21

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 76 - 39

В.В.Вечеславов

ВЫБОР ХАРАКТЕРИСТИК ОТДЕЛЬНОЙ МАКРОЧАСТИЦЫ В МЕТОДЕ МАКРОЧАСТИЦ

Новосибирск
1976

ВЫБОР ХАРАКТЕРИСТИК ОТДЕЛЬНОЙ МАКРОЧАСТИЦЫ В МЕТОДЕ МАКРОЧАСТИЦ

В.В.Вечеславов

АННОТАЦИЯ

Точность результатов численного моделирования при использовании метода макрочастиц в сочетании с алгоритмом дискретного быстрого преобразования Фурье (БПФ) зависит, в частности, от выбора: I) характеристик отдельной макрочастицы, 2) способа "размазывания" полного заряда макрочастицы по узлам расчетной сетки, 3) способа интерполяции значений потенциала и компонент напряженности поля /I/.

Обсуждается возможность осуществить этот выбор оптимально с учетом основных свойств БПФ. Рассмотрение основано на следствиях известной теоремы В.А.Котельникова о функциях с ограниченным спектром /4/.

Проверка предлагаемых решений проведена для случая двумерной прямоугольной области.

I. Метод макрочастиц является в настоящее время основным при численном моделировании многих процессов в плазме и ускорителях с высокой интенсивностью пучка [I,2].

Практика показала, что наиболее эффективные варианты метода требуют введения вспомогательных расчетных сеток, в узлах которых на разных стадиях расчета хранятся значения плотности заряда, потенциала и т. д. Распределение заряда в форме макрочастиц и наличие расчетных сеток являются причинами возникновения "дробового" и "сеточного" шумов соответственно [I].

Технические параметры современных ЭВМ не позволяют избавиться от этих шумов за счет увеличения числа модельных частиц и узлов сеток, поэтому необходимо искать другие пути: "У нас нет возможности не иметь дело с физикой (и шумами) очень немногих частиц и очень грубыми сетками, следовательно, мы должны понять эту физику и найти подходящие способы для уменьшения шума" (Ч.Бэрдсол и др. [I]).

В настоящей работе с этой точки зрения обсуждаются вопросы, связанные с выбором: I) характеристик отдельной макрочастицы, 2) способа "размазывания" полного заряда макрочастицы по узлам расчетной сетки при формировании правой части уравнения Пуассона, 3) способа пересчета от узлов сетки на координаты макрочастиц значений потенциала и компонент напряженности поля.

Предполагается, что в качестве метода интегрирования уравнения Пуассона используется метод дискретного быстрого преобразования Фурье-БПФ[3].

2. Рассмотрим одномерную область $0 \leq x < AX$ с которой связана неподвижная расчетная сетка. Число узлов сетки NX, координаты узлов $x_n = n \cdot AX / NX,\ n = 0, \dots NX-1$; расстояние между соседними узлами назовем шириной ячейки. Все определенные в области функции считаем периодическими с периодом AX (позже это ог-

раничение будет снято).

Обычно отдельная макрочастица описывается заданием распределения её удельного (отнесенного к массе) заряда $\rho(x)$, которое различными исследователями выбирается от однородного до гауссова [I]. Информация об этом распределении поступает для дальнейшей обработки методом БПФ в виде зависящего от положения макрочастицы набора значений плотности в узлах расчетной сетки. Если использовать полученный в результате работы БПФ спектр Фурье и восстановить представляемую им функцию $\tilde{\rho}(x)$, то в общем случае полученные таким способом "образы" макрочастицы для различных её положений в области будут отличаться как от $\rho(x)$, так и друг от друга. Это объясняется тем, что в составе прошедших дискретную Фурье-обработку функций отсутствуют гармоники с частотами $\omega > \omega_c = \pi \cdot NX/AX$, а в исходном распределении на их долю может приходиться заметная часть. Сказанное иллюстрирует рис.I, где для двух положений макрочастицы сплошная линия изображает запланированное треугольное распределение $\rho(x)$, а пунктирная-распределение $\tilde{\rho}(x)$, которое "видит" БПФ ; число узлов расчетной сетки $NX=8$.

Отмеченный эффект, не исчезающий и при использовании многих макрочастиц, приводит к непостоянству полного заряда в системе и "дребезгу" всех получаемых через решение уравнения Пуассона величин.

Естественно попытаться связать с макрочастицей распределение $\rho(x)$ специального вида, которое воспринималось бы алгоритмом БПФ без искажений.

Существование периодических функций с требуемыми свойствами прямо следует из известной теоремы В.А.Котельникова о функциях с ограниченным спектром [4] ; относящиеся сюда подробности приведены в Приложении I.

