35

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76 - 59

Б.Г.Конопельченко

ЯВЛЕНИЯ СПАРИВАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ГРУППЫ СИММЕТРИИ

Новосибирск
1976

ЯВЛЕНИЯ СПАРИВАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ГРУППЫ СИММЕТРИИ

Б.Г.Конопельченко

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что существование спаривания и соответствующие свойства модельного гамильтониана связаны с существованием в модели бесконечной группы симметрии.

Явление спаривания, т.е. жесткой корреляции между квантовыми числами пары частиц, достаточно широко распространено. Наиболее известными примерами являются куперовские пары в сверхпроводимости [I] и спаривание по моменту в теории ядра [2] .

В настоящей заметке мы хотим обратить внимание на то, что предположение о существовании спаривания и соответствующих свойствах гамильтониана эквивалентны предположению о существовании определенной динамической симметрии у системы.

Рассмотрим теорию сверхпроводимости в приближении Бардина-Купера-Шриффера [I] . Гамильтониан БКШ, являющийся следствием ряда динамических предположений, равен

$$H = \sum_{\vec{p}, s} \left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \mu\right) a_s^+(\vec{p},t)\, a_s(\vec{p},t) - \frac{1}{2V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}', s, s'} \mathcal{Y}(\vec{p},\vec{p}')\, a_s^+(\vec{p},t)\, a_{-s}^+(-\vec{p},t)\, a_{-s'}(-\vec{p}',t)\, a_{s'}(\vec{p}',t), \qquad (I)$$

где $\mathcal{Y}(\vec{p},\vec{p}')$ - некоторая функция, μ - химический потенциал, V - объём.

Нетрудно убедиться, что гамильтониан (I) инвариантен относительно преобразований

$$a_s(\vec{p},t) \to a'_s(\vec{p},t) = \exp i f(\vec{p}) \cdot a_s(\vec{p},t), \qquad (2)$$

где $f(\vec{p})$ - произвольная скалярная вещественная нечётная функция импульса. Преобразования (2) образуют бесконечную группу. Разлагая функцию $f(\vec{p})$ в ряд по степеням импульса p_i (i =I,2,3) убеждаемся, что группа преобразований (2) эквивалентна бесконечнопараметрической абеливой группе

$$a_s(\vec{p},t) \to a'_s(\vec{p},t) = \exp\{ i \alpha_{i_1 \dots i_{2n+1}} p_{i_1} \cdots p_{i_{2n+1}} \} \cdot a_s(\vec{p},t), \qquad (3)$$
$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

где $\alpha_{i_1 \dots i_{2n+1}}$ (коэффициенты разложения функции $f(\vec{p})$)- параметры преобразований. Перестановочные соотношения генераторов $T_{i_1 \dots i_{2n+1}}$ преобразований (3) с операторами $a_s(\vec{p},t)$ имеют вид

$$\left[T_{i_1 \dots i_{2n+1}},\ a_s(\vec{p},t) \right] = p_{i_1} \cdots p_{i_{2n+1}}\, a_s(\vec{p},t). \qquad (4)$$

Тензорные операторы $T_{i_1 \dots i_{2n+1}}$ $(n=0,1,2,\dots)$ равные

$$T_{i_1 \dots i_{2n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{q},s} q_{i_1} \cdots q_{i_{2n+1}} \left(a^{+}_{s}(\vec{q},t) a_{s}(\vec{q},t) - a^{+}_{-s}(-\vec{q},t) a_{-s}(-\vec{q},t) \right)$$

образуют бесконечный набор сохраняющихся величин для рассматриваемой системы*.

Предполагая инвариантность основного состояния относительно преобразований (3) и используя (4), находим уравнения для функций Грина $\Gamma(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) = \langle a^{+}(\vec{p}_1) \cdots a(\vec{p}_n) \rangle$:

$$\left(-p^{1}_{i_1} \cdots p^{1}_{i_m} \pm \dots \pm p^{e}_{i_1} \cdots p^{e}_{i_m} \pm \dots + p^{n}_{i_1} \cdots p^{n}_{i_m} \right) \Gamma(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_e, \dots, \vec{p}_n) = 0 \quad (5)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, \dots$; знак + перед e-тым членом соответствует оператору $a(\vec{p}_e)$ в $\Gamma(\dots \vec{p}_e \dots)$ знак (–) – оператору $a^{+}(\vec{p}_e)$ в $\Gamma(\dots \vec{p}_e \dots)$. Из уравнений (5) следует, что $\Gamma(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)$ имеет вид

$$\Gamma(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{2n}) = \sum_i \delta(-\vec{p}_1 \pm \vec{p}_2) \cdots \delta(\pm \vec{p}_e \pm \vec{p}_{e+1}) \cdots \delta(\pm \vec{p}_{2n-1} + \vec{p}_{2n}) \tilde{\Gamma}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{2n}),$$

$$\Gamma(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{2n+1}) = \sum_i \delta(\vec{p}_i) \delta(-\vec{p}_1 \pm \vec{p}_2) \cdots \delta(\pm \vec{p}_{2n} + \vec{p}_{2n+1}) \tilde{\Gamma}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{2n+1}),$$

где $\sum_i$ – обозначает суммирование по всевозможным разбиениям четного числа импульсов на независимые пары; $\tilde{\Gamma}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{2n})$, – $\tilde{\Gamma}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{2n+1})$ – произвольные функции.

Заметим далее, что операторы рождения и уничтожения куперовской пары $a^{+}_{s}(\vec{p},t) a^{+}_{-s}(-\vec{p},t)$ и $a_{-s}(-\vec{p},t) a_{s}(\vec{p},t)$ инвариантны относительно преобразований (2) и следовательно, во всех инвариантных относительно преобразований (2) выражениях фигурируют именно такие комбинации, а не операторы $a^{+}_{s}(\vec{p},t)$, $a_{s'}(\vec{p}',t)$, по отдельности. Переход к квазичастицам (преобразование Боголюбова) не нарушает симметрию относительно преобразований (2).

---

* Существование бесконечного набора интегралов движения, а именно, что $\frac{d}{dt} \left\{ a^{+}_{s}(\vec{p},t) a_{s}(\vec{p},t) - a^{+}_{-s}(-\vec{p},t) a_{-s}(-\vec{p},t) \right\} = 0$ было отмечено в работе [3].

Итак, мы видим, что учёт инвариантности гамильтониана (I) относительно группы преобразований (2) приводит к ряду следствий динамического характера.

С другой стороны можно показать, что требование инвариантности четырехфермионного гамильтониана относительно преобразований (2) (и градиентных преобразований) фиксирует гамильтониан (I) с точностью до перенормировки кинетического члена. Далее, поскольку операторы $a^{+}_{s}(\vec{p},t) a^{+}_{-s}(-\vec{p},t)$ и $a_{-s}(-\vec{p},t) a_{s}(\vec{p},t)$ являются инвариантами преобразований (2), то требование инвариантности относительно таких преобразований эквивалентно предположению о возможности спаривания в системе.

Таким образом, инвариантность относительно бесконечной группы преобразований (2) является адекватной математической формулировкой основных предположений теории сверхпроводимости БКШ.

Существование спаривания в ядре между частицами с противоположными значениями проекции момента L_z [2] также может быть связано с инвариантностью модели относительно бесконечной группы преобразований, а именно преобразований:

$$\psi_{L_z} \to \psi'_{L_z} = \exp i f(L_z) \cdot \psi_{L_z}$$

где $f(L_z)$ – произвольная скалярная нечётная функция проекции момента L_z. Следствия, вытекающие из инвариантности относительно преобразований (6) аналогичны соответствующим результатам в рассмотренной выше теории БКШ.

Аналогичным образом, используя бесконечные группы преобразований

$$\psi_{\alpha} \to \psi'_{\alpha} = \exp i f(\alpha) \cdot \psi_{\alpha} \qquad (6)$$

можно рассмотреть модели со спариванием по любому квантовому числу α.

Мы видим, что группы симметрии вида (2) или (6) естественно называть динамическими группами, поскольку они связаны со специальными свойствами динамики системы.

В заключение отметим, что бесконечными динамическими группами симметрии типа (2) обладает целый ряд как локальных так и нелокальных уравнений [4] .

ЛИТЕРАТУРА

I. Дж.Шриффер. Теория сверхпроводимости, "Наука", 1970.

2. А.Лейн, Теория ядра, Атомиздат, 1967.

3. Н.Н.Боголюбов. К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости. Препринт Р-511 ОИЯИ, Дубна (1960).

4. Б.Г.Конопельченко. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 1976.

Работа поступила - 10 мая 1976 г.

Ответственный за выпуск - С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати 22.VI-1976г. МН 02842
Усл. 0,4 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 59.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР