

ЭФФЕКТ "ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАССЫ"
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ И ЕГО
ВЛИЯНИЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КОГЕРЕНТНЫХ БЕТАТ-
РОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Н.А.Винокуров, Г.Н.Кулипанов, Е.А.Переведенцев

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе рассмотрены вопросы устойчивости когерентных бетатронных колебаний пучка в накопителе с учетом нелинейности ведущего магнитного поля при наличии когерентного или некогерентного сдвига частоты бетатронных колебаний.

Показано, что в этом случае устойчивость когерентного движения определяется существенно нелинейным эффектом, аналогичным эффекту "отрицательной массы" для продольного движения. Получены условия устойчивости: а) определяемые соотношением между знаком кубической нелинейности ведущего магнитного поля и знаком силы пространственного заряда; б) зависящие от величины сдвига частоты бетатронных колебаний и от разброса по частотам бетатронных колебаний в пучке.

Введение

При рассмотрении когерентной устойчивости пучков заряженных частиц в ускорителях и накопителях влияние кубической нелинейности ведущего поля обычно сводится к учету разброса по частотам, определяющего пороговые токи развития неустойчивостей [1,2]. При таком подходе учитывается только величина кубической нелинейности.

В данной работе показано, что для бетатронного движения в ускорителях при изучении вопросов когерентной устойчивости, быстрого затухания и т.д., необходимо учитывать существенно нелинейный эффект, подобный эффекту "отрицательной массы" в продольном движении. В этом случае знак кубической нелинейности является определяющим.

Экспериментальные результаты, полученные на ВЭПП-3, хорошо объясняются эффектом "отрицательной массы" в бетатронном фазовом пространстве. Эффекты, наблюдавшиеся при изучении расфазировки пучка на ВЭПП-1 [3] и исследовании быстрого затухания на SPEAR [4] также могут быть объяснены этим механизмом.

I. Рассмотрим, в качестве примера, одномерные вертикальные когерентные бетатронные колебания пучка в накопителе при наличии слабой нелинейности ведущего магнитного поля $f(z, \theta)$ и слабой поперечной силы, направленной к центру (от центра) заряда пучка $\Phi(\theta) \cdot (z - y)$, которую, для простоты, будем считать линейной. Здесь y - координата центра заряда пучка, z - координата отдельной частицы пучка, θ - обобщенный азимут. Уравнения движения

$$\begin{aligned} z'' + g(\theta)z &= f(z, \theta) + \Phi(\theta)(z - y) \\ y'' + g(\theta)y &= f(y, \theta) \end{aligned} \quad (I)$$

после стандартной замены переменных

$$\begin{aligned} y &= \beta w(\theta) \cos(\nu\theta + \chi(\theta) + \varphi) \\ z &= \alpha w(\theta) \cos(\nu\theta + \chi(\theta) + \psi) \end{aligned}$$

дают систему:

$$\begin{aligned} b' &= -f(y, \theta) w(\theta) \sin(\nu\theta + \chi(\theta) + \varphi) \\ \varphi' &= -\frac{1}{b} f(y, \theta) w(\theta) \cos(\nu\theta + \chi(\theta) + \varphi) \\ \alpha' &= -[f(z, \theta) + \Phi(\theta)(z-y)] w(\theta) \sin(\nu\theta + \chi(\theta) + \varphi) \\ \psi' &= -\frac{1}{\alpha} [f(z, \theta) + \Phi(\theta)(z-y)] w(\theta) \cos(\nu\theta + \chi(\theta) + \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $g(\theta)$ - жёсткость магнитной системы
 ν - невозмущенная бетатронная частота
 $w(\theta)e^{i\chi(\theta)}$ - функция Флоке.

Малость f и Φ позволяет считать b, φ, α, ψ в (2) медленными переменными. В нерезонансном случае ($\nu \neq p/q$, p, q - целые), усредняя по бетатронной фазе и по азимуту, можно получить укороченные уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\delta\nu \cdot b \sin(\psi - \varphi) \\ \psi' &= \frac{\partial\nu}{\partial\alpha^2} \alpha^2 + \delta\nu \left[1 - \frac{b}{\alpha} \cos(\psi - \varphi)\right] \\ b' &= 0 \\ \varphi' &= \frac{\partial\nu}{\partial\alpha^2} b^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\delta\nu = -\frac{1}{2} \langle w^2(\theta) \Phi(\theta) \rangle$ - некогерентный сдвиг бетатронной частоты,
 $\frac{\partial\nu}{\partial\alpha^2} = \frac{3}{8} \langle \mu(\theta) w^4(\theta) \rangle$ - кубическая нелинейность;
 а f записана в виде:

$$f(z, \theta) = -\lambda(\theta) z^2 - \mu(\theta) z^3 - \varepsilon(\theta) z^4 + o(z^5).$$

В переменных $\gamma \equiv \alpha^2 - b^2, \eta \equiv \psi - \varphi$ (3) образует систему канонических уравнений с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \frac{\partial\nu}{\partial\alpha^2} \gamma^2 + \delta\nu (\gamma - 2b\sqrt{b^2 + \gamma} \cos\eta) \quad (4)$$

Относительная фаза частицы пучка η отсчитывается от бетатронной фазы центра пучка, γ - обобщенный импульс, канонически сопряженный η . Первый член в гамильтониане (4) имеет смысл "ки-

нетической энергии" (эффективная масса $(\frac{\partial\nu}{\partial\alpha^2})^{-1}$), а второй описывает действие силы, направленной к центру (от центра) пучка.

Для малых колебаний в окрестности центра пучка $\gamma \ll b^2, \eta \ll 1$ из (4) получим:

$$\mathcal{H}_l = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\nu}{\partial\alpha^2} + \frac{\delta\nu}{2b^2} \right) \gamma^2 + \delta\nu b^2 \eta^2. \quad (5)$$

Гамильтониан (5) описывает линейные колебания с фазовой частотой

$$\nu_\phi^2 = \delta\nu \left(\delta\nu + 2b^2 \frac{\partial\nu}{\partial\alpha^2} \right), \quad (6)$$

выраженной в единицах частоты обращения ω_0 .

Интересно отметить, что эффективная масса осциллятора

$$\eta = \left(\frac{\partial\nu}{\partial\alpha^2} + \frac{\delta\nu}{2b^2} \right)^{-1} \quad (7)$$

изменяется за счёт взаимодействия.

Условие неустойчивости движения вблизи центра пучка:

$$\nu_\phi^2 < 0, \text{ или в развернутом виде:}$$

$$-1 < \frac{\delta\nu}{2b^2 \frac{\partial\nu}{\partial\alpha^2}} < 0, \quad (8)$$

имеет простой смысл: движение неустойчиво, если знак вынуждающей силы $\delta\nu$ противоположен знаку эффективной массы η . В противном случае может иметь место автофазировка в бетатронном фазовом пространстве: вынуждающая сила будет группировать частицы пучка вблизи его центра; равновесная бетатронная фаза будет совпадать с бетатронной фазой колебаний центра пучка.

В отличие от обычного эффекта отрицательной массы, который проявляется во вращательном движении (например, в продольном движении частиц в циклических ускорителях /5/, в движении спутников планет /6/, описанное явление представляет собой эффект отрицательной массы в колебательном движении.

Рассмотрим структуру фазовой плоскости для уравнений (3), т.е. линии $\mathcal{H} = const$ гамильтониана (5), в полярных координатах

α, η . Возможны четыре варианта, различающиеся расположением стационарных точек. \mathcal{H} .

1) Эффективная масса η имеет знак, совпадающий со знаком δv и противоположный знаку $\partial v / \partial \alpha^2$ - "невозмущенной" массы:

$$\delta \equiv \frac{\delta v}{2v^2 \frac{\partial v}{\partial \alpha^2}} < -1.$$

При этом центр пучка устойчив, он окружен областью бетатронной автофазировки (ОБА) каплевидной формы с шириной, зависящей от δv (рис. 1г).

$$2) \delta v \cdot \eta < 0, \eta \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha^2} > 0, \text{ т.е. } -1 < \delta < 0.$$

Здесь (рис. 1б) центр пучка неустойчив (седло), частицы, первоначально находившиеся вблизи центра пучка, будут расфазироваться: фаза η не ограничена.

$$3) \delta v \cdot \eta > 0, 0 < \delta < \frac{1}{8}.$$

Центр пучка устойчив и окружен ОБА серповидной формы, её ширина зависит от δv (рис. 1д).

4) Случай $\delta > \frac{1}{8}$ так же соответствует устойчивости центра пучка. Однако, здесь все фазовые траектории окружают центр пучка, ОБА не ограничена (рис. 1а).

Из (8) следует, что точка $y=0, \eta=0$ может быть устойчива и при сколь угодно малом $|\delta v|$. Для того, чтобы узнать, начиная с какой величины $|\delta v|$ колебания всех частиц пучка остаются сфазированными, надо учесть конечный размер пучка σ . Необходимым условием сохранения когерентности колебаний пучка является превышение размера ОБА, окружающей его центр, над размерами пучка σ . Из (4) видно, что для $0 < \delta \ll 1$ это условие запишется в виде

$$\sigma \leq \left(\delta v / \frac{\partial v}{\partial \alpha^2} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Итак, комбинируя (8) и (9), получаем; если пучок с поперечным размером σ совершает когерентные колебания с амплитудой v

$(v \gg \sigma)$, то при выполнении условий:

$$\delta v < -2v^2 \frac{\partial v}{\partial \alpha^2} \text{ либо } \delta v > \frac{\partial v}{\partial \alpha^2} \sigma^2 \quad (10)$$

колебания пучка остаются когерентными с той же амплитудой и сохранением размера. В противном случае происходит потеря когерентности: бетатронные колебания отдельных частиц пучка расфазировываются.

Так как в устойчивом случае пучок, вообще говоря, не согласован с фазовым эллипсом (5), то могут наблюдаться колебания размера пучка с частотой $2\nu_\phi$.

Формулы (6), (8), (10) связывают между собой экспериментально наблюдаемые величины. Имея регулируемую и измеряемую кубическую нелинейность $\partial v / \partial \alpha^2$, наблюдая частоту модуляции дипольного момента функции распределения, можно обнаружить наличие слабой вынуждающей силы, направленной к центру (от центра) пучка и измерить вызванный ею сдвиг δv . Такой способ измерения дает δv не как добавку к сравнительно большой величине $\{v\}$, как это обычно бывает при измерении бетатронной частоты, а как непосредственно измеряемую величину, что должно повышать точность измерения.

2. Рассмотрим когерентные бетатронные колебания пучка, взаимодействующего с какими-либо внешними системами (стенками вакуумной камеры, пластинами, полостями и т.д.). Тогда вместо (I) будем иметь:

$$\begin{aligned} z'' + g(\theta)z &= f(z, \theta) + A(\theta)z + B(\theta)y \\ y'' + g(\theta)y &= f(y, \theta) + [A(\theta) + B(\theta)]y, \end{aligned} \quad (II)$$

где A и B описывают взаимодействие и аналогичны введенным в /7/. Обозначив

$$\begin{aligned} g_1 &\equiv g - A - B \\ \Phi &\equiv -B \end{aligned}$$

можно применить рассмотрение, проведенное в п. I, к системе (II). Укороченные уравнения (3), гамильтониан (4) и условия (8, 10) сохранят свой вид, если положить

$$\delta v = \delta v_{нк} - \delta v_k,$$

где

$$\delta v_{нк} = -\frac{1}{2} \langle w^2(\theta) A(\theta) \rangle$$

- некогерентный сдвиг бетатронной частоты,

$$\delta v_k = -\frac{1}{2} \langle w^2(\theta) [A(\theta) + B(\theta)] \rangle$$

- когерентный сдвиг бетатронной частоты.

Для большинства поперечных когерентных эффектов инкремент (или декремент) много меньше, чем δv , и изменение амплитуды когерентных колебаний происходит адиабатически по отношению к рассмотренному выше движению. Поэтому условия (10) являются условиями существования дипольных мод большинства когерентных эффектов. Другими словами, из (10) определяется порог по току пучка для дипольных мод большинства когерентных эффектов.

В экспериментах на ВЭШ-3 и **SPEAR** /4/ наблюдалась зависимость наличия когерентных эффектов от знака кубической нелинейности $\partial v / \partial a^2$. Условия (10) объясняют такую зависимость.

Кроме того, из (8) следует, что при $\delta v / \frac{\partial v}{\partial a^2} < 0$ должен происходить "срыв" когерентной неустойчивости, когда амплитуда колебаний центра пучка доходит до

$$v_{max} = \left(-\frac{\delta v}{2 \frac{\partial v}{\partial a^2}} \right)^{1/2}.$$

"Срыв" неустойчивости так же наблюдался на многих машинах.

Важно отметить, что изложенное выше рассмотрение устойчивости дипольной моды когерентных колебаний с амплитудой, много большей размера пучка, позволяет сделать качественные выводы и о необходимых условиях развития когерентной неустойчивости пучка. Если предполагать, что развитие неустойчивости инициируется "когерентной затравкой", т.е. малой флуктуацией плотности заряда пучка с ненулевым дипольным моментом, то, по-видимому, всегда можно считать ее характерный размер малым по сравнению с амплитудой ее когерентных колебаний. Тогда, вводя δv_f - сдвиг частоты, вызванный ее дипольным моментом, и $\left(\frac{\partial v}{\partial a^2} \right)_\Sigma$ - суммарную кубичес-

кую нелинейность за счёт поля пучка и ведущего поля накопителя, из (10) получаем, что эта флуктуация быстро расфазировается при $\delta v_f \left(\frac{\partial v}{\partial a^2} \right)_\Sigma < 0$ (см. рис. 1б).

Таким образом, развитие когерентной неустойчивости возможно лишь при одном знаке кубической нелинейности, а при другом знаке запрещено эффектом "отрицательной массы" в бетатронном движении. В частности, эта простая модель позволяет дать наглядную интерпретацию зависимости условий коллективной устойчивости, полученных в /8/, от знака кубической нелинейности.

В заключение авторы выражают признательность Я.С.Дербеневу и А.Н.Скринскому за весьма полезное обсуждение вопросов, затронутых в работе.

Л и т е р а т у р а

1. Н.С.Диканский, А.Н.Скринский АЭ, 21, 176, 1966.
2. H.G. Hereward. CERN, AR/Int. SG 64-8, 16.4. 1964
3. Н.С.Диканский, Г.Н.Кулипанов, Б.Л.Лазаренко, С.И.Мишнев, С.Г.Попов. Труды VII Международной конференции по ускорителям. Ереван, 1969.
4. The SPEAR Group, Proc. IX th Intern. Conf. on High Energy Accel., SLAC, Stanford, p. 338 (1974).
5. C.E. Nielsen, A.M. Sessler, K.R. Symon. Intern. Conf. on High Energy Accel., CERN, 1959, p.239.
6. В.В.Белецкий "Очерки о движении космических тел".
7. D.Möhl, A.M. Sessler. Proc. VIII Intern. Conf. on High Energy Accel., CERN, 1971
8. Я.С.Дербенёв, Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков, Препринт ИЯФ 7-72, Новосибирск, 1972.

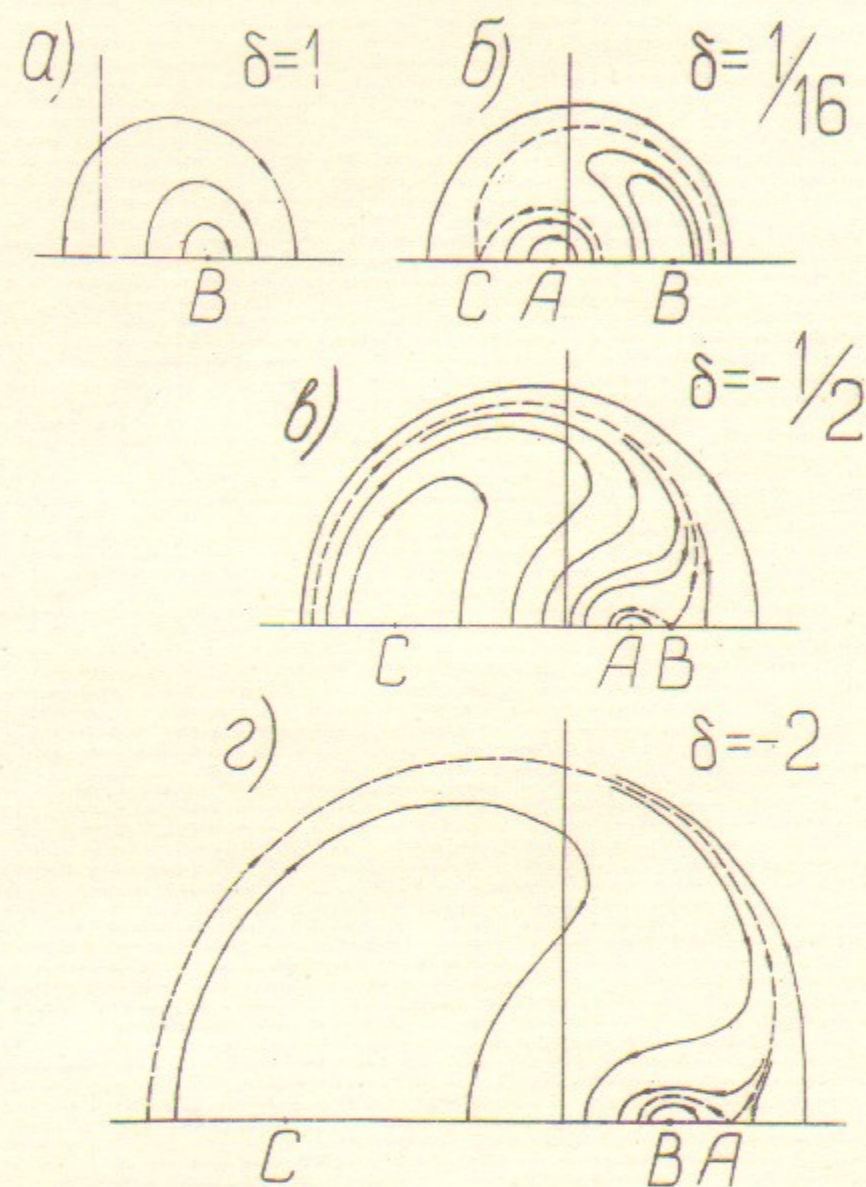


Рис. 1. Структура фазовой плоскости для "эффекта отрицательной массы" в бетатронном движении.

Работа поступила - 26 июля 1976г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ

Подписано и печати 22.9-1976г. МН 02973

Усл.0,6 печ.л., 0,55 учетно-изд.л.

Тираж 200 экз. Бесплатно

Заказ № 88.

Отпечатано на ротационте ИЯФ СО АН СССР