{\partial t} + \frac{eH}{\varepsilon} \frac{\partial \rho_{\pm}(\varepsilon, \varphi, t)}{\partial \varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n} \cdot$$

$$\cdot [w_{\pm}^{(n)}(\varepsilon) \rho_{\pm}(\varepsilon, \varphi, t) + w_{\pm, -\pm}^{(n)}(\varepsilon) \rho_{-\pm}(\varepsilon, \varphi, t) -$$

$$- w_{-\pm, \pm}^{(n)}(\varepsilon) \rho_{\pm}(\varepsilon, \varphi, t)] + w_{\pm, -\pm}^{(0)}(\varepsilon) \rho_{-\pm}(\varepsilon, \varphi, t) - w_{-\pm, \pm}^{(0)}(\varepsilon) \rho_{\pm}(\varepsilon, \varphi, t)$$
(2.6)

здесь $w^{(n)}(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} W(\varepsilon', \varepsilon) (\varepsilon - \varepsilon')^n d\varepsilon' = \varepsilon^n \int_0^1 W(u, \varepsilon) \frac{u^n du}{(1+u)^n}$ (2.7) где $W(\varepsilon, \varepsilon')$ есть $W_{\pm}(\varepsilon', \varepsilon)$ или $W_{\pm, -\pm}(\varepsilon', \varepsilon)$. Приведем главные члены разложения величин $w^{(n)}(\varepsilon)$ по параметру x , которые понадобятся нам в дальнейшем

$$w^{(n)}(\varepsilon) = \varepsilon_0^{n-1} I_c(\varepsilon_0) \tilde{w}^{(n)}(z)$$

$$\tilde{w}_{\pm}^{(1)} = z^2(1 + a_1 z + a_2 z^2), \quad \tilde{w}_{\pm}^{(2)} = z^4(b_1 + b_2 z),$$

$$\tilde{w}_{\pm}^{(3)} = z^6(c_1 + c_2 z), \quad \tilde{w}_{\pm}^{(4)} = z^8 d_1, \quad \tilde{w}_{\pm}^{(5)} = z^{10} e_1;$$
(2.8)

$$a_1 = -\left(6c + \frac{3}{2}z\right) x_0, \quad a_2 = \left(48 + \frac{25z}{11} c z\right) x_0^2,$$

$$b_1 = 2c x_0, \quad b_2 = -\left(28 + \frac{63}{11} c z\right) x_0^2, \quad c_1 = z x_0^2,$$

$$c_2 = -\left(\frac{35z}{2} c + 30z\right) x_0^3, \quad d_1 = \frac{35z}{10} c x_0^3, \quad e_1 = \frac{200}{3} x_0^4;$$

$$\tilde{w}_{-\pm, \pm}^{(1)} = z^4\left(3 + \frac{63}{22} c z\right) x_0^2, \quad \tilde{w}_{-\pm, \pm}^{(0)} = z^2\left(\frac{9}{11} c + \frac{3}{4} z\right) x_0$$

где $z = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$, $I_c(\varepsilon_0) = \frac{2}{3} \alpha m^2 x_0^2$, $c = \frac{55\sqrt{3}}{96}$ (2.9)

Рассмотрим теперь уравнение (2.6) в приближении Фоккера - Планка, в коэффициентах которого сохраним старшие члены разложения по степеням x_0 . Тогда уравнение (2.6) принимает вид

$$\frac{\partial \rho_{\pm}(z, \varphi, z)}{\partial z} + \frac{\beta}{z} \frac{\partial \rho_{\pm}(z, \varphi, z)}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} [z^2(1 + a_1 z) \rho_{\pm}] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (z^4 b_1 \rho_{\pm}),$$

где $z = I_c(\varepsilon_0) t / \varepsilon_0$, $\beta = eH / I_c(\varepsilon_0)$ (2.11)

Из уравнений (2.10) непосредственно следует, что в этом приближении число частиц с заданным z остается постоянным, так что система уравнений (2.10) диагональна по переменной $z = \pm 1$.

Введем переменную x , связанную с z следующим соотношением

$$x = x(z) = \frac{1}{z} - 1 + A_1 \ln z; \quad \frac{1}{z} \approx 1 + x + A_1 \ln(1+x);$$

$$A_1 = a_1 + b_1$$
(2.12)

и новую функцию

$$F(x, \varphi, z) = \rho(z(x), \varphi, z) \left| \frac{dz}{dx} \right| \varepsilon_0 \beta$$
(2.13)

Сохраняя старшие по x_0 члены, имеем для $F(x, \varphi, z)$ следующее уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \beta(1+x+A_1 \ln(1+x)) \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{b_1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial x}$$
(2.14)

с начальным условием $F(x, \varphi, 0) = \delta(x) \delta'(\varphi/\beta)$. Если в уравнении (2.14) положить $A_1 = b_1 = 0$, то полученному уравнению будет удовлетворять функция $F(x-z, \varphi - \beta(z + \frac{z^2}{2} + z(x-z)))$, что для приведенного начального условия дает классическое решение

$$F_c(x, \varphi, z) = \delta(x-z) \delta\left(\frac{\varphi}{\beta} - z - \frac{z^2}{2}\right)$$
(2.15)

Таким образом в классическом пределе $x = z$, $\varphi = \beta(z + \frac{z^2}{2})$. Отсюда ясно, что при $x_0 \rightarrow 0$ величина $x-z \rightarrow 0$, т.е. при решении уравнения (2.14) можно пользоваться разложением по величине $u = x-z$. Проводя такое разложение и сохраняя старшие члены, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \beta(u + 1 + z + A_1 \ln(1+z)) \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{b_1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$$
(2.16)

Перейдя здесь к переменной

$$\psi = \frac{\varphi}{\beta} - \int_0^z [1+t + A_1 \ln(1+t)] dt = \frac{\varphi}{\beta} - z - \frac{z^2}{2} - A_1 [(1+z) \ln(1+z) - z]$$

получим окончательную форму уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial z} + u \frac{\partial F}{\partial \psi} = \frac{b_1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}; \quad F(u, \psi, 0) = \delta(u) \delta'(\psi)$$
(2.17)

При решении этого уравнения воспользуемся преобразованием Фурье. Представим

$$F(u, \psi, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\psi e^{i\omega u + i\psi \psi} f(\omega, \psi, z) \quad (2.18)$$

тогда уравнение для $f(\omega, \psi, z)$ будет иметь следующий вид

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \psi \frac{\partial f}{\partial \omega} = -\frac{1}{2} \beta_1 \omega^2 f, \quad f(\omega, \psi, 0) = 1 \quad (2.19)$$

Решение последнего уравнения можно найти, используя метод характеристик

$$f(\omega, \psi, z) = \exp \left\{ -\frac{\beta_1}{2} \int_0^z dt [\omega + \psi(z-t)]^2 \right\} = \exp \left\{ -\frac{\beta_1}{2} [\omega^2 z + \omega \psi z^2 + \psi^2 \frac{z^3}{3}] \right\} \quad (2.20)$$

Подставляя это решение в (2.18), получим

$$F(u, \psi, z) = \frac{1}{\pi \Delta \delta} \exp \left\{ -\frac{2u^2}{\Delta^2} - \frac{2\psi^2}{\delta^2} + \frac{2\sqrt{3}}{\Delta \delta} u \psi \right\} \quad (2.21)$$

здесь $u = x - z, \quad \psi = \frac{\varphi}{\sqrt{3}} - z - \frac{z^2}{2} - A_1 [(1+z) \ln(1+z) - z],$
 $\Delta^2 = \beta_1 z, \quad \delta^2 = \beta_1 \frac{z^3}{3}$ (2.22)

Интегрирование функции распределения $F(u, \psi, z)$ по φ или u удобно проводить непосредственно в формуле (2.18), в итоге найдем

$$F(u, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega u} f(\omega, 0, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} e^{-\frac{u^2}{2\Delta^2}} \quad (2.23)$$

$$F(\psi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\psi e^{i\psi \psi} f(0, \psi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{\psi^2}{2\delta^2}}$$

Таким образом в рассматриваемом приближении распределение по угловой и энергетической переменной является гауссовым, именно в такой форме функция распределения по энергии была восстановлена в 4 по известным моментам распределения. Из полученных решений видно, что поскольку A_1 зависит от проекции спина на направление магнитного поля, то распределения для частиц с разной проекцией отличаются, поскольку являются различными соотв. средние значения энергии $\bar{\varepsilon}$ и угла $\bar{\varphi}$. Это обстоятельство приводит к тому, что неполяризованный пучок частиц, проходя через магнитное поле, становится, вообще говоря, частично поляризованным, если отбирать из него частицы в некотором интервале углов и энергий, причем степень поляризации существенно зависит от выбора этих интервалов. В работе авторов /6/ функция распределения по углу φ была восстановлена по известным моментам

распределения в порядке x_0 именно в форме (2.23), которую мы получили здесь, непосредственно решая кинетическое уравнение. Там же был проведен анализ величины эффекта в конкретных ситуациях. В данной работе мы проведем этот анализ в разделе 4 с учетом поправок высшего порядка.

Проведем оценку отброшенных членов, используя полученное нами решение. Нетрудно убедиться, что старшие по x_0 члены в разложении (2.6) при переходе к переменной x и функции $F(u, \psi, z)$ имеют вид $x_0^{n-1} \frac{\partial^n F}{\partial u^n}$. Учитывая, что в области изменения u , где функция $F(u) \sim F(0)$ имеет место $u^2 \ll \beta_1 z$, получаем

$$x_0^{n-1} \frac{\partial^n F}{\partial u^n} \sim x_0^{n-1} (\beta_1 z)^{-\frac{n}{2}} \sim \frac{1}{\sqrt{\beta_1 z}} \left(\frac{x_0}{z} \right)^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.24)$$

Отсюда следует, что фактически мы имеем дело с двумя параметрами x_0 и $\sqrt{\frac{x_0}{z}}$. Появление параметра $\sqrt{\frac{x_0}{z}}$ не случайно. Действительно, учтем, что для малых z средняя энергия излученного фотона есть $\omega \sim x_0 \varepsilon_0$, а потеря энергии частицей

$\Delta \varepsilon \sim \varepsilon_0 z$, тогда для среднего числа испущенных фотонов имеем $N \sim z/x_0$. Поскольку гауссово распределение устанавливается в случае $N \gg 1$ и $\Delta N = \sqrt{N} \ll N$, видно, что параметром, характеризующим точность "возникновения" этого распределения является величина $N^{-1/2} = \sqrt{\frac{x_0}{z}}$. Таким образом, если $x_0 \ll 1$ и $\sqrt{\frac{x_0}{z}} \gg 1$ мы должны сохранить старшие по x_0 члены во всех факторах, стоящих перед старшими производными. Тогда уравнение (2.6) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial F}{\partial z} + u \frac{\partial F}{\partial \psi} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial u^n} \quad (2.24)$$

где $\beta_n = \frac{\sqrt{3}}{2\pi x_0^2} \int_0^{\infty} u^n du \int_{2u/3x_0}^{\infty} K_{5/3}(y) dy =$
 $= \frac{\sqrt{3}}{4\pi x_0^2} \frac{(3x_0)^{n+1}}{n+1} \Gamma\left(\frac{n+2}{2} + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{6}\right)$ (2.25)

Подставляя в (2.24) преобразование Фурье (2.18) имеем для $f(\omega, \psi, z)$ следующее уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \psi \frac{\partial f}{\partial \omega} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i\omega)^n}{n!} \beta_n f = \frac{\mu(\omega) f}{x_0} \quad (2.26)$$

здесь

$$\mu(\omega) = \frac{1}{\sqrt{3} x_0^2 \pi} \int_0^\infty du \left[\frac{i}{\omega} (e^{-i\omega u} - 1) - u + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} i\omega u^2 \right] K_{5/2} \left(\frac{2u}{3x_0} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \left[\frac{\text{sh} \left(\frac{5\delta}{3} \right)}{\text{sh} \delta \text{ch} \delta} - \frac{\varepsilon}{3} - \right. \\ \left. - \frac{i}{\sqrt{3} \text{sh} \delta} \left(\frac{\text{ch} \left(\frac{5\delta}{3} \right)}{\text{ch} \delta} - 1 - \frac{8}{9} \text{sh}^2 \delta \right) \right] \quad (2.27)$$

где $\delta = \text{arsh} (3\omega x_0 / 2)$. Решение уравнения (2.26) с начальным условием $f(\omega, \varphi, 0) = 1$ можно представить в виде

$$f = \exp \left[-\frac{1}{x_0} \int_0^z dt \mu(\omega + \gamma(z-t)) \right] \quad (2.28)$$

В итоге, имеем в этом приближении для функции распределения

$$F(u, \psi, z) = \quad (2.29) \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \exp \left\{ -\frac{1}{x_0} \int_0^z dt \mu(\omega + \gamma(z-t)) + i\omega u + i\gamma \psi \right\}$$

Анализ этого выражения показывает, что при $z/x_0 \rightarrow 0$ полученное распределение переходит в начальное условие, а при $z/x_0 \rightarrow \infty$ справедливо решение в форме (2.21), соответствующее разложению функции $\mu(\omega)$ (2.27) по степеням ωx_0 с сохранением старшего члена этого разложения. Из сказанного вытекает, что принятое приближение применимо, когда параметры x_0 и $\sqrt{\frac{x_0}{z}}$ малы. Тогда вклады высшего порядка должны являться малыми поправками к функции распределения (2.21) и при их вычислении можно пользоваться итерационной процедурой.

3. Функции распределения с учетом вкладов высших порядков.

Необходимость рассмотрения вкладов высшего порядка вытекает из следующих обстоятельств. Во-первых, в важных для приложений случаях (в которых поляризация пучков становится заметной) параметр x_0 уже не является очень малым, а разложение при $z \sim 1$, как мы видели выше, идет фактически по степеням $\sqrt{x_0}$. Во-вторых, в следующих порядках начинают проявляться новые качественные эффекты, обусловленные переходами с переворотом спина. Одним из таких эффектов является возникновение поляризации пучка

в целом при прохождении пучка неполяризованных частиц через магнитное поле (радиационная поляризация). Можно показать, что учет вкладов следующего по x_0 порядка в нормировку функций распределения, а также в дисперсию угловой и энергетической переменных приводит к поправкам $\sim x_0$ к функции распределения. При учете вкладов следующего по x_0 приближения в средние значения ε и φ необходимо учитывать поправки $\sim x_0^{3/2}$ к функции распределения. Для получения указанных выше поправок достаточно ограничиться разложениями вероятностей, даваемыми формулами (2.8). Кроме того, с нужной нам точностью имеем

$$p_{\pm}(\varepsilon, \varphi, z) - p_{-\pm}(\varepsilon, \varphi, z) \approx \quad (3.1)$$

$$\approx \frac{\partial p_{\pm}}{\partial \varphi} (\overline{\varphi}_{-\pm} - \overline{\varphi}_{\pm}) + \frac{\partial p_{\pm}}{\partial \varepsilon} (\overline{\varepsilon}_{-\pm} - \overline{\varepsilon}_{\pm})$$

где $\overline{\varphi}_{\pm}$, $\overline{\varepsilon}_{\pm}$ - средние значения угла и энергии, вычисленные в первом приближении. С учетом этого, уравнения для функции распределения p_{\pm} становятся диагональными по переменной $\lambda = \pm 1$ и имеют следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\beta}{z} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} [z^2 (1 + a_1 z + a_2 z^2) p] + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [z^4 (b_1 + b_2 z) p] + \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial z^3} [z^6 (c_1 + c_2 z) p] + \\ + \frac{1}{24} \frac{\partial^4}{\partial z^4} (z^8 d_1 p) + \frac{1}{120} \frac{\partial^5}{\partial z^5} (z^{10} e_1 p) + \frac{\partial}{\partial z} (z^4 f_1 p) + \\ + g_1 z^2 \left[\beta \delta_\varphi \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \delta_z \frac{\partial p}{\partial z} \right] + h z^2 p \quad (3.2)$$

где коэффициенты a_1, \dots, e_1 даются формулами (2.8),

$$f_1 = -\frac{63}{11} c x_0^2, \quad g_1 = \left(\frac{9}{4} - \frac{2x^2}{11} c x \right) x_0^2, \quad (3.3) \\ \delta_\varphi = \frac{z-1-\ln z}{z}, \quad \delta_z = z^2 \ln z, \quad h = -\frac{3}{2} x_0$$

Введем переменные

$$u = \frac{1}{z} - 1 - z + \lambda_1 \ln z + (\lambda_2 - \lambda_1 v_1)(z-1) + \\ + g_1 (z \ln z + 1 - z), \quad \psi = \frac{\varphi}{\beta} - \int_0^z \alpha(t) dt, \quad (3.4)$$

$$\alpha(t) = 1+t + A_1 \ln(1+t) + A_1^2 \ln(1+t)/(1+t) + (A_2 - A_1 b_1) t / (1+t) - g_1 t^2 / (1+t)^2 \quad (3.4)$$

где

$$A_1 = a_1 + b_1, \quad A_2 = a_2 + f_1 + 2b_1 + 3c_1 - A_1^2 - \frac{1}{2} A_1 b_1 \quad (3.5)$$

Если сохранить в выражениях для переменных только члены первого порядка по x_0 , то они перейдут в переменные, использованные в предыдущем разделе. Перейдем также к новой функции распределения $Q(u, \psi, z)$, связанной с ρ соотношением

$$\left(1 + \frac{hz}{1+z}\right) Q = \rho \left| \frac{dz}{du} \right| \epsilon_0 \beta \quad (3.6)$$

Проведем в уравнении (3.2) преобразование к новым функции и переменным и разложим полученные выражения по степеням u , тогда после довольно громоздких вычислений найдем следующее уравнение для $Q(u, \psi, z)$, в котором сохранены члены, дающие вклад с интересующей нас точностью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial z} + \left[u + A_1 \left(\frac{u}{1+z} - \frac{u^2}{2(1+z)^2} \right) \right] \frac{\partial Q}{\partial \psi} = \\ = - \frac{2uh}{(1+z)^3} Q + [B_1(z) + u B_2(z)] \frac{\partial^2 Q}{\partial u^2} - \\ - C(z) \frac{\partial^3 Q}{\partial u^3} + D \frac{\partial^4 Q}{\partial u^4} - \xi \frac{\partial^5 Q}{\partial u^5} \end{aligned} \quad (3.7)$$

здесь

$$\begin{aligned} B_1(z) = \frac{1}{2} \left(b_1 + \frac{2c_1 + b_2 - 2A_1 b_1}{1+z} \right), \quad B_2(z) = \frac{2A_1 b_1 - b_2 - 2c_1}{2(1+z)^2}, \\ C(z) = \frac{1}{6} \left(c_1 + \frac{c_2 + 3d_1 - 3A_1 c_1}{1+z} \right), \quad D = \frac{d_1}{24}, \quad \xi = \frac{e_1}{120} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Так же как в предыдущем разделе будем искать решение уравнения (3.7), используя преобразование Фурье:

$$Q(u, \psi, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\psi e^{i\omega u + i\psi \psi} q(\omega, \psi, z) \quad (3.9)$$

Имеют место приближенные соотношения (ср. (2.20))

$$q^{-1} \frac{\partial q}{\partial \omega} - f^{-1} \frac{\partial f}{\partial \omega} = q^{-1} \frac{\partial q}{\partial \omega} + b_1 z \left(\omega + \frac{z z}{2} \right) \sim O(x_0) \quad (3.10)$$

$$q^{-1} \frac{\partial^2 q}{\partial \omega^2} - f^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} = q^{-1} \frac{\partial^2 q}{\partial \omega^2} - b_1^2 z^2 \left(\omega + \frac{z z}{2} \right)^2 + b_1 z \sim O(x_0^{3/2})$$

учитывая которые, получаем

из (3.7) следующее уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial z} - \gamma \left(1 + \frac{A_1}{1+z} \right) \frac{\partial q}{\partial \omega} = q \Omega(\omega, \psi, z) \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(\omega, \psi, z) = \frac{i\gamma A_1 b_1 z}{2(1+z)^2} \left[1 - b_1 z \left(\omega + \frac{z z}{2} \right)^2 \right] + \\ + \frac{2ihb_1 z}{(1+z)^2} \left(\omega + \frac{z z}{2} \right) - B_1(z) \omega^2 - 2i\omega B_2(z) + \\ + i\omega^2 \left(\omega + \frac{z z}{2} \right) b_1 z B_2(z) + i\omega^3 C(z) + \omega^4 D - i\omega^5 \xi \end{aligned} \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.11) с начальным условием $q(\omega, \psi, 0) = 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} q(\omega, \psi, z) = \exp \left\{ \int_0^z dt \Omega \left(\omega + \gamma(z-t) + \gamma A_1 \ln \frac{1+z}{1+t}, \psi, t \right) \right\} \approx \\ \approx \exp \left\{ \int_0^z dt \left[\Omega \left(\omega + \gamma(z-t), \psi, t \right) + \frac{\partial \Omega \left(\omega + \gamma(z-t), \psi, t \right)}{\partial \omega} \gamma A_1 \ln \frac{1+z}{1+t} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подставляя этот результат в формулу (3.9), имеем формальное решение уравнения для функции распределения.

Интегралы в (3.9) можно, например, взять методом перевала, оставляя при этом необходимое число членов разложения. При вычислении указанных интегралов следует учесть только вклад той перевальной точки, которая соответствует полученному в разделе 2 приближению Фоккера-Планка, и пренебречь вкладом остальных. Такая ситуация с выбором нужных ветвей функции возникает, когда в уравнениях производные выше второй учитываются по теории возмущений.

Мы приведем результаты расчета для важных случаев распределения по энергетической и угловой переменной (ср. с формулой (2.23)).

Для функции распределения по u имеем

$$Q(u, z) = \frac{1 + a_5(\beta, M)}{\sqrt{2\pi} \Delta^2} \exp \left\{ - \left[\sum_{n=0}^4 a_n(\beta, M) \left(\frac{u^{(n)}}{\sqrt{2\Delta^2}} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.14)$$

где

$$\Delta^2 = 2x_0 c z, \quad u^{(1)} = x - z \quad (\text{см. формулы (2.12), (2.22)}),$$

$$\begin{aligned} a_0(\beta, \mu) &= \beta_1 + \frac{9}{2}\beta_2\mu - \frac{3}{2}\beta_3 - \frac{39}{2}\beta_4\mu + \frac{15}{4}\beta_5 + \frac{45}{2}\mu^2, \\ a_1(\beta, \mu) &= 1 - \beta_2 + 3\beta_4 - \frac{15}{2}\mu^2, \quad a_2(\beta, \mu) = -5\beta_2\mu + \beta_3 + \\ &+ \frac{75}{2}\beta_4\mu - 5\beta_5 - \frac{117}{2}\mu^2, \quad a_3(\beta, \mu) = -\beta_4 + 4\mu^2, \\ a_4(\beta, \mu) &= -11\beta_4\mu + \beta_5 + 23\mu^2, \quad a_5(\beta, \mu) = \beta_2 - \frac{3}{2}\beta_4 + \frac{3}{2}\mu^2; \\ \mu &= -\frac{z}{12} \sqrt{\frac{x_0}{c^3 z}} \\ \beta_n &= 2^{n-1} \left(\frac{1}{2\Delta^2}\right)^{\frac{n}{2}} R_n(z) x_0^2 = \frac{x_0^2}{2} \left(\frac{1}{c x_0 z}\right)^{\frac{n}{2}} R_n(z); \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} R_1(z) &= \frac{5z}{2(1+z)} (8c^2 - 9 - \frac{25}{11} cz) + \left(\frac{27}{11} cz - \frac{9}{4}\right) \frac{4}{1+z} + \frac{3cz}{(1+z)^2}, \\ R_3(z) &= -\frac{7}{6} z + x_0 \left[\left(\frac{21}{10} c + \frac{z}{4}\right) L - 4c(8c^2 - \lambda - \frac{3}{22} cz) \left(4 - \frac{z}{1+z}\right) \right], \\ R_2(z) &= (8c^2 - \lambda + \frac{3cz}{22}) L, \quad R_4(z) = \frac{119}{80} cz x_0, \\ R_5(z) &= -\frac{35}{18} z x_0^2 \end{aligned}$$

где $L = \ln(1+z)$ величины c и z определены в (2.9), (2.11).

Для функции распределения по ψ получаем

$$Q(\psi, z) = \frac{1+a_5(\psi, \nu)}{\sqrt{2\pi} \delta^2} \exp \left\{ - \left[\sum_{n=0}^5 a_n(\psi, \nu) \left(\frac{\psi^{(1)}}{\sqrt{2\delta^2}} \right)^n \right]^2 \right\} \quad (3.16)$$

здесь

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{2}{3} x_0 c z^3, \quad \psi^{(1)} = \frac{\psi}{\beta} - z - \frac{z^2}{2} - \mathcal{A}_1 [(1+z)L - z], \quad (\text{см. (2.22)}) \\ \nu &= -\frac{7\sqrt{3}}{16} \sqrt{\frac{x_0}{c^3 z}}; \quad \chi_n = \frac{x_0^2}{2} \left(\frac{3}{c x_0 z^3}\right)^{\frac{n}{2}} S_n(z); \\ S_1(z) &= -\frac{9}{8} L^2 + \frac{9}{4} [9(z-4) + \frac{z^2}{1+z}] + 4c^2 (2L^2 + 6L - \frac{5z^2 + 6z}{1+z}) + \\ &+ \frac{3}{22} cz [44L^2 - 32L + 25z + \frac{7z}{1+z} - \frac{11z^2}{(1+z)^2}], \\ S_2(z) &= (12c^2 - \lambda + \frac{18}{11} cz) [(1+z)^2 L - z - \frac{3}{2} z^2] - (4c^2 + \frac{3}{2} cz) z^2 L, \\ S_3(z) &= -\frac{7}{24} z^4 [1 + x_0 (l_1(z) + z l_2(z))], \quad S_4(z) = \frac{119}{400} cz^5 x_0, \\ S_5(z) &= -\frac{35 z^6 x_0^2}{108}; \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$l_1(z) = \frac{9c}{5} k_1(z) - \frac{24c(8c^2 - \lambda)}{z} (k_1(z) - k_2(z)) - 4c \left(\frac{4L}{z} - k_1(z) \right) + \frac{48c^3}{z} (2k_2(z) - k_1(z) - \frac{1}{1+z});$$

$$l_2(z) = \frac{3}{14} k_1(z) - \frac{36c^2}{z^2} (k_1(z) - k_2(z)) - \frac{3}{2} \left(\frac{4L}{z} - k_1(z) \right) + \frac{18c^2}{z} (2k_2(z) - k_1(z) - \frac{1}{1+z});$$

$$k_1(z) = \frac{4}{z^4} [(1+z)^3 L - z - \frac{5}{2} z^2 - \frac{11}{6} z^3],$$

$$k_2(z) = \frac{2}{z^2} [(1+z)L - z]$$

В дальнейшем удобно перейти к переменной

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2\delta^2}} \left(\frac{\psi - \psi_c}{\beta} \right) \quad (3.18)$$

где $\psi_c = \beta \left(z + \frac{z^2}{2} \right)$ - классический угол поворота частицы в магнитном поле. Для функции $Q(\chi, z)$ имеем

$$Q(\chi, z) = \frac{1+a_5}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ - \left[\sum_{n=0}^4 \lambda_n \chi^n \right]^2 \right\} \quad (3.19)$$

где с нашей точностью $\lambda_0 = a_0 + a_1 \Lambda$, $\lambda_1 = a_1 + 2\Lambda$, $\lambda_2 = a_2 + 3a_3 \Lambda$, $\lambda_4 = a_4$, $\lambda_3 = a_3$

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2\delta^2}} [(1+z)L - z] x_0 (4c + \frac{3}{2} cz) \quad (3.20)$$

Поведение функции (3.19) при изменении χ определяется тем, что коэффициенты $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3 > 0$, а $\lambda_2, \lambda_4 < 0$. Отсюда для $\chi < 0$ функция $Q(\chi, z)$ достигает максимального значения, а затем монотонно падает до нуля по мере роста $|\chi|$. Для $\chi > 0$ имеем монотонное падение до $\chi = \chi_m \propto \sqrt{\frac{z}{x_0}}$, где $Q(\chi, z)$ принимает минимальное значение, а затем функция $Q(\chi, z)$ возрастает до следующего максимума. Заметим, однако, что при $\chi \approx \chi_m$ в выражении $\sum_{n=1}^4 \lambda_n \chi^n$ все члены становятся приблизительно одинаковыми (по порядку величины $\sim 1/\sqrt{x_0}$), что противоречит принятому приближению. Поэтому выражение (3.19) применимо в интервале $-\infty < \chi \leq \chi_m$. Для значений $\chi \sim \chi_m$ функция $Q(\chi, z)$ экспо-

ненициально мала, причем $\int_{-\infty}^{y_m} Q(y, z) dy = 1 + O(x_0^2)$ в соответствии с выбранной точностью. С той же точностью можно положить

$$Q(y, z) = \begin{cases} Q(y, z) \text{ см (3.19)} & y \leq y_m \\ 0 & y > y_m \end{cases}$$

Заметим еще, что все сказанное полностью применимо (с соответствующим переобозначением коэффициентов и переменных) и к функциям распределения (3.14), (3.16).

Следует иметь в виду, что использованные нами разложения вероятностей переходов по степеням x_0 (см. (2.8)) являются асимптотическими. Такой же характер имеют и полученные выше выражения для функций распределения. Это обстоятельство существенно усложняет оценку отброшенных членов. Проведенный анализ показал, что найденная выше функция распределения может быть использована, если значения x_0/z не превышают 0,1.

Отметим, наконец, что восстановление функции распределения в данном порядке по известным моментам распределения в этом же порядке является неоднозначной операцией. Это обусловлено тем, что моменты распределения (см. Приложение) неизвестны в замкнутом виде, а мы знаем только несколько первых членов асимптотического разложения их по степеням x_0 . В такой ситуации для нахождения функции распределения необходимо прямое решение кинетического уравнения, что и было сделано в этом разделе.

4. Поляризация пучка электронов

Число частиц с проекцией спина λ в интервале углов $y \div y + dy$ запишем в виде (см. формулы (3.6), (3.18), (3.19))

$$dN_{\lambda}(y, z) = dy \frac{N}{2} \int \rho_{\lambda}(\varepsilon, \varphi, z) d\varepsilon = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{3\lambda x_0 z}{2(1+z)} \right) Q(y, z) dy \equiv \frac{N}{2} \tilde{Q}(y, z) dy \quad (4.1)$$

где N — полное число частиц в пучке. В интервале углов $\alpha_1 \div \alpha_2$ находится $N_{\lambda}(\alpha_1, \alpha_2)$ частиц

$$N_{\lambda}(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dN_{\lambda}(y, z) \quad (4.2)$$

причем степень поляризации этих частиц есть

$$\xi(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{N_{\lambda=-1}(\alpha_1, \alpha_2) - N_{\lambda=1}(\alpha_1, \alpha_2)}{N_{\lambda=-1}(\alpha_1, \alpha_2) + N_{\lambda=1}(\alpha_1, \alpha_2)} \quad (4.3)$$

Таким образом можно формировать пучки поляризованных частиц, отбирая частицы, отклонившиеся в магнитном поле в некотором интервале углов.

Согласно (4.1) число частиц в пучке с данной поляризацией есть

$$\frac{N}{2} \left(1 - \frac{3\lambda x_0 z}{2(1+z)} \right), \quad (4.4)$$

так что возникает поляризация пучка в целом

$$\xi_R = \frac{3x_0 z}{2(1+z)}, \quad (4.5)$$

обусловленная действием механизма радиационной поляризации. Очевидно, что этот механизм ведет к уменьшению числа электронов с $\lambda = 1$ и к увеличению числа электронов с $\lambda = -1$. Это видно на рис. 1, где изображены функции $\tilde{Q}(y, z)$ и соответствующие гауссовы распределения $Q_1(y, z)$, отвечающие (2.23), причем $Q_1(y, z)$ могут быть получены прямо из формулы (3.19), если в ней положить $a_i = \delta_{i1}$. Кроме того, на рис. 1 видны следующие отличия между $\tilde{Q}(y, z)$ и функцией распределения в первом приближении $Q_1(y, z)$:

1/уменьшение по сравнению с первым приближением разности средних углов отклонения $\overline{\varphi_{-\lambda}} - \overline{\varphi_{\lambda}}$, что приводит к сближению максимумов распределений

2/уменьшение дисперсии угловых распределений $\overline{\varphi_{-\lambda}^2} - \overline{\varphi_{\lambda}^2}$, (для $\lambda = 1$ это уменьшение более значительно), что ведет к сужению области перекрытия распределений для $\lambda = \pm 1$

3/искажение формы функций распределения по сравнению с гауссовой и появление асимметрии распределения, что приводит к относительному увеличению числа частиц с обеими поляризациями в области больших углов отклонения.

На рис. 2 изображена зависимость степени поляризации $\xi(\alpha, y_m)$, $\xi(-\infty, \alpha)$ (см. формулы (4.1) — (4.3)) от угла α для $z=1$, $x_0 = 0,05$ ($y_m = 2,5$). Для сравнения приведены величины,

$\xi_1(\alpha, y_m)$, $\xi_1(-\infty, \alpha)$ вычисленные в первом приближении (для их получения в указанных формулах следует заменить $\tilde{Q} \rightarrow Q_1$). Отрицательная степень поляризации означает для электронов поляризацию по полю. Видно, что общий характер кривых, вычисленных в первом и высших приближениях, одинаков, различия же между ними

связаны с перечисленными выше причинами: Поскольку вследствие радиационной поляризации уменьшается число частиц с $\lambda = 1$, то кривая $\xi(-\infty, \alpha)$ лежит систематически выше, чем $\xi_1(-\infty, \alpha)$ на величину $\sim \xi_R$, уменьшение дисперсии распределений и поляризация пучка в целом приводит к увеличению $\xi(\alpha, y_M)$ по сравнению с $\xi_1(\alpha, y_M)$, а сближение максимумов распределений дает противоположный эффект.

На рис. 3а приведена степень поляризации пучка $\xi(\alpha, y_M)$ для различных значений x_0 и Z . Видно, что при заданном α поляризация растет с ростом x_0 и Z . На рис. 3б изображено полное число частиц, отклонившихся на угол больший чем α

$$N(\alpha, y_M) = N_{\lambda=1}(\alpha, y_M) + N_{\lambda=-1}(\alpha, y_M)$$

С ростом α растет степень поляризации, но уменьшается число используемых частиц.

Все полученные выше выражения относятся к электронам, при переходе к пучкам позитронов, для которых, очевидно, остаются в силе все полученные выше результаты, в приведенных выше формулах следует заменить $\beta \rightarrow -\beta$, $\lambda \rightarrow -\lambda$.

Для оценки влияния разбросов по углу и энергии в падающем пучке на величину эффекта поляризации предположим, что начальная функция распределения имеет вид

$$P_{(0)}^{(\lambda)}(\varepsilon, \varphi) = \frac{1}{2\pi\Delta_1\delta_1} e^{-\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{2\Delta_1^2}} e^{-\frac{\varphi^2}{2\delta_1^2}} \quad (4.6)$$

Воспользовавшись формулами (2.5), (2.23) получим для углового распределения

$$F^{(\lambda)}(\psi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\delta}^2} \exp\left\{-\frac{\tilde{\psi}^2}{2\tilde{\delta}^2}\right\} \quad (4.7)$$

где

$$\tilde{\delta}^2 = \delta^2 + \delta_1^2/\beta^2 + \Delta_1^2 z^2/\varepsilon_0^2, \quad \tilde{\psi} = \psi - z\Delta_1/\varepsilon_0 \quad (4.8)$$

Итак, изменились как дисперсия распределения, так и величина среднего угла отклонения. Поскольку изменение последней не зависит от проекции λ , то оно не оказывает влияния на степень поляризации частиц при соответствующем выборе α . Из (4.8) видно, что при выполнении условий

$$\beta\delta \gg \delta_1, \quad \delta \gg \frac{\Delta_1}{\varepsilon_0} Z \quad (4.9)$$

начальные разбросы не влияют на величину поляризации. Заметим, что даже при $Z \sim 1$ условие на энергетический разброс в начальном пучке оказывается довольно слабым

$$\frac{\Delta_1}{\varepsilon_0} \ll \sqrt{x_0} \quad (4.10)$$

При таких Z более существенно ограничение углового разброса

$$\delta_1 \ll \beta\sqrt{x_0} \quad (4.11)$$

В случае, когда $\varepsilon = 250$ ГэВ и $x_0 = 0,05$ при $Z = 1$ (длина пути в магнитном поле $\sim 1,6$ см), коллинеарность начальных импульсов должна быть не хуже чем 10^{-3} .

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Моменты распределения по углу и энергии

Большое количество важной физической информации содержится в моментах распределения. Как и в работе /6/ определим величину

$$u(z, n, m) = \frac{1}{\varepsilon_0^m n_z} \int \rho_z(\varepsilon, \varphi, t) \varphi^n \varepsilon^m d\varphi d\varepsilon \quad (A.1)$$

где $n_z = \int \rho_z(\varepsilon, \varphi, t) d\varphi d\varepsilon$. Интегрируя уравнение (2.1) по φ и ε , найдем уравнение для n_z

$$\frac{dn_z}{dt} = \int W_{z,-z}(\varepsilon', \varepsilon) \rho_z(\varepsilon, t) d\varepsilon d\varepsilon' - \int W_{-z,z}(\varepsilon', \varepsilon) \rho_z(\varepsilon, t) d\varepsilon d\varepsilon' \quad (A.2)$$

Используя (2.1) и (A.2), получим, дифференцируя по t (A.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(z, n, m)}{\partial t} = & \frac{eH}{\varepsilon_0} n u(z, n-1, m-1) - \frac{1}{n_z} \left\langle \varphi^n \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m \int_0^\varepsilon \left(1 - \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^m\right) W_{z,-z}(\varepsilon', \varepsilon) d\varepsilon' \right\rangle_z + \frac{1}{n_z} \left[\left\langle W_{-z,z}^{(0)}(\varepsilon) \right\rangle_z u(z, n, m) - \right. \\ & \left. - \left\langle W_{-z,z}^{(0)}(\varepsilon) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m \varphi^n \right\rangle_z \right] - \frac{1}{n_z} \left[\left\langle W_{z,-z}^{(0)}(\varepsilon) \right\rangle_z u(z, n, m) - \right. \\ & \left. - \left\langle W_{z,-z}^{(0)}(\varepsilon) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m \varphi^n \right\rangle_z \right] + \frac{1}{n_z} \left[\left\langle \varphi^n \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m \int_0^\varepsilon d\varepsilon' \cdot \right. \right. \\ & \left. \cdot W_{-z,z}(\varepsilon', \varepsilon) \left(1 - \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^m\right) \right\rangle_z - \left\langle \varphi^n \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m \int_0^\varepsilon d\varepsilon' \cdot \right. \\ & \left. \cdot W_{z,-z}(\varepsilon', \varepsilon) \left(1 - \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^m\right) \right\rangle_{-z} \right] \quad (A.3) \end{aligned}$$

где $\langle f(\varepsilon, \varphi) \rangle_z \equiv \int f(\varepsilon, \varphi) \rho_z(\varepsilon, \varphi, t) d\varphi d\varepsilon$

Основной вклад в интегралы по ε' дают малые значения величины $\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon} \sim x$, поэтому можно разложить величину $1 - \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^m$ по степеням $\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon}\right)$. Сохраняя члены $\sim x^2$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{du(z, n, m)}{dz} = & \beta u(z, n-1, m-1) - m u(z, n, m+1) + x_0 u(z, n, m+2) \cdot \\ & \cdot m [\beta + c(m+1)] - x_0^2 u(z, n, m+3) [c_3 m + c_4 m(m-1) + \\ & + \frac{x}{6} m(m-1)(m-2)] + [\tilde{w}_{-z,z}^{(1)}(\varepsilon_0) - \tilde{w}_{z,-z}^{(1)}(\varepsilon_0)] m u(z, n, m+3) + \end{aligned} \quad (A.4)$$

$$\begin{aligned} & + \tilde{w}_{z,-z}^{(0)}(\varepsilon_0) [u(-z, n, m+2) - u(-z, 0, 2) u(z, n, m)] - \\ & - \tilde{w}_{-z,z}^{(0)}(\varepsilon_0) [u(z, n, m+2) - u(z, 0, 2) u(z, n, m)] \end{aligned}$$

где $\tilde{w}_{z,-z}^{(0)}(\varepsilon_0), \tilde{w}_{z,-z}^{(1)}(\varepsilon_0)$ определены в (2.7), (2.8), а x, β - в (2.II),

$$c_3 = a_2 / x_0^2, \quad c_4 = -\beta_2 / 2x_0^2, \quad \beta = -A_1 / x_0 \quad (A.5)$$

использованные здесь и ниже численные коэффициенты определены в формулах (2.8), (2.9), (2.I2).

Представим теперь $u(z, n, m)$ в виде разложения по степеням x_0 :

$$u(z, n, m) = u^{(0)}(z, n, m) + x_0 u^{(1)}(z, n, m) + x_0^2 u^{(2)}(z, n, m) + \dots \quad (A.6)$$

Подставляя это разложение в (A.4) и собирая члены при одинаковых степенях x_0 , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{du^{(0)}(z, n, m)}{dz} = & -m u^{(0)}(z, n, m+1) + \beta u^{(0)}(z, n-1, m-1); \\ \frac{du^{(1)}(z, n, m)}{dz} = & -m u^{(1)}(z, n, m+1) + \beta u^{(1)}(z, n-1, m-1) + \\ & + u^{(0)}(z, n, m+2) m [\beta + c(m+1)]; \\ \frac{du^{(2)}(z, n, m)}{dz} = & -m u^{(2)}(z, n, m+1) + \beta u^{(2)}(z, n-1, m-1) + \\ & + u^{(1)}(z, n, m+2) m [\beta + c(m+1)] - m u^{(0)}(z, n, m+3) [c_3 + c_4(m-1) + \\ & + \frac{x}{6} (m-1)(m-2)] + \frac{105\sqrt{3}}{32} x u^{(0)}(z, n, m+3) + \left(\frac{15\sqrt{3}}{32} + \frac{3}{4} x\right) \cdot \\ & \cdot [u^{(0)}(z, 0, 2) u^{(1)}(z, n, m) + u^{(1)}(z, 0, 2) u^{(0)}(z, n, m) - u^{(1)}(z, n, m+2)] - \\ & - \left(\frac{15\sqrt{3}}{32} - \frac{3}{4} x\right) [u^{(0)}(-z, 0, 2) u^{(1)}(z, n, m) + u^{(1)}(z, 0, 2) u^{(0)}(z, n, m) - \\ & - u^{(1)}(-z, n, m+2)] \end{aligned} \quad (A.7)$$

Уравнение для функции $u^{(0)}(z, n, m)$ решается без труда. Впрочем его решение очевидно заранее: при $x_0 \rightarrow 0$, что отвечает классическому приближению, $u(z, n, m) \rightarrow u^{(0)}(z, n, m)$ и равно произведению классических средних величин φ^n и $\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m$:

$$u^{(0)}(z, n, m) = \frac{1}{(1+z)^m} \left[\beta z \left(1 + \frac{z}{2}\right) \right]^n \quad (A.8)$$

Это решение удовлетворяет уравнению (А.7) и начальному условию $u^{(0)}(z, n, m)|_{z=0} = \delta_{n,0}$, которое вытекает из определения (А.1) и начального условия (2.4) при $\varphi_0 = 0$. Начальные условия для функций $u^{(1)}(z, n, m)$, $u^{(2)}(z, n, m)$ имеют вид:

$$u^{(1)}(z, n, m)|_{z=0} = u^{(2)}(z, n, m)|_{z=0} = 0 \quad (\text{А.9})$$

Поскольку $u^{(0)}(z, n, m)$ не зависит от z , в дальнейшем мы будем писать $u^{(0)}(n, m)$ вместо $u^{(0)}(z, n, m)$.

Решение уравнения для $u^{(1)}(z, n, m)$ будем искать в виде

$$u^{(1)}(z, n, m) = u^{(0)}(n, m) \psi_{n,m}^{\lambda}(z) \quad (\text{А.10})$$

Подставляя (А.10) в уравнение (А.7) имеем уравнение

$$\frac{d\psi_{n,m}^{\lambda}}{dz} = \frac{2n(1+z)}{z(z+2)} (\psi_{n-1,m-1}^{\lambda} - \psi_{n,m}^{\lambda}) + \frac{m(m+1)c}{(1+z)^2} - m \left[\frac{\psi_{n,m+1}^{\lambda} - \psi_{n,m}^{\lambda}}{(1+z)} - \beta / (1+z)^2 \right] \quad (\text{А.11})$$

с начальным условием $\psi_{n,m}^{\lambda}|_{z=0} = 0$. Функцию $\psi_{n,m}^{\lambda}(z)$ следует искать в виде полинома второй степени от n, m с коэффициентами, зависящими от z . В этом можно убедиться на основании следующих рассуждений - функция $f_{\lambda}(z, \varphi, t)$ в первом порядке по λ_0 имеет максимум по ε, φ при ε, φ равных своим средним значениям $\bar{\varepsilon}, \bar{\varphi}$, так что основной вклад в интеграл (А.1) дает область $\varepsilon \sim \bar{\varepsilon}, \varphi \sim \bar{\varphi}$ с шириной $\sim \sqrt{\lambda_0}$. В силу этого в подынтегральном выражении можно разложить φ^n по степеням $(\varphi - \bar{\varphi})$ и ε^m по степеням $\varepsilon - \bar{\varepsilon}$ и отбросить члены более высокого порядка, чем $(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2, (\varphi - \bar{\varphi})^2, (\varphi - \bar{\varphi})(\varepsilon - \bar{\varepsilon})$, что обеспечивает удержание членов $\sim \lambda_0$. С другой стороны, если искать решение для $\psi_{n,m}^{\lambda}(z)$ в виде полинома более высокой степени по n, m , чем вторая, то из уравнения (А.11) с учетом начального условия автоматически будут получаться нулевые значения для коэффициентов при степенях n, m выше второй. Итак положим

$$\psi_{n,m}^{\lambda}(z) = v_1(z)m + v_2(z)m^2 + v_3(z)n + v_4(z)n^2 + v_5(z)nm \quad (\text{А.12})$$

Подставляя (А.12) в (А.11) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях m, n получим

$$\frac{dv_1}{dz} = \frac{\beta+c}{(1+z)^2} - \frac{v_1+v_2}{(1+z)}; \quad \frac{dv_2}{dz} = \frac{c}{(1+z)^2} - \frac{2v_2}{1+z};$$

$$\frac{dv_3}{dz} = \frac{2(1+z)}{z(z+2)} (v_2 - v_1 + v_4 - v_3 + v_5); \quad (\text{А.13})$$

$$\frac{dv_4}{dz} = -\frac{2(1+z)}{z(z+2)} (2v_4 + v_5); \quad \frac{dv_5}{dz} = -\frac{v_5}{1+z} - \frac{2(1+z)}{z(z+2)} (2v_2 + v_5)$$

с начальными условиями $v_k(0) = 0$. Решая эту систему, найдем

$$\psi_{n,m}^{\lambda}(z) = m\beta \frac{L}{1+z} + m(m+1) \frac{c z}{(1+z)^2} + \frac{4}{3} n(n-1) \frac{c z}{(z+2)^2} - 2n\beta \frac{L(z+1)-z}{z(z+2)} - \frac{2mncz}{(1+z)(z+2)} \quad (\text{А.14})$$

где $L = \ln(1+z)$

Функцию $u^{(2)}(z, n, m)$ будем соответственно искать в виде

$$u^{(2)}(z, n, m) = u^{(0)}(n, m) \lambda_{n,m}^{\lambda}(z) \quad (\text{А.15})$$

Подставив в (А.7), имеем уравнение для $\lambda_{n,m}^{\lambda}(z)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{n,m}^{\lambda}}{dz} = & m \frac{\lambda_{n,m}^{\lambda} - \lambda_{n,m+1}^{\lambda}}{1+z} + \frac{2n(1+z)}{z(z+2)} (\lambda_{n-1,m-1}^{\lambda} - \lambda_{n,m}^{\lambda}) + \\ & + \frac{m \psi_{n,m+2}^{\lambda}}{(1+z)^2} [\beta + c(m+1)] - \frac{m}{(1+z)^3} [c_3 + c_4(m-1) + \frac{2}{3}(m-1)(m-2)] + \\ & + \frac{63}{11} c z \frac{m}{(1+z)^3} + \frac{9}{4(1+z)^2} \left[\frac{mL}{1+z} - \frac{2n((z+1)L-z)}{z(z+2)} \right] + \\ & + \frac{3zc}{(1+z)^2} \left\{ \frac{9}{11} \left[\frac{2n((z+1)L-z)}{z(z+2)} - \frac{mL}{1+z} \right] - \frac{2mz}{(1+z)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2nz}{(1+z)(z+2)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{А.16})$$

В соответствии с приведенными выше соображениями, $\lambda_{n,m}^{\lambda}$ является полиномом 4-ой степени по n, m

$$\begin{aligned} \lambda_{n,m}^{\lambda}(z) = & \sum_{i=1}^4 u_{i0}(z) \frac{\Gamma(m+i)}{\Gamma(m)} + \\ & + \sum_{j=1}^4 \sum_{i=0}^3 u_{ij}(z) \frac{\Gamma(m+i+1) \Gamma(n+1)}{\Gamma(m+1) \Gamma(n-j+1)} \quad (i+j \leq 4) \end{aligned} \quad (\text{А.17})$$

Подставляя $\lambda_{i,m}^z(z)$ в этой форме в уравнение (A.16) и используя явный вид (A.14), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решая которую с начальными условиями $u_{ij}(0) = 0$, найдем

$$\begin{aligned}
 u_{10} &= -\frac{1}{2(1+z)^2} \left\{ 9(L+5z) + \frac{3}{11} c\lambda \left[\lambda 0L + \frac{z(14+25z)}{1+z} \right] + 8c^2 \left[4L - \frac{z(4+5z)}{1+z} \right] \right\}, \\
 u_{20} &= \frac{1}{(1+z)^2} \left\{ \frac{\beta^2 L^2}{2} - \lambda L + \frac{3}{22} c\lambda \left(L - \frac{2z}{1+z} \right) + 8c^2 \left(L - \frac{z}{1+z} \right) \right\}, \\
 u_{30} &= \frac{z}{(1+z)^3} \left(-\frac{\lambda}{6} + 8cL \right), \\
 u_{40} &= \frac{c^2 z^2}{2(1+z)^4}; \quad u_{31} = -\frac{2c^2 z^2}{(1+z)^3(z+2)}, \quad u_{21} = \frac{1}{(1+z)^2(z+2)} \left\{ \frac{\lambda z}{2} - 2\beta c \left[L(2z+1) - z \right] \right\} - 3u_{31}, \\
 u_{11} &= -2u_{21} - 6u_{31} + \frac{1}{z(z+2)} \left\{ -2\beta^2 L^2 + 4 \left(\frac{9z}{2(1+z)} + 28 \right) - \frac{28z}{1+z} + \frac{8c^2}{1+z} \left[\frac{z^2}{1+z} - 6(L-z) \right] + 6c\lambda \left[\frac{5zL}{1+z} + \frac{z^2}{2(1+z)^2} - \frac{12}{11} \left(L - \frac{z}{1+z} \right) \right] \right\}, \\
 u_{01} &= \frac{1}{z(z+2)} \left\{ 3\beta^2 L^2 + (L-z) \left(\frac{9}{2(1+z)} - \lambda 3 \right) - \frac{28z^2}{1+z} + \frac{8c^2}{1+z} \left[\frac{z^3}{1+z} + 6(z+2)(L-z) \right] - 6c\lambda \left[\frac{5zL}{1+z} - \frac{z^3}{(1+z)^2} + \frac{4}{11} \left(L - \frac{z}{1+z} - \frac{3z^2}{8(1+z)} \right) \right] \right\}; \\
 u_{22} &= \frac{10}{3} \frac{c^2 z^2}{(1+z)^2(z+2)^2}, \\
 u_{12} &= \frac{2}{3(1+z)(z+2)^2} \left\{ -\lambda z + 2\beta c \left[L(4z+3) - 3z \right] \right\} - 2u_{22}, \\
 u_{02} &= -u_{12} - 2u_{22} + \frac{2}{z^2(z+2)^2} \left\{ \beta^2 \left[L(1+z) - z \right]^2 - 14 \left[L(1+z)^2 - z - \frac{3}{2} z^2 \right] + 4c^2 \left[2L(3+6z+2z^2) - 3z(2+3z) \right] + \frac{3c\lambda}{11} \left[L(z^2+24z+12) - 6z(2+3z) \right] \right\}; \\
 u_{13} &= -\frac{8c^2 z^2}{3(z+2)^3(1+z)}, \\
 u_{03} &= \frac{1}{3(z+2)^3} \left\{ \lambda z - 8\beta c \left[L(1+z) - z \right] \right\} - u_{13}, \\
 u_{04} &= \frac{8}{9} \frac{c^2 z^2}{(z+2)^4}
 \end{aligned}
 \tag{A.18}$$

Л и т е р а т у р а

1. G.Hanson. Proceedings of the XVIII International Conference on High Energy Physics, Tbilisi, Vol.II, B1, Dubna, 1977.
2. T.Erber Acta Physica Aust.Supp.VIII, 323, 1971.
3. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат. М., 1973.
4. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко ЖЭТФ, 66, 81, 1974
5. D.White. Phys. Rev. D5, 1930, 1972.
6. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. Препринт ИЯФ 77-25, 1977.

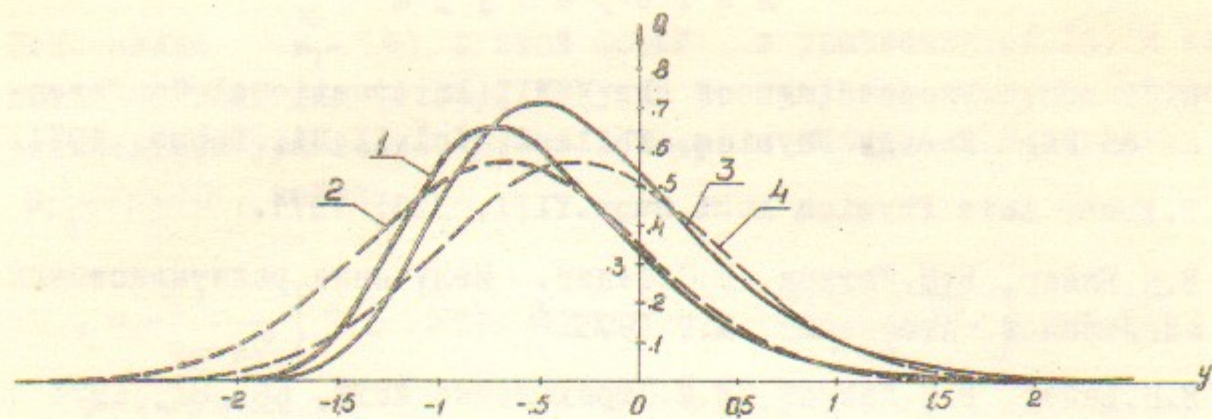


Рис. 1. Функции распределения $\tilde{Q}(y, z)$ для $\lambda = +1$ (кривая 1) и $\lambda = -1$ (кривая 3); $Q_1(y, z)$ для $\lambda = +1$ (кривая 2) и $\lambda = -1$ (кривая 4), все при $x_0 = 0.1$, $z = 2$.

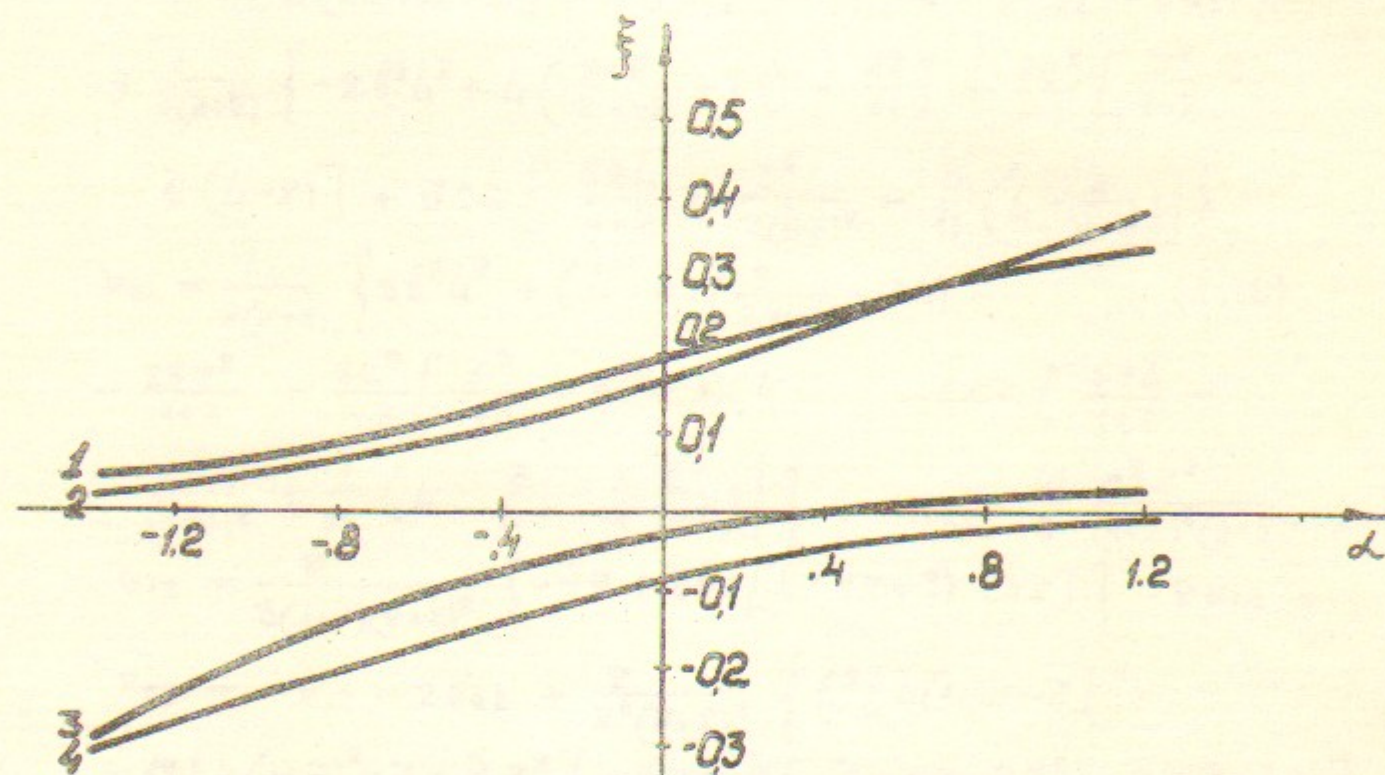


Рис. 2. Степень поляризации $\xi(\alpha, y_m)$ (кривая 1), $\xi(-\infty, \alpha)$ (кривая 3), $\xi_1(\alpha, y_m)$ (кривая 2) и $\xi_1(-\infty, \alpha)$ (кривая 4) все при $x_0 = 0.05$, $z = 1$, $y_m = 2.5$.

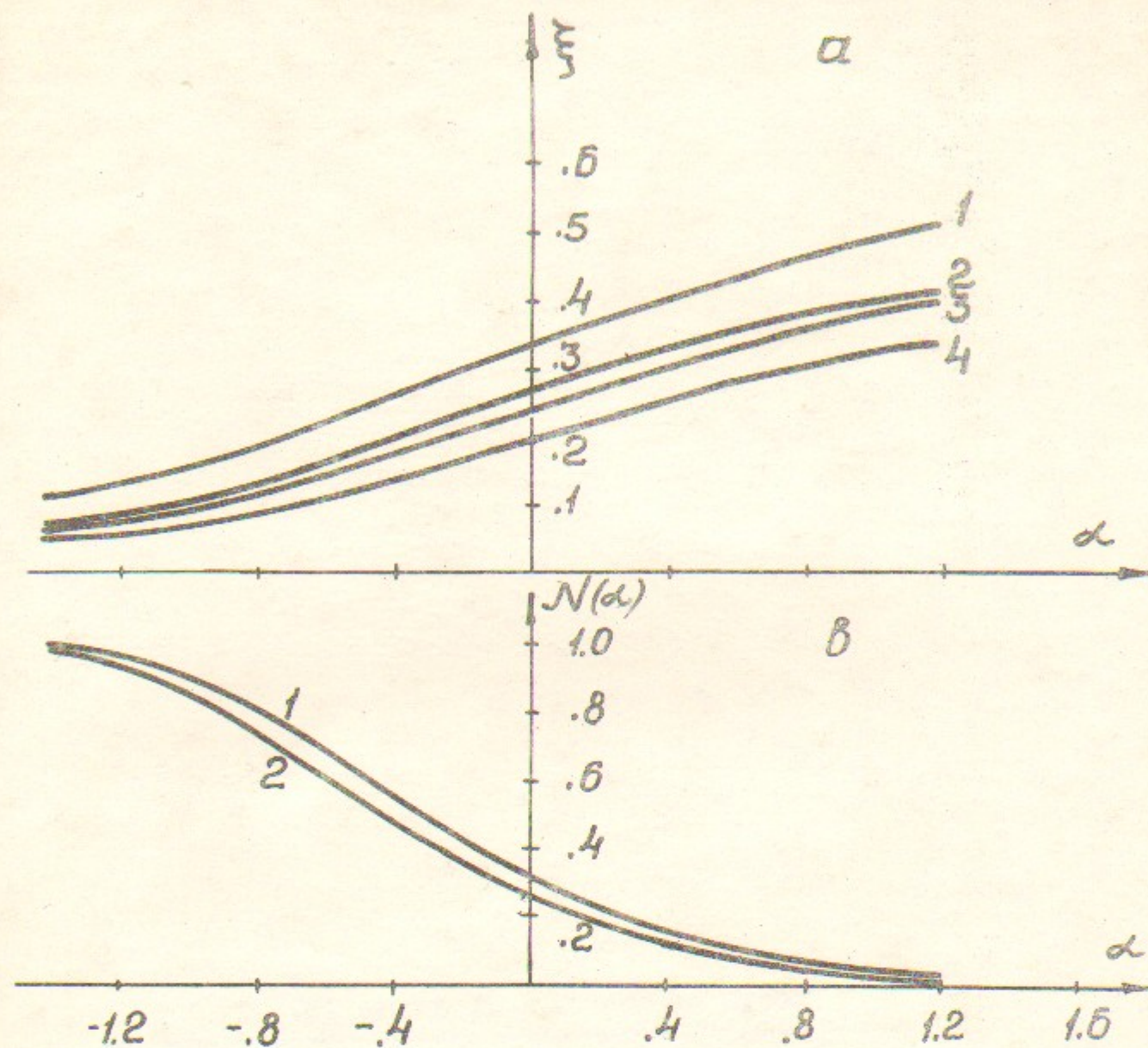


Рис. 3. а) Степень поляризации $\xi(\alpha, y_m)$ для $x_0 = 0.1$, $z = 2$ (кривая 1); $x_0 = 0.1$, $z = 1$ (кривая 2); $x_0 = 0.05$, $z = 2$ (кривая 3) и $x_0 = 0.05$, $z = 1$ (кривая 4)
 в) Число частиц $N(\alpha, y_m)$ для $x_0 = 0.05$, $z = 1$ (кривая 1) и $x_0 = 0.1$, $z = 2$ (кривая 2).

Работа поступила - 30 марта 1977 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 6.УІ-1977г. МН 02789
Усл. 1,6 печ.л., 1,3 учетно-изд.л.
Тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 42.

Отпечатано на ротапринтере ИЯФ СО АН СССР