В нашем случае искомое инвариантное распределение имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{NX} \cdot Sin\left(\pi x \frac{NX}{AX}\right) \sum_{n=0}^{NX-1} \rho(x_n) \cdot ctg\,\pi\left(\frac{x}{AX} - \frac{n}{NX}\right), \qquad (1)$$

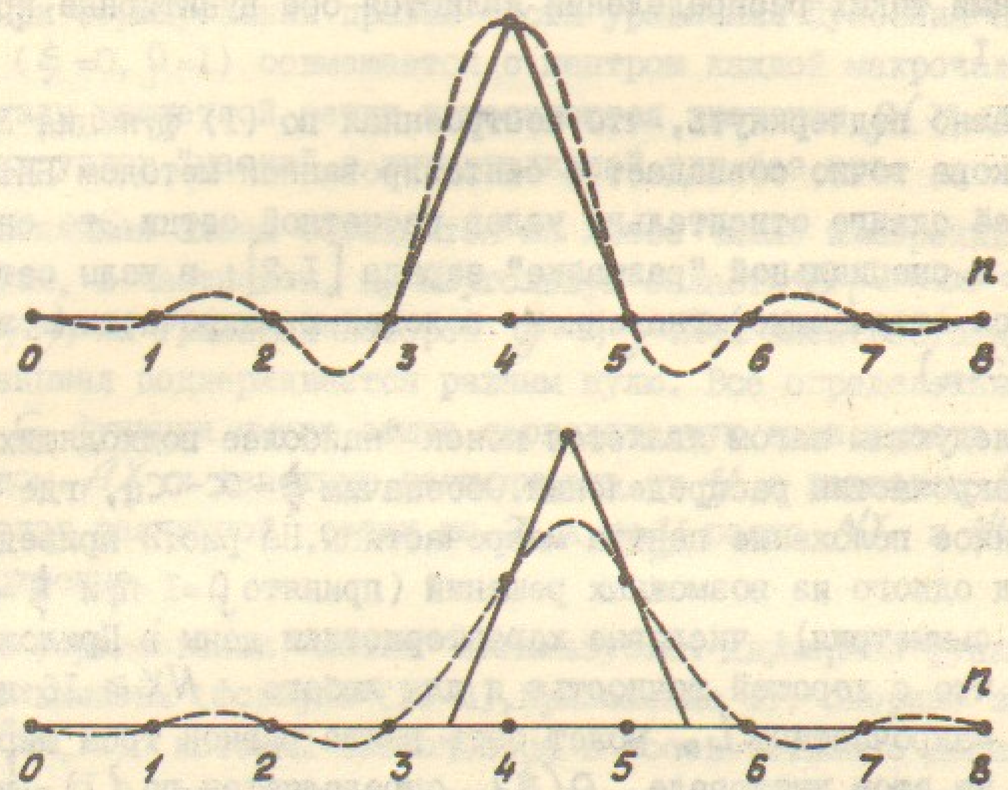

Рис.I

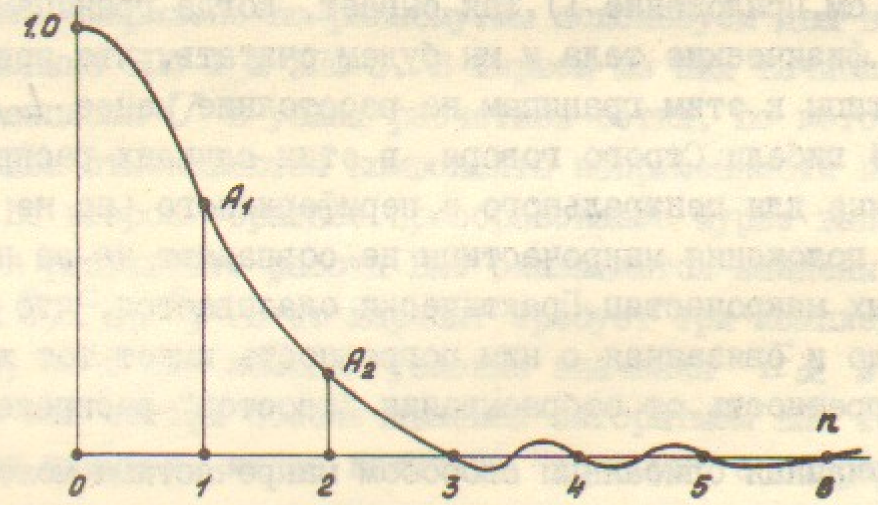

Рис.2

и определяется заданием NX независимых опорных величин $\rho(x_n)$; примерами таких распределений являются обе пунктирные кривые на рис.I.

Важно подчеркнуть, что построенная по (I) функция В.А.Котельникова точно совпадает с синтезированной методом БПФ при любом её сдвиге относительно узлов расчетной сетки.Это снимает вопрос о специальной "размазке" заряда [I,2]: в узлы сетки засылаются отвечающие мгновенному положению макрочастицы значения $\rho(x_n)$.

Следующим шагом является поиск "наиболее подходящих" на роль макрочастиц распределений.Обозначим $\xi = x - x_ц$, где $x_ц$ – мгновенное положение центра макрочастицы.На рис.2 приведен общий вид одного из возможных решений (принято ρ=I при ξ=0 и учтена симметрия); числовые характеристики даны в Приложении2. Видно, что с хорошей точностью и для любого $NX \geq 16$ полуширина макрочастицы L_m может быть взята равной трем ширинам ячеек: на этом интервале $\rho(\xi)$ определяется по (I), вне его (зона "хвостов") принимается $\rho(\xi) \equiv 0$.

До сих пор предполагалось , что $\rho(x)$ периодична с периодом AX .Если граничные условия задачи требуют нечетную или четную зависимости, то для формирования $\rho(x)$ должны быть привлечены нечетная или четная функции В.А.Котельникова соответственно (см.Приложение I).Так бывает, когда границами области являются физические тела и мы будем считать, что приближение макрочастицы к этим границам на расстояние менее L_m равносильно её гибели.Строго говоря, в этих случаях распределения, построенные для центрального и периферийного (но не ближе L_m до края) положения макрочастицы не совпадают из-за наличия отраженных макрочастиц.Практически оказывается, что это различие мало и связанная с ним погрешность имеет тот же порядок, что и погрешность от отбрасывания "хвостов" распределения.

Полученная описанным способом макрочастица может рассматриваться как объект с практически неизменными свойствами.Это позволяет использовать специальную сетку-"маску", в узлы которой до начала счета заносятся величины $\rho(\xi), -L_m \leq \xi \leq L_m$, определенные по (I) с шагом $\Delta\xi$, в MX раз меньшем ширины ячейки.При формировании правой части уравнения Пуассона центр "маски" (ξ=0, ρ=I) совмещается с центром каждой макрочастицы и в узлы расчетной сетки пересылаются значения $\rho(x_n)$ из ближайших узлов "маски" с интерполяцией или без нее.

Изложенная схема обобщается на любое число измерений. Рассмотрим, в частности, прямоугольную область $G(0 \leq x < AX, 0 \leq y \leq AY/2)$, на границах которой $y=0, y=AY/2$ электростатический потенциал поддерживается равным нулю. Все определенные в области G функции имеют общую периодическую зависимость от x с периодом AX и нечетную зависимость от y с периодом AY. Число узлов расчетной сетки по x и по y равно NX и $NY/2$ соответственно.

При формировании "маски" используется двумерная функция В.А.Котельникова (формула (III-4),Приложение I), опорные значения $f(m,n)$ которой назначаются в соответствии с данными Приложения 2.В этом случае "маска" характеризуется двумя числами MX и MY , показывающими, сколько узлов "маски" приходится на ширину ячейки по x и по y соответственно.По условиям симметрии достаточно сформировать четвертую часть "маски" с общим числом узлов $9 \cdot MX \cdot MY$.

3. Применение алгоритма БПФ в общей схеме метода макрочастиц может быть оформлено по-разному.Мы используем два варианта, условно названные БПФ-I и БПФ-3. В первом из них вычисляются значения потенциала U в узлах расчетной сетки, по которым дифференцированием отыскиваются компоненты напряженности поля E_x и E_y [I,2].Во втором обратное преобразование Фурье выполняется трижды и в результате работы БПФ оказываются найдены узловые значения U, E_x, E_y .Этот вариант требует три комплекта расчетных сеток, но с его помощью узловые значения E_x и E_y определяются без потери обеспечиваемой алгоритмом БПФ точности (условимся называть такие величины "точными" с сохранением кавычек).

Отыскание U, E_x, E_y в произвольной точке области осуществляется интерполяцией по их значениям в нескольких ближайших узлах сетки, причем обычно используется аппроксимация искомых зависимостей полиномами [2,5].

Представляет интерес привлечь к решению проблемы интерполяции введенные в предыдущем разделе функции В.А.Котельникова, которые в аналитической форме выражают связь "точных" значений функции всюду в области с ее значениями в узлах. Обсудим эту возможность подробнее, для определенности имея в виду рассмотренную выше прямоугольную область G.

Вычисление значений $U(x,y), E_x(x,y), E_y(x,y)$ путем интерполяции в варианте БПФ-3 осуществляется простым использованием по отношению к каждой из этих функций формул вида (П1-4) Приложения I или (П3-I) Приложения 3. При работе с БПФ-I известны лишь узловые значения потенциала, по которым, как и для БПФ-3, легко строится функция В.А.Котельникова $U(x,y)$. Для нахождения $E_x(x,y), E_y(x,y)$ эта функция дифференцируется (см. Приложение 3).

В одних и тех же точках области, включая узловые, результаты вычислений по обоим вариантам совпадают.

Привлечение к интерполяции всех узлов расчетной сетки далеко не всегда оправдано и избежать этого можно следующими способами (см.формулу (П1-4)): I) пренебрегая вкладами далеких от искомой точки узлов, полагая для этих узлов $f(m,n)=0$, 2) опирая функцию В.А.Котельникова на часть узлов расчетной сетки, т.е. используя уменьшенные (покаждому направлению независимо) величины NX и NY, 3) комбинируя первый и второй способы.

Выяснение характеристик функций В.А.Котельникова как средства интерполяции при работе с неполным числом узлов и сравнение их с интерполяционными многочленами является специальной задачей, которая здесь не обсуждается. Для целей настоящей работы важно, что использование этих функций делает доступным знание "точных" значений и позволяет легко контролировать точность интерполяции.

4. Проверка изложенных выше представлений проводилась в прямоугольной области G с параметрами $AX=60$, $AY/2=8$, $NX=32$, $NY/2=16$ и сотояла из этапов I) формирования "маски",

2) определения изменений заряда и энергии при движении в области одной макрочастицы, 3) то же при движении многих макрочастиц. В качестве критериев стабильности заряда и энергии использовались величины их максимальных относительных флуктуаций, наблюдаемые на интервале счета. Параллельно с изучением поведения макрочастиц, имеющих "маску" аналогичные вычисления в тех же условиях были выполнены для известного под названием "*cloud-in-cell*" ("CIC") способа "размазки" заряда по четырем окружающим центр макрочастицы узлам сетки [I](рис.I построен для одномерного аналога "CIC").

Уравнения движения макрочастиц и принятая схема их интегрирования описаны в Приложении 4.

Мы считали главной задачей выяснение связи качества формирования макрочастицы с качеством результатов численного моделирования. По этой причине величина шага интегрирования и длина интервала счета назначались так, чтобы не смогли существенно проявить себя присущие схеме интегрирования погрешности, а при интерполировании использовалось значительное (иногда полное) число узлов расчетной сетки.

Формирование "маски" выполнялось по формуле (П1-4) с найденными согласно Приложению 2 значениями $f(m,n)$, $0 \leq m \leq 31$, $0 \leq n \leq 15$:

$f(16,8)=1$.
$f(15,8)=f(17,8)=0.58004$; $f(14,8)=f(18,8)=0.08885$;
$f(16,7)=f(16,9)=0.58004$; $f(16,6)=f(16,10)=0.08885$;
$f(17,9)=f(15,9)=f(15,7)=f(17,7)=0.33644$;
$f(17,10)=f(15,10)=f(15,6)=f(17,6)=0.05154$;
$f(18,9)=f(14,9)=f(14,7)=f(18,7)=0.05154$;
$f(18,10)=f(14,10)=f(14,6)=f(18,6)=0.00789$;
$f(m,n)=0$ для всех остальных узлов.

Полный содержащийся в прямоугольнике G "с точки зрения БПФ" электростатический заряд Q можно определить по теореме Гаусса $\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \sim Q$, используя для этого вычисляемые с помощью БПФ-3 значения компонент напряженности поля E_x, E_y в граничных узлах расчетной сетки. Максимальные величины найденных таким путем относительных флуктуаций заряда $\delta Q=(Q_{max}-Q_{min})/Q_{средн}$ при движении в области одной макрочастицы с энергией 200 кэВ приведены в Таблице I. Поперечные колебания макрочастицы ограничивались внешним магнитным полем $1.5<y<6.5$ и время счета превышало полупериод этих колебаний.

Электростатический потенциал на границах $y=0$, $y=8$ поддерживается равным нулю, а всюду внутри G определяется мгновенным положением макрочастицы и величиной её заряда. Применение грубой "маски" эквивалентно ошибке в положении макрочастицы, а грубого способа "размазки"-ошибке в величине её заряда. Влияние этих факторов хорошо просматривается во втором столбце Таблицы I, где даны максимальные значения флуктуаций энергии $\delta E=2\cdot(E_{max}-E_{min})/U_{mo}$. Здесь U_{mo}-максимальное провисание потенциала в области для начального положения макрочастицы (в нашем случае $U_{mo}\simeq 0.06$); полная энергия E определялась по (П4-3). При вычислении данных Таблицы I использовались "точные" значения U, E_x, E_y, т.е. интерполяция осуществлялась по всем $NX\cdot NY/2=512$ узлам расчетной сетки.

Мгновенное значение полного заряда макрочастицы определяется её мгновенным положением в ячейке расчетной сетки (см. рисунок I) и слабо зависит от положения этой ячейки в области. Отсюда следует, что с увеличением числа макрочастиц величины $\delta Q, \delta E$ должны уменьшаться. Для выяснения примерного характера этой зависимости изучалось поведение N макрочастиц, начальные положения центров которых $x(i), y(i)$ задавались алгоритмом:

$$M=N/3; \quad i=1,2,\dots M; \quad \varphi=2\pi\cdot(i-1)/M; \quad z=\cos\varphi;$$

$$x(i)=x(i+M)=x(i+2\cdot M)=60\cdot(i-1)/M$$

$$y(i)=4-2{,}7\cdot z; \quad y(i+M)=4-1{,}5\cdot z; \quad y(i+2\cdot M)=4-0{,}5\cdot z$$

Результаты сведены в Таблицу II, при построении которой использовалась "маска" $MX=16$, $MY=20$ без интерполяции.

Видно, что для относительно "спокойных" потоков наличие многих макрочастиц хотя и не ликвидирует, но заметно сглаживает эффект непостоянства полного заряда. Это сглаживание может проявляться намного слабее для потоков с резко выраженными не-

Таблица I

Способ распределения заряда	δQ (%)	δE (%)
"маска" $MX=10$, $MY=10$ без интерполяции	0.06	I.9
"маска" $MX=10$, $MY=10$ с интерполяцией	0.06	0.4
"маска" $MX=16$, $MY=20$ без интерполяции	0.06	I.4
"маска" $MX=16$, $MY=20$ с интерполяцией	0.06	0.4
"CIC"	9.4	25.4

Таблица II

Число макрочастиц N		I	I20	300	600	I000	I000	I000
δQ ("маска")	%	0.06	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
δQ ("CIC")	%	9.4	3.7	4.0	4.I	I.6	I.6	I.6
δE ("маска")	%	I.4	0.56	0.3I	0.23	0.3I	I.4	I.9
δE ("CIC")	%	25.4	5.2	0.84	0.80	0.93	3.4	4.6
Использованное при интерполяции число узлов расчетной сетки		5I2	64	64	64	64	32	I6

однородностями в распределении плотности. Кроме того, во всех случаях использования алгоритма "CIC" при больших временах счета существует угроза возникновения значительных флуктуаций заряда и возрастания погрешности счета.

Отметим также, что применение "маски" позволяет сравнительно легко учитывать распределение значений U, E_x, E_y по объему, занимаемому каждой макрочастицей. Это обстоятельство, как и интерполяцию по "маске", можно использовать для дальнейшего повышения точности результатов численного моделирования с помощью метода макрочастиц.

5. Все расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6 Вычислительного Центра СО АН СССР.

Рабочие программы написаны на языке "ФОРТРАН", кроме блока решения уравнения Пуассона; последний выполнен в автокоде "МАДЛЕН" Н.И.Толстобровой и Л.Ф.Хайло на основе результатов, полученных в работе [3].

Каждый этап вычислений состоит из: I) формирования правых частей уравнения Пуассона, 2) решения уравнения Пуассона, 3) интерполяции для отыскания U, E_x, E_y, 4) интегрирования уравнений движения. Для варианта БПФ-I при числе макрочастиц $\mathcal{N}$ =I000, числе узлов расчетной сетки 32×I6 и интерполяции по I6 узлам этой сетки время выполнения одного этапа τ("маска" без интерполяции)=5.9сек., τ("CIC")=4.7сек; время решения уравнения Пуассона равно 0.4 сек. Приведенные здесь цифры затрат вычислительного времени следует рассматривать как предварительные.

Автор благодарен В.Г.Давидовскому и Б.В.Чирикову за обсуждения.

Приложение I

Функции В.А.Котельникова.

Произвольная функция своего аргумента $f(t)$, в спектре которой не содержатся частоты выше некоторой граничной частоты ω_c может быть представлена известным рядом В.А.Котельникова [4]:

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(k\cdot\frac{\pi}{\omega_c}\right)\cdot\frac{\sin(\omega_c t-k\pi)}{\omega_c t-k\pi}; \qquad (\Pi 1\text{-}1)$$

Аппарат дискретного преобразования Фурье имеет дело с периодическими функциями $f(t+T)=f(t)$, заданными равноотстоящими значениями $f(T\cdot n/N)$, $n=0,1,\ldots N-1$; граничная частота в спектре таких функций $\omega_c=\pi N/T$ и обычно число узловых ординат N есть четное число. Для этого класса функций основная зависимость (ПI-I) может быть преобразована. Меняя порядок суммирования, находим:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{N-1} f\left(T\frac{n}{N}\right)\cdot\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi N\left(\frac{t}{T}-\frac{n}{N}\right)}{\pi N\left(\frac{t}{T}-\frac{n}{N}-k\right)}\right\}=$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} f\left(T\frac{n}{N}\right)\cdot\frac{\sin\pi N\left(\frac{t}{T}-\frac{n}{N}\right)}{\pi N}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\frac{t}{T}-\frac{n}{N}-k};$$

Используя формулу разложения котангенса на элементарные дроби, получаем окончательно:

$$f(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(T\frac{n}{N}\right)\cdot\sin\pi N\left(\frac{t}{T}-\frac{n}{N}\right)\cdot ctg\,\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{n}{N}\right)=$$

$$=\frac{1}{N}\sin\pi N\frac{t}{T}\cdot\sum_{n=0}^{N-1} f\left(T\frac{n}{N}\right)\cdot(-1)^n\cdot ctg\,\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{n}{N}\right); \qquad (\Pi 1\text{-}2)$$

Выражение (ПI-2) удобно назвать функцией В.А.Котельникова.

Для частных случаев имеем:

а) нечетная функция $f\left(T\frac{n}{N}\right)=-f\left(T\frac{N-n}{n}\right)$, $f(0)=f(T/2)=0$.

$$f(t)=\frac{1}{N}\cdot\sin\pi N\frac{t}{T}\cdot\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} f\left(T\frac{n}{N}\right)\cdot(-1)^{n}\cdot\left[ctg\,\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{n}{N}\right)-ctg\,\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{n}{N}\right)\right]; \qquad (П1\text{-}3)$$

б) четная функция $f\left(T\frac{n}{N}\right)=f\left(T\frac{N-n}{N}\right)$.

$$f(t)=\frac{1}{N}\cdot\sin\pi N\frac{t}{T}\left\{\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} f\left(T\frac{n}{N}\right)\cdot(-1)^{n}\cdot\left[ctg\,\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{n}{N}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+ctg\,\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{n}{N}\right)\right]+f(0)\cdot ctg\frac{\pi t}{T}-f\left(\frac{T}{2}\right)\cdot tg\frac{\pi t}{T}\right\}; \qquad (П1\text{-}3')$$

Все полученные выше формулы легко обобщаются на любое число измерений. Приведем, в частности, выражение двумерной функции $f(x,y)$ с общей периодической зависимостью по x (период AX, число узлов NX) и нечетной зависимостью по y (период AY, число узлов NY):

$$f(x,y)=\frac{1}{NX}\sin\left(\pi x\frac{NX}{AX}\right)\cdot\sum_{m=0}^{NX-1}\left\{\frac{1}{NY}\sin\left(\pi y\frac{NY}{AY}\right)\cdot\sum_{n=1}^{\frac{NY}{2}-1} f(m,n)\cdot(-1)^{n}\times\right.$$

$$\left.\times\left[ctg\,\pi\left(\frac{y}{AY}-\frac{n}{NY}\right)-ctg\,\pi\left(\frac{y}{AY}+\frac{n}{NY}\right)\right]\right\}\cdot(-1)^{m}\cdot ctg\,\pi\left(\frac{x}{AX}-\frac{m}{NX}\right); \qquad (П1\text{-}4)$$

здесь $f(m,n)\equiv f\left(AX\cdot\frac{m}{NX},\ AY\cdot\frac{n}{NY}\right)$.

Приложение 2

Характеристики некоторых распределений.

На рис.2 приведен общий вид (без соблюдения масштаба и с учетом симметрии) функций В.А.Котельникова, которые определяются заданием трех отличных от нуля опорных значений-центрального $\rho(0)$ =I и двух соседних A_1, A_2. Величины A_1 и A_2 находятся из требования обращения в нуль значений функции в середине четвертой и пятой ячеек.

Основные параметры таких распределений приведены в таблице, где приняты обозначения:

NX -полное число ячеек (или узлов) расчетной сетки,

A_1, A_2 -значения ординат на рис.2,

S_{02}, S_{03} -доля полуплощади всего распределения, заключенная в первых двух и первых трех ячейках соответственно,

SA_{02}, SA_{03} -то же, но площадь вычислена по абсолютному значению $\rho(x)$,

L_n -полуширина эквивалентного по площади однородного распределения $\rho(x)$ =I,

L_A -полуширина эквивалентного по площади абсолютных значений однородного распределения.

NX	I6	32	64	I28	256
A_1	0.57273	0.58004	0.58154	0.58I89	0.58I98
A_2	0.0843I	0.08885	0.08978	0.09000	0.09006
S_{02}	0.9799I	0.97878	0.97855	0.97850	0.97848
S_{03}	I.00008	I.000I0	I.000I0	I.000I0	I.000I0
SA_{02}	0.97959	0.97878	0.9757I	0.97375	0.97208
SA_{03}	0.99975	0.99876	0.99720	0.99550	0.99356
L_n	I.I6704	I.I7889	I.I8I32	I.I8I90	I.I8204
L_A	I.I6742	I.I8046	I.I8475	I.I8780	I.I8982

Приложение 3

Интерполирование и вычисление производных по двумерной сетке потенциала с помощью функций В.А.Котельникова.

Пусть на плоскости (x,y) задана двумерная сетка, в узлах которой определены значения потенциала U электростатического поля. Функция $U(x,y)$ имеет периодическую зависимость по x общего типа и нечетна по y. Введем обозначения:

AX, AY – периоды по x и по y соответственно,

NX, NY – числа узлов сеток по x и по y,

m, n – номера узлов по x и по y,

$f(m,n) \equiv U\left(AX\frac{m}{NX}, AY\frac{n}{NY}\right)$ – значение потенциала в узле m, n.

Используя выражение для двумерной функции В.А.Котельникова (ПI–4) из Приложения I, проводя дифференцирование и тригонометрические преобразования для значений потенциала и компонент напряженности поля в произвольной точке с координатами $0 \le x < AX$, $0 \le y \le AY/2$ находим:

$$U(x,y) = \frac{2}{NX \cdot NY} \cdot \sin\left(\pi x \frac{NX}{AX}\right) \sum_{m=0}^{NX-1} (-1)^m \cdot \operatorname{ctg}\pi\left(\frac{x}{AX} - \frac{m}{NX}\right) \times$$

$$\times \left\{ \sin\left(\pi y \frac{NY}{AY}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\frac{NY}{2}-1} \frac{(-1)^n \cdot f(m,n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{NY}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi n}{NY}\right) - \cos\left(\frac{2\pi y}{AY}\right)} \right\}; \qquad (\text{П3–I})$$

$$E_x(x,y) = \frac{2}{NX \cdot NY} \cdot \frac{\pi}{AX} \sum_{m=0}^{NX-1} \left\{ \sin\left(\pi y \frac{NY}{AY}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\frac{NY}{2}-1} \frac{(-1)^n \cdot f(m,n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{NY}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi n}{NY}\right) - \cos\left(\frac{2\pi y}{AY}\right)} \right\} \times$$

$$\times \frac{(-1)^m}{\sin\pi\left(\frac{x}{AX} - \frac{m}{NX}\right)} \cdot \left[\frac{\sin\left(\pi x \frac{NX}{AX}\right)}{\sin\pi\left(\frac{x}{AX} - \frac{m}{NX}\right)} - NX \cdot \cos\left(\pi x \frac{NX}{AX}\right) \cdot \cos\pi\left(\frac{x}{AX} - \frac{m}{NX}\right) \right]; \qquad (\text{П3–2})$$

$$E_y(x,y) = \frac{2}{NX \cdot NY} \cdot \frac{2\pi}{AY} \sin\left(\pi x \frac{NX}{AX}\right) \cdot \sum_{m=0}^{NX-1} (-1)^m \cdot \operatorname{ctg}\pi\left(\frac{x}{AX} - \frac{m}{NX}\right) \left\{ \sum_{n=1}^{\frac{NY}{2}-1} \sin\left(\frac{2\pi n}{NY}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(-1)^n \cdot f(m,n)}{\cos\left(\frac{2\pi n}{NY}\right) - \cos\left(\frac{2\pi y}{AY}\right)} \cdot \left[\frac{\sin\left(\pi y \frac{NY}{AY}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi y}{AY}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi n}{NY}\right) - \cos\left(\frac{2\pi y}{AY}\right)} - \frac{NY}{2} \cdot \cos\left(\pi y \frac{NY}{AY}\right) \right] \right\}; \qquad (\text{П3–3})$$

Приложение 4

Движение макрочастиц в прямоугольной области.

Двумерные макрочастицы ("стержни") с линейным зарядом $Q = Q_0 \cdot e$ и линейной массой $M = M_0 \cdot m$ (e, m – заряд и масса электрона) движутся в прямоугольной области $G(0 \le x < AX,\ 0 \le y \le AY/2)$. Частица, покинувшая область по y считается погибшей, а покинувшая по x возвращается в нее в соответствии с правилом $x = MOD(x, AX) > 0$. Имеется внешнее магнитное поле $\widetilde{B}(y) = \widetilde{\varkappa} \cdot (y - AY/4)$, $\widetilde{\varkappa} = \varkappa\, mc/e = const$.

Примем в качестве единиц линейного заряда, потенциала, импульса и индукции величины e, mc^2/e, mcQ_0, mc/e соответственно; $s = ct$ – независимая переменная, $\frac{d}{ds}(\,) \equiv (\,)'$.

а) В относительных единицах движение каждой макрочастицы описывается уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} P_x' &= E_x - y' \cdot B(y) & \gamma' &= x' E_x + y' E_y \\ P_y' &= E_y + x' \cdot B(y) & \gamma^2 &= 1 + P_x^2 + P_y^2 \\ x' &= P_x / \gamma & E_x &= -\partial U / \partial x \\ y' &= P_y / \gamma & E_y &= -\partial U / \partial y \end{aligned}\right\} \qquad (\text{П4–I})$$

здесь x, y – координаты центра макрочастицы.

б) Собственное электростатическое поле зарядов определяется уравнением Пуассона:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -n(x,y) \cdot \frac{1}{\gamma_0^2} \cdot \frac{e^2 Q_0}{\varepsilon_0 m c^2} \qquad (\text{П4–2})$$

где $n(x,y)$ – плотность распределения макрочастиц,

$\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ ф/м, диэлектрическая постоянная,

γ_0 – энергия частицы при U=0; множитель $1/\gamma_0^2$ в (П4–2) приближенно учитывает собственное магнитное поле движущихся зарядов (см. примечание).

в) Полная энергия системы

$$E = \sum_{i=1}^{N} \left[\gamma_i + U(x_i, y_i)/2 \right] = const \qquad (\text{П4–3})$$

где N – число макрочастиц в области.

г) Схема интегрирования (черта сверху соответствует значению переменной в конце шага):

$$
\left.
\begin{aligned}
& x'' = p_x'/\gamma - p_x\gamma'/\gamma^2, \qquad y'' = p_y'/\gamma - p_y\gamma'/\gamma^2, \\
& p_x'' = \mathcal{K} y'^2 - y''\cdot B(y), \qquad p_y'' = x''\cdot B(y) - x'y'\mathcal{K}, \\
& \overline{p}_x = p_x + p_x'\cdot\Delta S + p_x''\cdot\Delta S^2/2, \\
& \overline{p}_y = p_y + p_y'\cdot\Delta S + p_y''\cdot\Delta S^2/2, \\
& \overline{\gamma} = \gamma + \gamma'\cdot\Delta S + (x''E_x + y''E_y)\cdot\Delta S^2/2 \\
& \overline{x} = x + (\overline{p}_x/\overline{\gamma})\cdot\Delta S \\
& \overline{y} = y + (\overline{p}_y/\overline{\gamma})\cdot\Delta S
\end{aligned}
\right\} \quad (\text{П4–4})
$$

Примечание. Возможность приближенного учета релятивистских эффектов пространственного заряда введением множителя $1/\gamma^2$ обсуждается в работе [6].Там показано, что это допустимо, если I) радиус кривизны орбиты не мал, 2) расстояние между пучком и камерой много меньше радиуса орбиты, 3) разброс частиц по скоростям мал по сравнению со средней скоростью.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Сборник "Вычислительные методы в физике плазмы", "МИР", М., I974.

2. Захаров А.В.,Самарский А.А.,СвешниковА.Г. "Применение метода больших частиц к расчету заряженного пучка в электромагнитном поле с учетом пространственного заряда пучка", в сб. "Вычислительные методы и программирование", изд.Моск.Универ., т XVI ,225,I97I.

3. Ch. Iselin, "An approach to fast Fourier transform." CERN-Report 71-19, 1971.

4. Харкевич А.А. "Спектры и анализ", ГИТТЛ, М., I953.

5. Рошаль А.С. "Численное интерполирование и дифференцирование табулированных функций со сглаживанием", в сб. "Инженерно-математические методы в физике и кибернетике", Атомиздат, М., вып.4, I975.

6. Нильсен К.,Сесслер Э.,Саймон К. "Продольные неустойчивости в релятивистских пучках большой интенсивности", в сб. "Накопление релятивистских частиц", Госатомиздат, М., I963.

Работа поступила - I6 апреля I976г.

Ответственный за выпуск Попов С.Г.
Подписано к печати 26.04.I976г. МН 0276I
Усл. I.2 печ.л., тираж I50 экз. Бесплатно
Заказ № 39

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР