И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

25

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76 - 45

В.М.Катков, В.М.Страховенко

# ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Новосибирск
1976

И Н С Т И Т У Т

ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

25

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76 - 45

В.М.Катков, В.М.Страховенко

# ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Новосибирск

1976

В.М.Катков, В.М.Страховенко

# ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ.

## А Н Н О Т А Ц И Я

Изучается воздействие магнитного поля на процесс тормозного излучения при столкновении электронов(позитронов) высокой энергии. Вычисляется спектр тормозных фотонов, который может существенно изменяться под влиянием поля.

## I. Качественная картина влияния магнитного поля на тормозное излучение.

При столкновении ультрарелятивистских электронов тормозное излучение формируется на длине, зависящей от частоты тормозного фотона(длина когерентности). Если на этой длине частицы подвергаются внешнему воздействию, то процесс излучения перестраивается; примером служит эффект Ландау-Померанчука [1,2]. В частности, такое воздействие может оказывать внешнее, например, магнитное поле.

Учет влияния магнитного поля на процесс тормозного излучения проводился впервые в [3] в рамках метода эквивалентных фотонов, однако для практических применений логарифмическая точность, даваемая этим методом, оказывается недостаточной; кроме того, необходимо учитывать комптоновское рассеяние магнито-тормозных фотонов на частицах встречного пучка. Настоящая работа посвящена детальному изучению этих эффектов.

Процессы, происходящие во внешнем поле характеризуются параметром[1)] $\chi = e\sqrt{|(F_{\mu\nu}p^{\nu})^2|}/m^3$. В магнитном поле $H$, $\chi=\gamma H/H_0$, где $H_0 = m^2/e$, $\gamma = \varepsilon/m \gg 1$, $\varepsilon$ -энергия частицы, $m$ -ее масса. Для электрона $H_0 \simeq 4{,}41\cdot 10^{13}$ Гс. Ниже будем считать $\chi \ll 1$, что отвечает современной экспериментальной ситуации. При этом максимум спектра магнито-тормозного излучения(МТИ) лежит при $\omega' \sim \omega_c = \chi\varepsilon$, а для бóльших частот спектр спадает экспоненциально. Формирование МТИ происходит на длине $l_H$, для которой элементарные оценки (см., например, [4] ) дают значение $l_H = (\gamma^2/\omega')(\omega'/\omega_c)^{2/3} = 1/\omega'\vartheta_H^2$, где $\omega'$ -частота МТИ-фотона, $\vartheta_H = (\omega_c/\omega')^{1/3}/\gamma$ -угол раствора конуса МТИ.

При выключенном поле основной вклад в сечение тормозного излучения дают виртуальные фотоны с частотой

$$q_0 \sim \frac{m^2\omega}{4\varepsilon(\varepsilon-\omega)} \equiv q_0' \tag{I.I}$$

где $\omega$ - частота реального фотона. Для блока излучения(описывающего поглощение виртуального фотона и испускание реального) длиной когерентности является $l_2 \sim 1/q_0' \sim \gamma^2(1-\frac{\omega}{\varepsilon})/\omega$ (мы не рассматриваем жесткий конец спектра). Тогда как формирование виртуального кванта характеризуется длиной $l_v \sim 1/q_0'\vartheta_v^2$, где $\vartheta_v$ -угол, под которым он "излучается" электроном отдачи или, в терминах передач, $l_v \sim q_0'/|q^2|$

---

1) Здесь и в дальнейшем $\hbar = c = 1$.

($q$ – 4-импульс виртуального фотона). Напомним, что в свободном случае $q^2$ меняется в области $q^2 \le -q^2_{min}$, где $q^2_{min} = (q'_0/\gamma)^2$. Параметром влияния поля на процесс будет отношение соответствующей ($\ell_2$, $\ell_v$) длины когерентности к $\ell_H$; это сравнение должно, разумеется, проводиться при одинаковых частотах.

Для блока излучения получаем:

$$\frac{\ell_2}{\ell_H} \sim \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{1/3} \tag{I.2}$$

Малость параметра $\chi$ дает возможность в широкой области изменения $\omega$ считать $\ell_2/\ell_H \ll 1$, что позволяет пренебрегать влиянием поля на блок излучения; кроме того, поскольку при этом $\omega \gg \omega_c$, то можно пренебречь и вкладом собственно магнито-тормозного излучения в спектр реальных фотонов. В дальнейшем условие $\ell_2/\ell_H \ll 1$ предполагается выполненным. Используя полученные выше оценки, имеем:

$$\frac{\ell_v}{\ell_H} \sim \frac{q'_0}{|q^2|} \cdot \frac{q'_0}{\gamma^2}\left(\frac{\omega_c}{q'_0}\right)^{2/3} = \frac{q^2_{min}}{|q^2|}\left(\frac{\omega_c}{q'_0}\right)^{2/3} \tag{I.3}$$

Поскольку в (I.3) значения $q^2$ отвечают кинематической области свободного процесса $|q^2| \ge q^2_{min}$, то, во всяком случае, поле не оказывает влияния на процесс, если $(\omega_c/q'_0)^{2/3} \ll 1$, т.е. величина $(\omega_c/q'_0)^{2/3}$ является параметром этого влияния. Далее из (I.3) видно, что поле не оказывает воздействия при $|q^2| \gg q^2_{min}(\omega_c/q'_0)^{2/3}$, т.е. для достаточно больших $q^2$ механизм формирования виртуального фотона остается кулоновским.

Эта картина определяет, в частности, возможный способ расчета, которым мы и воспользуемся: выбираем некое $q^2_c < 0$, такое что $q^2_{min} \ll |q^2_c| \ll m^2$; в области $q^2 > q^2_c$ учитываем действие поля, а в области $q^2 < q^2_c$ этим действием пренебрегаем. Сумма полученных выражений, в которой $q^2_c$ сокращается, дает искомый результат.

## 2. Расчет вклада виртуальных промежуточных фотонов.

В соответствии с качественной картиной, полученной в предыдущем разделе, запишем дифференциальное сечение тормозного излучения одного из электронов 2) в следующем виде (проведено усреднение по поляризациям начальных и суммирование по поляризациям конечных частиц):

2) Вклад другого электрона такой же, см. [4].



$$d\sigma = -\frac{e^2}{(2\pi)^5}\int \frac{d^4q}{q^4}\,\frac{d^3p_4}{2\varepsilon_4}\,\frac{d^3k}{2\omega}\,\cdot$$
$$\cdot\,\frac{\delta(p_2+q-p_4-k)}{\sqrt{(p_1p_2)^2-m^2}}\,\frac{1}{4}K^{\mu\nu\rho\sigma}(p_2,p_4,q,k)\,g_{\rho\sigma}J_{\mu\nu} \tag{2.I}$$

Здесь $K^{\mu\nu\rho\sigma}$ – комптоновский тензор спинорной частицы, описывающий переход фотона с импульсом $q(q_0,\vec{q})$ и электрона с импульсом $p_2(\varepsilon_2,\vec{p}_2)$ в фотон, импульс которого $k(\omega,\vec{k})$ и электрон с импульсом $p_4$. Явный вид $K^{\mu\nu\rho\sigma}g_{\rho\sigma}$ см., например, в [4] стр. 265. Отметим еще раз, что, поскольку $K^{\mu\nu\rho\sigma}$ относится к блоку излучения, то влияние поля в нем не учитывается. Поле входит в $J_{\mu\nu}$ – токовый тензор 3) электрона отдачи, просуммированный по конечным состояниям этого электрона:

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{(2\pi)(\varepsilon-q_0)}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\left(p\left(\frac{\tau}{2}\right)-\frac{q}{2}\right)_\mu\left(p\left(-\frac{\tau}{2}\right)-\frac{q}{2}\right)_\nu\,\cdot$$
$$\cdot\,\exp\left\{i\int_{-\tau/2}^{\tau/2}dx\left[\varepsilon-q_0-\sqrt{(\varepsilon-q_0)^2-q^2+2qp(x)}\right]\right\} \tag{2.2}$$

На самом деле предэкспоненциальный фактор тензора $J_{\mu\nu}$ для спинорной частицы (электрона) имеет более сложный вид и здесь приведено выражение для "скалярного электрона", однако опущенные члены не дают вклада в соответствии с общей ситуацией: спин частицы отдачи оказывается в данной задаче несущественным.

Поле входит в $J_{\mu\nu}$ через зависимость импульса $p(\tau)$ от времени. Так как вклад дают малые времена $\tau$, то можно использовать разложение $p(x) = p(0) + \dot{p}(0)x + \ddot{p}(0)x^2/2$ с начальным условием $p(0) = p_1$, где $p_1 = p_1(\varepsilon_1, \vec{p}_1)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$. Тогда аргумент экспоненты примет вид:

$$-\frac{i\tau}{2(\varepsilon-q_0)}\left[2qp_1 - q^2 + (\vec{q}\,\vec{p}_1)\frac{w^2\tau^2}{12}\right] \tag{2.3}$$

3) Такой тензор был использован в [5], его явный вид следует из общих правил квазиклассического операторного метода, изложенных в [4]

$$\int\limits_{zz_1\left(1+\frac{x}{z^2}\right)}^{\tilde{y}_0} d\tilde{y} \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds\, \frac{1}{x} \exp\left[-i\,\frac{szz_1}{x}\left(\frac{\tilde{y}}{zz_1}+\frac{s^2}{3}\right)\right]\left[\frac{x}{z^2}+1-\right.$$

$$\left.-\frac{\tilde{y}}{zz_1}+s^2\right] = -2\int\limits_0^{\infty}\frac{ds}{s}\left[\sin\varphi_1-\sin\varphi_2\right]\left(\frac{x}{z^2}+1+2s^2\right) \qquad (2.\mathrm{II})$$

где $\quad \varphi_1 = \frac{s}{a}\left(z+\frac{x}{z}+\frac{zs^2}{3}\right), \quad \varphi_2 = \frac{s}{a}\left(\mathcal{A} \quad \frac{zs^2}{3}\right),$

$$\mathcal{A} = \tilde{y}_0/z_1, \quad a = x/z_1 = \omega_c/q_0'$$

Нижний предел интегрирования по $z$ можно с хорошей точностью заменить на $1$ ,а верхний равен $\mathcal{A} \gg 1$ .Интегрирование по $x$ проводится от $x_c$ до $\infty$ ,причем, $x_c = q_c^2/q_{min}^2 < 0$ и $|x_c| \gg 1$ .Интеграл по $x$ представим в виде суммы трех интегралов:

$$\int\limits_{x_c}^{\infty} dx = \int\limits_{x_c}^{-1} dx + \int\limits_{-1}^{1} dx + \int\limits_{1}^{\infty} dx \qquad (2.\mathrm{I2})$$

В первом из них сделаем замену $x \to -x$ и разобьем интервал интегрирования по $z$ на $[1,\sqrt{x}]$ и $[\sqrt{x},\mathcal{A}]$ ,тогда $d\sigma$ примет вид:

$$d\sigma = \frac{2\alpha^3}{m^2}\left(1-\frac{\omega}{\varepsilon}\right)\frac{d\omega}{\omega}\left[N_{11}+N_{12}+N_{22}+N_{21}\right]+d\sigma_0\left(q^2 \le q_c^2\right) \qquad (2.\mathrm{I3})$$

где

$$N_{11} = \frac{1}{\pi}\int\limits_1^{|x_c|}\frac{dx}{x^2}\int\limits_1^{\sqrt{x}} dz\, U(z)\int\limits_0^{\infty} ds\left[\sin\varphi_1(x\to -x)-\right.$$

$$\left.-\sin\varphi_2\right]\left[\frac{1}{s}\left(1-\frac{x}{z^2}\right)+2s\right], \qquad (2.\mathrm{I4})$$

$$N_{22} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}\int\limits_1^{\mathcal{A}} dz\, U(z)\int\limits_0^{\infty} ds\left[\sin\varphi_1-\right.$$

здесь $\quad \left.-\sin\varphi_2\right]\left[\frac{1}{s}\left(1+\frac{x}{z^2}\right)+2s\right],$

$$U(z) = v - \frac{4}{z}\left(1-\frac{1}{z}\right); \quad \left(1+\frac{x}{z^2}\right)\frac{1}{s}+2s = \mathcal{U}_1$$

Подынтегральные выражения у $N_{11}$ , $N_{12}$ и $N_{22}$ , $N_{21}$ попарно совпадают; только интегрирование по $z$ в $N_{12}$ проводится от $\sqrt{x}$ до $\mathcal{A}$ , а в $N_{21}$ интегрирование по $x$ ведется от $1$ до $\infty$ .При таком разбиении,во-первых,выделен интервал,содержащий точку $x = 0$ ( $N_{22}$ ) и, во-вторых,в каждом интеграле коэффициент при $s$ в $\varphi_1$ имеет опре-



деленный знак во всей области интегрирования,что позволяет выразить интегралы по $s$ через известные функции.Интегралы по $s$ берутся с помощью следующих соотношений:

$$\int\limits_0^{\infty} ds\cdot s\,\sin\left[\frac{3}{2}b\left(s+\frac{s^3}{3}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}K_{2/3}(b), \quad \int\limits_0^{\infty} ds\cdot s\,\sin\left[\frac{3}{2}b\left(s-\frac{s^3}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[J_{2/3}(b)-J_{-2/3}(b)\right]; \quad \int\limits_0^{\infty} ds\,\cos\left[\frac{3}{2}b\left(s+\frac{s^3}{3}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}K_{1/3}(b), \qquad (2.\mathrm{I5})$$

$$\int\limits_0^{\infty} ds\,\cos\left[\frac{3}{2}b\left(s-\frac{s^3}{3}\right)\right] = \frac{\pi}{3}\left[J_{1/3}(b)+J_{-1/3}(b)\right],$$

здесь $J_\nu$ , $K_\nu$ - соответственно функции Бесселя и Макдональда.

Член в $\mathcal{U}_1 \backsim s$ можно непосредственно проинтегрировать с помощью (2.I5) (верхняя строчка),а для функций,получающихся при интегрировании члена $\backsim 1/s$ в $\mathcal{U}_1$ можно составить дифференциальные уравнения,решения которых выражаются через интегралы (2.I5) (нижняя строчка).При этом соответствующая функция определяется с точностью до константы,значение которой можно установить,например, при $a \to 0$ .Поскольку во всех интегралах,кроме $N_{11}$ ,коэффициенты при $s$ в $\varphi_1$ и $\varphi_2$ совпадают по знаку,а в $N_{11}$ они,напротив,имеют разные знаки и $const = \frac{\pi}{2}\,sgn$ (коэффициент при $s$ ),то константы сокращаются всюду,кроме $N_{11}$ ,где они,складываясь,дают $-\pi$ .Переходя к пределу $\mathcal{A} \to \infty$ ,получаем для $N_{11}$ , $N_{12}$ , ...

$$N_{11} = \frac{1}{\pi}\int\limits_1^{|x_c|}\frac{dx}{x^2}\int\limits_1^{\infty} dz\, U(z)\left(1-\frac{x}{z^2}\right)\left(\Psi(q)\frac{\pi}{3}-\pi\right)$$

$$N_{12} = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int\limits_1^{|x_c|}\frac{dx}{x^2}\int\limits_{\sqrt{x}}^{\infty} dz\, U(z)\left(1-\frac{x}{z^2}\right)F\left(b(-x)\right)$$

$$N_{22} = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}\int\limits_1^{\infty} dz\, U(z)\left(1+\frac{x}{z^2}\right)F\left(b(x)\right) \qquad (2.\mathrm{I6})$$

$$N_{21} = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}\int\limits_1^{\infty} dz\, U(z)\left(1+\frac{x}{z^2}\right)F\left(b(x)\right)$$

где

$$\Psi(g) = 2\left(J_{2/3}(g) - J_{-2/3}(g)\right) + \int_g^\infty \left(J_{1/3}(u) + J_{-1/3}(u)\right) du \,,$$

$$F(b) = 2K_{2/3}(b) - \int_b^\infty K_{1/3}(u)\,du \,, \tag{2.17}$$

$$b(x) = h\left(1+\frac{x}{z^2}\right)^{3/2}, \quad b(-x) = h\left(1-\frac{x}{z^2}\right)^{3/2},$$

$$g = h\left(\frac{x}{z^2}-1\right)^{3/2}, \quad h = 2z/3a$$

Заметим,что член $\backsim -\pi$ в $N_{11}$ (с учетом общего множителя,стоящего в (2.13)) точно равен вкладу в свободное сечение области передач $q_c^2 \le q^2 \le q_{min}^2$ .Сумма этого члена и $d\sigma_0(q^2 \le q_c^2)$ в (2.13) дает все свободное сечение,имеющее вид:

$$d\sigma_0 = \frac{2\alpha^3}{m^2}\left(1-\frac{\omega}{\varepsilon}\right)\frac{d\omega}{\omega}\left(v-\frac{2}{3}\right)\left(\ln\frac{m^2}{q_{min}^2}-1\right) \tag{2.18}$$

После выделения $d\sigma_0$ , в оставшихся интегралах ( поскольку они сходятся на $x \ll |x_c|$ )можно перейти к пределу $|x_c| \to \infty$ , чем завершается "сшивка" областей интегрирования.

Таким образом сечение состоит из двух слагаемых: $d\sigma = d\sigma_0 + d\sigma_H$. Рассматривая величину $d\sigma_H$ ,замечаем,что интеграл по $x$ в $N_{22}$ , вообще говоря,расходится в точке $x=0$ ,т.е. для реальных промежуточных фотонов.Вспомним,что в пропагаторе фотона стояло слагаемое $i\varepsilon$ ,задававшее обход точки $x=0$ ,тогда нам (в $N_{22}$ ) нужно взять интеграл следующего вида

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{1}\frac{dx\, f(x)}{x^2+\varepsilon^2} \tag{2.19}$$

где $f(x) = (1+x/z^2)\,F(b(x))$ ,причем, $f(0) = F(h) \ne 0$
Проводя в (2.19) интегрирование по частям,получим:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{1}\frac{dx\, f(x)}{x^2+\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\pi}{\varepsilon}f(0) - \left[f(1)+f(-1)\right] + \int_0^1 \frac{dx}{x}\frac{d}{dx}\left(f(x)+f(-x)\right) \tag{2.20}$$

С другой стороны, если бы мы раньше(например,еще в амплитуде) вы-



делили полюсной ( $\backsim \delta(q^2)$ ) член,то вклад его в интеграл(2.19) был бы равен

$$\pi^2\int_{-1}^{1}dx\, f(x)\,\delta^2(x) = \pi^2 f(0)\,\delta(0)$$

причем, поскольку

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ipx-|p|\varepsilon}\,dp$$

где $\varepsilon$ имеет тот же смысл,что и в (2.20),вклад полюсного члена равен $\lim_{\varepsilon\to 0}\pi f(0)/\varepsilon$ .По этой причине мы отождествляем конечную часть (2.20) с вкладом виртуальных ( $q^2 \ne 0$ ) фотонов[4].

К вопросу о вкладе реальных фотонов мы еще вернемся; что касается виртуальных,то после того как в $N_{22}$ их вклад выделен,никаких проблем больше не остается и после элементарных,хотя и несколько громоздких вычислений (удобно проинтегрировать в (2.16) по частям по переменной $x$ ) получаем для $d\sigma_H$ (понимая здесь и в дальнейшем под $d\sigma_H$ вклад виртуальных фотонов) :

$$d\sigma_H = -\frac{2\alpha^3}{m^2}\left(1-\frac{\omega}{\varepsilon}\right)\frac{d\omega}{\omega}\int_1^\infty dz\, U(z)\,Q(h) \tag{2.21}$$

где $h = 2z/3a$ , а $Q(h)$ имеет вид:

$$Q(h) = 1 + \int_0^\infty du\left\{\frac{1}{3}\left[\left(J_{1/3}(u)+J_{-1/3}(u)\right)L_1 + \frac{\sqrt{3}}{\pi}K_{1/3}(u)L_2\right] + u^{1/3}h^{2/3}\frac{1}{2}\left[\left(J_{-2/3}(u)-J_{2/3}(u)\right)L_1 + \frac{\sqrt{3}}{\pi}K_{2/3}(u)L_2\right]\right\}; \tag{2.22}$$

$$L_1 = \ln\left[1+\left(\frac{u}{h}\right)^{2/3}\right], \quad L_2 = \ln\left|1-\left(\frac{u}{h}\right)^{2/3}\right|$$

Интегралы по $z$ в (2.21) от $U(z)L_1$ , $U(z)L_2$ берутся в элементарных функциях,однако,ответ становится тогда малообозримым и мы не будем приводить его в такой форме.

При $a \gg 1$ сечение $d\sigma = d\sigma_0 + d\sigma_H$ имеет вид:

4) Аналогичная процедура применялась в[5] ;сформулированное там правило для отождествления вклада виртуальных фотонов по существу совпадает с использованным здесь.

$$d\sigma = \frac{2\alpha^3}{m^2}\left(1-\frac{\omega}{\varepsilon}\right)\frac{d\omega}{\omega}\left\{\left(v-\frac{2}{3}\right)\left[\ln\left(\frac{m^2}{q^2_{min}a^{2/3}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - C_1\right] + \frac{2}{2\chi} - \frac{9}{4}\,\frac{\Gamma(2/3)}{(3a)^{4/3}}\left(v+\frac{6}{5}\right)\right\} \qquad (2.23)$$

где $C_1 = \frac{4-2C-\ln 3}{3} \simeq 0{,}58$, $C = 0{,}577...$- постоянная Эйлера,

$$a = 4\gamma^2\chi\left(\frac{\varepsilon}{\omega}-1\right), \quad v = \left(1-\frac{\omega}{\varepsilon}\right) + \left(1-\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^{-1}$$

Подробности вычислений для этого случая приведены в Приложении Из общих соображений, изложенных в разделе I, следовало ожидать, что степенные поправки в (2.23) будут начинаться с $a^{-2/3}$ ; такие члены фигурировали в расчете, однако, произошло их взаимное сокращение, носящее, на наш взгляд, случайный характер.

Чтобы дать представление о величине эффекта, приведем результаты вычислений согласно (2.23), (2.I8) отношения $d\sigma_H / d\sigma_0$ для реалистических значений параметров: $\varepsilon = 3{,}5$ ГэВ, $\omega/\varepsilon = 0{,}01$, $H = 10^4$ Гс., тогда $a >> 1$ и $d\sigma_H/d\sigma_0 \simeq -0{,}14$, т.е. в этом случае поле уменьшает сечение на 14 %. Заметим, что при этом вклад в это отношение члена $\backsim a^{-4/3}$ составляет примерно $2{,}5\cdot 10^{-8}$, т.е. пренебрежимо мал. Приведем еще выражение для $d\sigma_H$ при $a << 1$

$$d\sigma_H = \left(\frac{4}{3}a\right)^2 \frac{\alpha^3}{m^2}\left(1-\frac{\omega}{\varepsilon}\right)\frac{d\omega}{\omega}\left(v-\frac{3}{5}\right) \qquad (2.24)$$

## 3. Вклад реальных промежуточных фотонов.

Реальные ( $q^2 = 0$ ) промежуточные фотоны (РПФ) излучаются "электроном отдачи" магнито-тормозным образом, а затем происходит их комптоновское рассеяние на частицах встречного пучка. МТИ-фотоны испытывают почти лобовое соударение с частицами встречного пучка, так как поперечные размеры сталкивающихся пучков малы по сравнению с $R$ - радиусом кривизны траектории, а МТИ-фотоны излучаются по отношению к скорости под углами $\lesssim \vartheta_H << 1$ . Тогда сечение комптоновского рассеяния зависит только от частоты налетающего МТИ-фотона:



$$d\sigma_c = 2\pi\frac{\alpha^2}{m^2}\,\frac{d\omega}{\omega z}\left(1-\frac{\omega}{\varepsilon}\right)U(z) \qquad (3.I)$$

где $z = q_0/q_0'$ , $U(z)$ определено в (2.I4)

Полное число событий за одно прохождение электрона через встречный пучок дается выражением

$$\frac{dN_2}{d\omega} = n_e \int \frac{d\sigma_c}{d\omega}\, d\chi_{эф} \qquad (3.2)$$

здесь $n_e$- плотность встречного пучка, которую мы считаем постоянной во всем его объеме, а $d\chi_{эф}$ имеет вид

$$d\chi_{эф} = \frac{\alpha}{(2\pi)^2}\,\frac{d^3q}{q_0}\left|\int dt\,\frac{p^\mu(t)}{\varepsilon}\exp\left(iqx(t)\right)\sqrt{\ell(t,\vec{q}/q_0,Z)}\right|^2 \qquad (3.3)$$

Величина $d\chi_{эф}$ имеет смысл полной длины пробега внутри встречного пучка всех реальных фотонов с данным $\vec{q}$ , излученных "электроном отдачи". Величина $\ell(t,\vec{q}/q_0,Z)$ представляет собой длину пробега фотона, излученного в момент времени $t$ ; $Z$ обозначает набор параметров, характеризующих встречные пучки и положение электрона в пучке. Существенная зависимость величины $\ell(t,...,Z)$ от параметров $Z$ не позволяет, вообще говоря, провести вычисления без конкретного знания условий постановки данного эксперимента, поэтому мы ограничимся здесь качественным описанием поведения спектра с учетом вклада РПФ.

Начнем с некоторой частоты $\omega$ , такой что $\omega_c << \omega << \varepsilon$ ; напомним, что $a = 4\gamma^2\chi(\varepsilon/\omega - 1)$ и для $\omega << \varepsilon$ , $a \simeq 4\gamma^2\omega_c/\omega$ . Условие $\omega_c/\omega << 1$ необходимо для применимости нашего расчета, однако, за счет большой величины множителя $4\gamma^2$ , $a$ может принимать значения $a >> 1$ . Итак для указанной частоты $a >> 1$ и спектр хорошо описывается формулой (2.23) : кривая частотного распределения идет заметно ниже аналогичной кривой в отсутствии поля. При дальнейшем увеличении частоты растет вклад РПФ. Например, для выбранных выше значений $\varepsilon = 3{,}5$ ГэВ , $\omega/\varepsilon = 0{,}01$ , $H = 10^4$ Гс., грубая оценка (при типичных параметрах пучков) показывает, что РПФ дают вклад в число событий по величине сравнимый с вкладом постоянной $C_1$ в (2.23). Наибольший вклад РПФ приходится на область частот $\omega/\varepsilon \sim 4\gamma^2\chi/(1+4\gamma^2\chi)$ ; в зависимости от величины $4\gamma^2\chi$ эта область может располагаться в любой части спектра. Для таких частот

$a \sim 1$ (надо пользоваться выражением (2.2I) для $d\sigma_H$), угол $\vartheta_H \sim 1/\gamma$ и если принять, что длина пучка $\ell \sim 15 \div 25$ см., $\gamma \sim 10^3 \div 10^4$, то в первом приближении можно считать $\ell(t, \vec{q}/q_0, z)$ в (3.3) не зависящей от углов вылета МТИ-фотона и примерно равной длине пучка $\ell$, тогда( для поперечных размеров пучка $\sim 10^{-2} \div 10^{-1}$ см. )

$$\frac{dN_\gamma}{d\omega} \sim n_e \ell^2 \frac{d\Sigma}{d\omega} \tag{3.4}$$

где

$$d\Sigma = \frac{4\alpha^3 \gamma}{3\sqrt{3} m^2 R a^2} \frac{d\omega}{\omega}\left(1 - \frac{\omega}{\varepsilon}\right) \int_1^\infty dz\, \mathcal{U}(z) \int_1^\infty dx\, K_{5/3}\left(\frac{2zx}{3a}\right)$$

Для сравнения вкладов виртуальных и реальных фотонов нам понадобится выражение для числа событий за одно прохождение электрона через встречный пучок, обусловленных обменом виртуальными фотонами:

$$dN_v = dN_0 + dN_H$$

$$\frac{dN_v}{d\omega} = n_e \cdot \frac{d\sigma}{d\omega} \cdot \ell \tag{3.5}$$

где $d\sigma/d\omega = d\sigma_0/d\omega + d\sigma_H/d\omega$ см. (2.I8), (2.2I).

Сравним $dN_\gamma/d\omega$ (3.4) и $dN_0/d\omega$ (3.5) при $a \simeq 1$; двойной интеграл в (3.4) будем считать примерно совпадающим с величиной $v \approx \frac{2}{3}$, фигурирующей в $d\sigma_0$ (2.I8). Получаем

$$\frac{dN_\gamma}{d\omega} \Big/ \frac{dN_0}{d\omega} \sim C_2 \frac{\gamma \ell}{R \ln 1/\chi} \tag{3.6}$$

где $C_2$ - некоторое число $\sim 0,1$.

Для уже использованных значений $H$, $\varepsilon$ и $\ell \simeq 20$ см., отношение (3.6) порядка единицы. Сделанная нами грубая оценка показывает, что в указанной области частот спектральная кривая может идти значительно выше кривой, отвечающей полю $H = 0$ за счет вклада РПФ.

Таким образом изменение спектра по сравнению со случаем поля $H = 0$, обусловленное вкладом виртуальных фотонов, имеет наибольшую величину для малых частот и с ростом частоты падает. Пока выполняется условие $a \gg 1$, это падение происходит логарифмическим образом. Вклад РПФ, напротив, увеличивается с ростом частоты и достигает максимума при $\omega/\varepsilon \sim 4\gamma^2\chi/(1+4\gamma^2\chi)$; с ростом величины $\gamma^2\chi \propto \gamma^3 H$ положение этого максимума перемещается в область более высоких частот. В области максимального вклада РПФ имеется "хвост" вклада виртуальных фотонов, относительная величина которого мала по сравнению с вкладом РПФ. В свою очередь, вклад РПФ имеет "хвост" в сторону меньших частот.



Отметим еще, что при фиксированной частоте $\omega$ относительный (по сравнению с вкладом виртуальных фотонов) вклад РПФ уменьшается с уменьшением геометрических размеров пучка.

Авторы выражают благодарность В.Н.Байеру и В.С.Фадину за многочисленные дискуссии и ценные замечания.

## Приложение.

Для получения старших при $a \gg 1$ членов разложения $d\sigma_H$, перепишем тождественно $Q(h)$ из (2.22) в виде:

$$Q(h) = Q_1(h) + Q_2(h) + Q_3(h)$$

где

$$Q_1(h) = 1 + \frac{1}{3}\int_0^\infty du \ln\left(\frac{u}{h}\right)^{2/3}\left(J_{1/3}(u) + J_{-1/3}(u) + \frac{\sqrt{3}}{\pi} K_{1/3}(u)\right),$$

$$Q_2(h) = \frac{1}{3}\int_0^\infty du \left\{\left(J_{1/3}(u) + J_{-1/3}(u)\right)\tilde{L}_1 + \frac{\sqrt{3}}{\pi} K_{1/3}(u)\tilde{L}_2\right\} + \frac{1}{2} h^{2/3}\int_0^\infty du \left\{J_{-2/3}(u) - J_{2/3}(u) + \frac{\sqrt{3}}{\pi} K_{2/3}(u)\right\} \ln\left(\frac{u}{h}\right)^{2/3} u^{1/3},$$

$$Q_3(h) = \frac{1}{2} h^{2/3}\int_0^\infty du\, u^{1/3}\left\{\left(J_{-2/3}(u) - J_{2/3}(u)\right)\tilde{L}_1 + \frac{\sqrt{3}}{\pi} K_{2/3}(u)\tilde{L}_2\right\}; \tag{П.I}$$

$$\tilde{L}_1 = \ln\left(1 + \left(\frac{h}{u}\right)^{2/3}\right), \quad \tilde{L}_2 = \ln\left|1 - \left(\frac{h}{u}\right)^{2/3}\right|$$

Отметим, что при интегрировании по $z$ в (2.2I) вклад дают значения $z \sim 1$, т.е. при $a \gg 1$ эффективные значения $h = 2z/3a \ll 1$. Если, кроме того, учесть, что интегралы по $u$ в (П.I) сходятся на $u \sim 1$, то ясно, что вклад $Q_3(h) \propto a^{-4/3}$. В первом из интегралов, составляющих $Q_2(h)$, разобьем область интегрирования по $u$ на две: $[0, u_0]$ и $[u_0, \infty]$, выбирая $h \ll u_0 \ll 1$. В первой области можно воспользоваться разложением $J_\nu(u)$, $K_\nu(u)$ при малых значениях аргументов, а во второй – разложить логарифмы. Оставляя старшие члены этих разложений, получаем:

$$\int_0^\infty du \left\{ \left(J_{1/3}(u)+J_{-1/3}(u)\right)\tilde{L}_1 + \frac{\sqrt{3}}{\pi} K_{1/3}(u)\tilde{L}_2 \right\} \simeq$$

$$\simeq \int_0^{u_0} du \left(\frac{u}{2}\right)^{-1/3} \ln\left|1-\left(\frac{h}{u}\right)^{2/3}\right| \frac{1}{\Gamma(2/3)} + \qquad (П.2)$$

$$+ h^{2/3}\int_{u_0}^\infty du\, u^{-2/3}\left[J_{1/3}(u)+J_{-1/3}(u) - \frac{\sqrt{3}}{\pi}K_{1/3}(u)\right]$$

Делая в первом из этих интегралов замену $u=hx^{3/2}$ приведем его к виду

$$\frac{2^{1/3}}{\Gamma(2/3)}\int_0^{(u_0/h)^{2/3}} dx \ln\left|1-\frac{1}{x^2}\right|\cdot\frac{3}{2} h^{2/3} \ll h^{2/3}$$

поскольку $\int_0^\infty dx \ln\left|1-\frac{1}{x^2}\right|=0$

Во втором из интегралов (П.2) можно заменить нижний предел на 0, так как, при $u\ll 1$ $\left[J_{1/3}(u)+J_{-1/3}(u)-\frac{\sqrt{3}}{\pi}K_{1/3}(u)\right]\sim u^{1/3}$ и $\int_0^{u_0} du\, u^{-2/3}[\dots]\sim u_0^{2/3}\ll 1$. Интегрируя теперь по частям, получаем

$$\frac{h^{2/3}}{3}\int_0^\infty du\, u^{-2/3}\left[J_{1/3}(u)+J_{-1/3}(u)-\frac{\sqrt{3}}{\pi}K_{1/3}(u)\right]=$$

$$= \frac{h^{2/3}}{3}\int_0^\infty \frac{du}{u}\, u^{1/3}[\dots] = \qquad (П.3)$$

$$= -\frac{h^{2/3}}{3}\int_0^\infty du\, u^{1/3}\ln u\left(J_{-2/3}(u)-J_{2/3}(u)+\frac{\sqrt{3}}{\pi}K_{2/3}(u)\right)$$

где мы воспользовались рекуррентными соотношениями для функций $J_\nu$, $K_\nu$. Сумма (П.3) и второго интеграла, составляющего $Q_2(h)$ в (П.1) равна нулю. Таким образом, члены $\sim a^{-2/3}$ в $Q(h)$ сокращаются

В выражении для $Q_1(h)$ интегралы берутся точно, если воспользоваться известными формулами

$$\int_0^\infty x^\mu J_\nu(x)\,dx = 2^\mu\,\Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty x^\mu K_\nu(x)\,dx = 2^{\mu-1}\,\Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right) \qquad (П.4)$$

и соотношениями, получающимися из (П.4) дифференцированием по $\mu$.



$$Q_1(h) = \frac{2}{3}\ln\frac{a}{z} + \frac{3-2C-\ln 3}{3} \qquad (П.5)$$

Оставшееся интегрирование по $z$ в (2.21), куда в качестве $Q(h)$ надо подставить (П.5), элементарно и для $d\sigma_H$ с этой точностью имеем

$$d\sigma_H = -\frac{2\alpha^3}{m^2}\left(1-\frac{\omega}{\varepsilon}\right)\frac{d\omega}{\omega}\left\{\left(v-\frac{2}{3}\right)\left(\ln a^{2/3}+\frac{1-2C-\ln 3}{3}\right)-\frac{2}{27}\right\} \qquad (П.6)$$

Вычисление вклада $\sim a^{-4/3}$ требует более аккуратного рассмотрения. Можно, например, взять сначала интегралы по $z$, а в оставшемся однократном интеграле по $u$ разбить область интегрирования на две и действовать как при получении (П.2). Результат такого расчета дает (2.23), где приводится сумма $d\sigma = d\sigma_0 + d\sigma_H$.

Литература.

I. Л.Д.Ландау, И.Я.Померанчук,ДАН,92,535,735,I953.

2. V.M.Galitsky, I.I.Gurevich, Nuovo Cimento, 32, 396, 1964.

3.В.Н.Байер, В.М.Катков,ДАН,207,68,I972.

4.В.Н.Байер, В.М.Катков,В.С.Фадин.Излучение релятивистских электронов,Атомиздат,I973.

5.В.Н.Байер, В.М.Катков,В.М.Страховенко,ЯФ,I4,I020,I97I.



Работа поступила - 26 марта I976 г.

Ответственный за выпуск С.Г.ПОПОВ
Подписано к печати I7.У-I976 г. МН 02787
Усл. I,I печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 45

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР