И Н С Т И Т У Т

ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 75 - 95

А.Н.Алешаев, В.А.Дзюба, М.М.Карлинер,

П.Б.Лысянский, Б.М.Фомель

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРЯМОГО МЕТОДА ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В СИСТЕМАХ С ЖЕЛЕЗОМ

Новосибирск

1975

А.Н.Алешаев, В.А.Дзюба, М.М.Карлинер, П.Б.Лысянский,

Б.М.Фомель

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРЯМОГО МЕТОДА ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В СИСТЕМАХ С ЖЕЛЕЗОМ

А Н Н О Т А Ц И Я

Работа посвящена применению и регуляризации прямого метода вычисления стационарных магнитных полей для расчета аксиально-симметричных систем с железом.

Программа для ЭВМ проверена на тестовых задачах. Приводится пример расчета отклоняющей магнитной системы с железом.

С о д е р ж а н и е

I. ПРЯМОЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Системы с железом, создающие стационарные магнитные поля, могут быть описаны либо дифференциальными, либо интегральными уравнениями.

В первом случае для численного решения уравнений необходимо покрывать сеткой всю исследуемую область и задавать граничные условия. Во втором случае сетка строится в области железа, а вне железа поле вычисляется только в заданных точках, например, вдоль траекторий заряженных частиц.

Прямой метод вычисления магнитных полей [I] использует понятие скалярного магнитного потенциала и относится к методам интегральных уравнений.

Напряженность магнитного поля $\vec{H}_m$ в прямом методе представляется в виде суммы двух составляющих: $\vec{H}_c$, обусловленной токами проводимости в обмотках, и $\vec{H}_m$, обусловленной намагничением железа

$$\vec{H} = \vec{H}_c + \vec{H}_m \tag{I}$$

Составляющие поля удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\vec{H}_c &= \vec{j} \qquad & \mathrm{rot}\,\vec{H}_m &= 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{H}_c &= 0 \qquad & \mathrm{div}\,\vec{H}_m &\neq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

где $\vec{j}$ – плотность тока проводимости.

Токовая составляющая поля $\vec{H}_c$ может быть вычислена интегрированием по объему, занимаемому токами проводимости [3].

$$\vec{H}_c = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{[\vec{j}\,\vec{r}]}{r^3}\,dV \tag{3}$$

Для определения составляющей $\vec{H}_m$ вследствие уравнений (2) вводится скалярный магнитный потенциал φ

$$\vec{H}_m = -\operatorname{grad}\varphi \qquad (4)$$

причем φ выражается через вектор намагничения $\vec{M}$ путем интегрирования по объему железа

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{M}\vec{r}}{r^3}\,dV \qquad (5)$$

Вектор намагничения можно также определить через полное поле

$$\vec{M} = \varkappa\vec{H} \qquad (6)$$

где $\varkappa$ – магнитная восприимчивость, в общем случае, зависящая от $\vec{H}$.

Совместное рассмотрение выражений (I), (4), (5), (6) приводит к интегральному уравнению оносительно поля $\vec{H}$.

$$\vec{H} = \vec{H}_c - \operatorname{grad}\left(\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\varkappa\vec{H}\vec{r}}{r^3}\,dV\right) \qquad (7)$$

Для численного решения этого уравнения область, занимаемая железом, разбивается на N элементов так, чтобы поле $\vec{H}$ слабо изменялось внутри элемента. Тогда интеграл в уравнении (7) можно заменить суммой интегралов по элементам,для каждого из которых $\varkappa\vec{H}$ выносится за знак интеграла и градиента.

Пусть, например, точки а и в – центры двух элементов разбиения. Тогда для X – компоненты поля в точке а имеем

$$H_x(a) = H_{cx}(a) + \sum_{b=1}^{N}\left[C_{axbx}\varkappa_b H_x(b) + C_{axby}\varkappa_b H_y(b) + C_{axbz}\varkappa_b H_z(b)\right]$$

где

$$C_{axbx} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{V_b}\frac{x-x'}{r^3}\,dV'_b$$

$$C_{axby} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{V_b}\frac{y-y'}{r^3}\,dV'_b$$

$$C_{axbz} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{V_b}\frac{z-z'}{r^3}\,dV'_b$$

$$r = \sqrt{(x-x)^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

x', y', z' – координаты точки наблюдения (точки а).

Выражения для $H_y(a)$ и $H_z(a)$ аналогичны.

Записав такие соотношения для N элементов железа, получим квазилинейную систему $3N$ уравнений с $3N$ неизвестными. В матричной форме эта система имеет вид

$$(C\varkappa + I)\vec{H} = -\vec{H}_c \qquad (8)$$

где C – матрица коэффициентов, зависящих только от геометрии разбиения, $\varkappa$ – диагональная матрица, I – единичная матрица.

Решение системы (8) путем итераций дает поле в железе. Поле в произвольной точке пространства вычисляется как сумма токовой составляющей $\vec{H}_c$ (3) и составляющей $\vec{H}_m = C'\vec{H}$ (C' – матрица геометрических коэффициентов (4–6)).

Таким образом, вычисление магнитного поля прямым методом состоит из трех этапов: сначала по заданной плотности тока в обмотках вычисляется токовая составляющая поля, затем определяется полное поле в железе, и наконец, вычисляется поле в любой заданной точке пространства.

2. АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ СИСТЕМЫ

В работе [I,2] рассматривались, в основном, трехмерные и плоско-параллельные задачи. Поскольку стимулом для выполнения настоящей работы явилась потребность в разработке отклоняющих магнитных систем с осевой симметрией, то здесь подробно рассматриваются именно такие системы.

С вычислительной точки зрения аксиальная симметрия удобна тем, что позволяет трехмерную задачу свести к двумерной и в цилиндрической системе координат изучать только плоскость r, z.

В рассмотренном выше прямом методе наибольшие аналитические трудности вызывает вывод формул для геометрических коэффициентов влияния C_{ij}. При численном счете задачи процедура вычисления этих коэффициентов также занимает большую часть машинного времени. Для упрощения формул и сокращения машинного времени была выбрана простая геометрическая форма элементов разбиения железа - прямоугольника в плоскости r, z. В работе [I] в качестве элементов разбиения железа использовались треугольники.

Ниже приведены формулы для коэффициентов влияния прямоугольных элементов.

$$C_{zz} = \frac{1}{2\pi}\frac{z}{\sqrt{z^2+(x_0+r)^2}}\left[\frac{\sqrt{z^2+x_0^2}+r}{\sqrt{z^2+x_0^2}-x_0}\Pi(n_1,k) + \frac{\sqrt{z^2+x_0^2}-r}{\sqrt{z^2+x_0^2}+x_0}\Pi(n_2,k)\right]_{z_1 r_1}^{z_2 r_2} \qquad (9)$$

$$C_{zr} = \frac{1}{\pi}\left[(r\varphi)\Big|_{r_1}^{r_2} - \int \varphi\, dr\right]_{z_1}^{z_2}, \quad \text{где} \quad \varphi = \frac{F(k)}{\sqrt{z^2+(x_0+r)^2}}$$

$$C_{rz} = \left[\frac{z^2+x_0^2+r^2}{2x_0\pi\sqrt{z^2+(x_0+r)^2}}F(k) - \frac{\sqrt{z^2+(x_0+r)^2}}{2x_0\pi}E(k)\right]_{z_1 r_1}^{z_2 r_2}$$

$$C_{rr} = \left[\frac{z\sqrt{z^2+x_0^2}}{2\pi x_0\sqrt{z^2+(x_0+r)^2}}\left\{\frac{r-\sqrt{z^2+x_0^2}}{\sqrt{z^2+x_0^2}+x_0}\Pi(n_2,k) + \frac{r+\sqrt{z^2+x_0^2}}{\sqrt{z^2+x_0^2}-x_0}\Pi(n_1,k)\right\} - \frac{1}{\pi}\frac{zr}{x_0\sqrt{z^2+(x_0+r)^2}}F(k)\right]_{r_1 z_1}^{r_2 z_2}$$

где $F(k)$, $E(k)$, $\Pi(n,k)$ - полные эллиптические интегралы соответственно I, 2 и 3 рода.

3. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

На основе прямого метода была написана программа для расчета стационарных магнитных полей в аксиально-симметричных системах с железом. При этом магнитная восприимчивость железа считалась постоянной, не зависящей от $\vec{H}$. На следующем этапе работы предполагается ввести учет зависимости $\varkappa(\vec{H})$ и организовать итерационный цикл для нелинейной задачи.

Для отладки программы были решены следующие тестовые задачи.

I. Рассматривался соленоид с железом.
   При $\varkappa = 0$ ($\mu = I$) решение сравнивалось с полем соленоида, рассчитанным по уравнению (3). Получено полное совпадение результатов.
2. Для случая, когда размеры железа малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения, решение сравнивалось с расчетом по дипольным формулам [4]

$$H_z = M_z \frac{2z^2 - r^2}{(r^2+z^2)^{5/2}} \qquad H_r = M_z \frac{3zr}{(r^2+z^2)^{5/2}}$$

$$M_z = \frac{1}{4\pi} \varkappa HV + \frac{1}{4\pi}\pi R^2 I$$

где I – ток в обмотке соленоида с радиусом R,

V – объем железа.

Различие результатов при расчете поля в I2 точках не превышает в среднем 5%.

3. Проверка закона полного тока $\int H dl = I$.

Результаты вполне удовлетворительны $(< 1\%)$

4. Магнитное поле внутри вытянутого или сплюснутого эллипсоидов вращения, помещенных в однорядное магнитное поле может быть определено по формуле [4].

$$H = \frac{H_0}{K+(1-K)\mu}$$

где H_0 – внешнее поле,

$K \approx 1 - \frac{\ln 2\Lambda - 1}{\Lambda^2}$ при $\Lambda \geq$ I0

$K \approx \frac{\pi\Lambda}{2+\pi\Lambda}$ при $\Lambda \leq$ 0,I

$\Lambda \frac{a}{b}$ – отношение полуосей эллипсоидов.

В программе эллипсоиды в плоскости r, z были аппроксимированы набором прямоугольников и помещены в поле большого соленоида.

Различие результатов лежит в пределах 8%.

5. Если железный шар поместить в однородное магнитное поле, то магнитное поле внутри шара однородно и может быть определено [4] по формуле

$$H = H_0 \frac{3}{2+\mu}$$

а снаружи шара – по формулам:

$$H_z = H_0 \left[1 + \frac{\mu-1}{\mu+2} R^3 \frac{2z^2 - r^2}{(z^2+r^2)^{5/2}}\right]$$

$$H_r = H_0 \frac{3(\mu-1)}{\mu+2} R^3 \frac{zr}{(z^2+r^2)^{5/2}}$$

В программе шар аппроксимировался набором из 40 колец. При μ =I0 результаты счета прямым методом и счета по формулам отличались не более, чем на I%.

Однако, при $\mu \geq$ I00 магнитное поле внутри железа начинает сильно изменяться от элемента к элементу. Происходят отклонения от правильного решения в обе стороны более, чем на порядок. Вне железа поле искажается меньше, точность вычисления по сравнению с формулами снижается всего на I÷2%.

4. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРЯМОГО МЕТОДА

Указанные в конце предыдущего параграфа факты отмечены также в работе [5]. Подробный анализ полученного решения показал, что в нем присутствуют вихревые потоки магнитного поля, циркулирующие внутри железа. Характер вихрей и даже их существование сильно зависят от способа разбиения железа на элементы. Таким образом, задача вычисления магнитного поля прямым методом является некорректной [6], так как нарушается непрерывность зависимости решения задачи от исходных данных.

Формально некорректность задачи проявляется в плохой обусловленности матрицы A в уравнении (8)

$$A\vec{H} = -\vec{H}_c \qquad (8)$$

что в свою очередь является следствием сингулярности интегрального выражения (7). Обусловленность матрицы $A = \varkappa C + I$

тем хуже, чем больше величина $\varkappa$. При больших $\varkappa$

$$A \approx \varkappa C$$

Отсюда следует, что если выбором формы и размеров элементов в железе можно улучшить обусловленность матрицы C, то тем самым будет улучшена обусловленность и матрицы A. Такой способ использован в работе [4].

В настоящей работе применяется метод сглаживающего функционала А.Н.Тихонова [6] как наиболее общий метод регуляризации некорректных задач.

В отличие от обычного решения линейной системы (8), которое удовлетворяет условию минимума квадратичного функционала

$$Q_1 = \| A\vec{H} + \vec{H}_c \|^2, \tag{10}$$

по методу А.Н.Тихонова система (8) решается при условии минимума функционала

$$Q_2 = \| A\vec{H} + \vec{H}_c \|^2 + \alpha \| H \|^2 \tag{11}$$

где α – безразмерный параметр регуляризации.

Условие минимума функционала (II) фактически не дает возможности появиться собственному вихревому решению с большим значением $\|H\|^2$. Применение этого метода к решению тестовой задачи "Шар в однородном поле" привело к исчезновению вихрей. Без регуляризации, как было сказано в предыдущем параграфе, величина вихревого поля на порядок превышала "правильное" невихревое решение. На рис.I а и б изображены направления векторов намагничения до и после регуляризации. Параметр α подбирался экспериментально. Видно, что регуляризация задачи с помощью функционала (II) полностью устраняет паразитное вихревое решение.

5. ПРОГРАММА MIMF

Программа MIMF предназначена для расчета стационарных магнитных полей и траекторий электронов в аксиально-симметричных системах с железом при постоянной магнитной проницаемости.

Элементы разбиения железа имеют прямоугольную форму. Токовые поля создаются соленоидами, размеры и расположение которых произвольны.

При объеме программы 2I К слов на ЭВМ "Одра-I305" имеется возможность разбиения железа на 40 элементов. При этом время расчета намагничения железа составляет примерно 5 мин., время расчета поля в одной произвольной точке при известном намагничении ~ 6 сек.

Входными параметрами программы являются геометрия системы и элементов железа, заданная точность расчета и начальные параметры электронного пучка.

6. ПРИМЕР

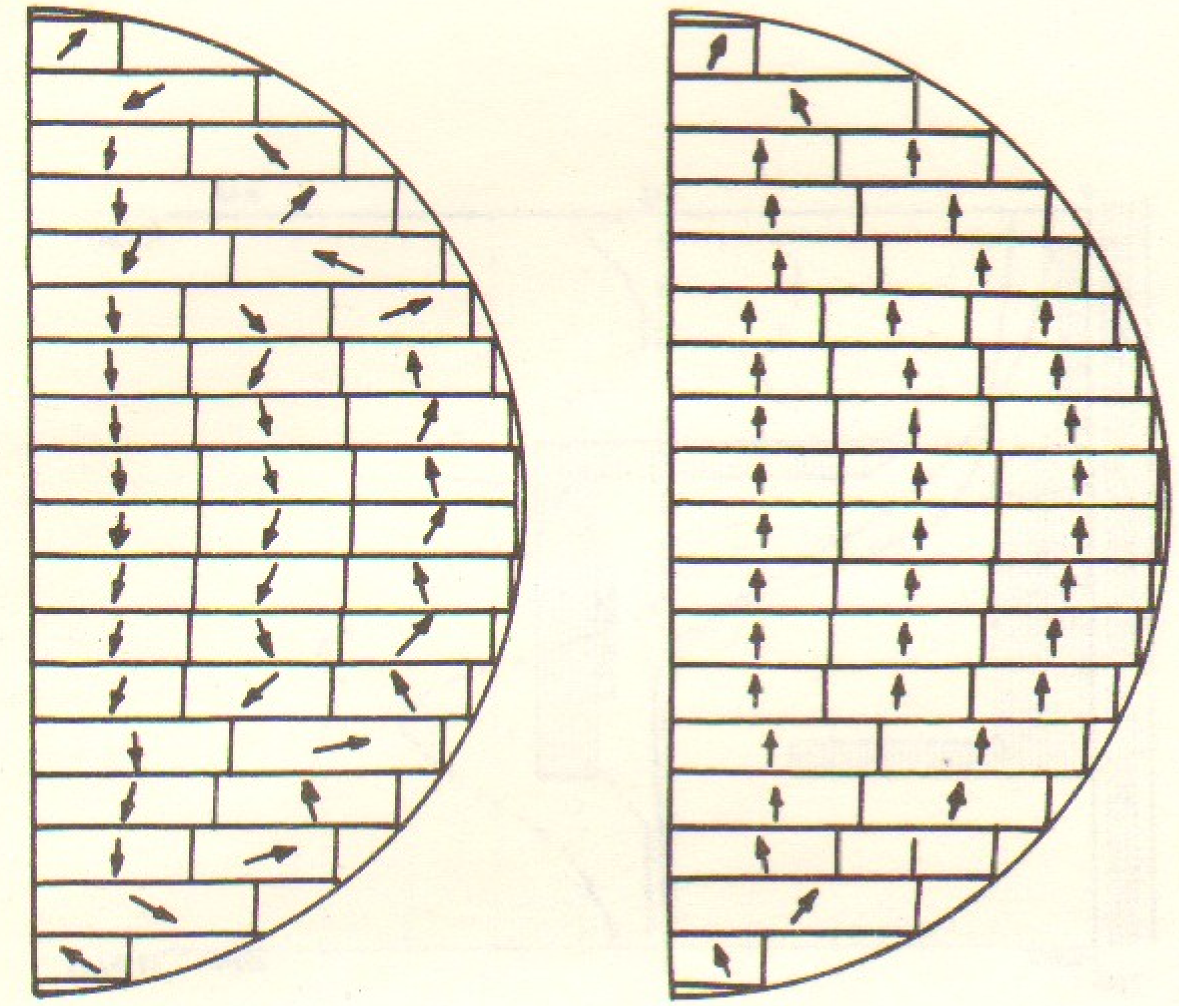
Программа расчета магнитных полей в системах с железом была использована по предложению И.А.Шехтмана для разработки отклоняющей магнитной системы мощного СВЧ-генератора.

Отклоняющая система должна обеспечить определенный фазовый объем электронного пучка на выходе при заданных параметрах пучка на входе и минимальной потребляемой мощности. На рис.2 демонстрируется один из приемлемых вариантов отклоняющей системы. Показан радиальный разрез железа (ось симметрии слева) и траектории двух крайних электронов пучка в плоскости r, z. Точками изображается разрез железа в плоскости r, z, буквами R и Z – значения компонент H_r и H_z в точках прохождения второй частицы, цифрами I и 2 – траектории двух крайних частиц пучка.

Диаметр пучка на входе – 2 см. энергия – I.5 Мэв, ток в обмотке, прилегающей к внутренней стороне наружной стенки отклоняющей системы – 8,2 кА, высота катушки I0 см.

7. Литература

I. L.R. Turner RL-73-102, 1973
2. C.J. Collie, C.W. Trowbridge, RL-74-132, 1974
3. И.Е.Тамм, Основы теории электричества, Наука, I966.
4. К.Н.Поливанов, Ферромагнетизм, Госэнергоиздат, I957.
5. A.G. Armstrong a.o., RL-75-066, 1975
6. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин, Методы решения некорректных задач, Наука, I974г.



а б

Рис 1

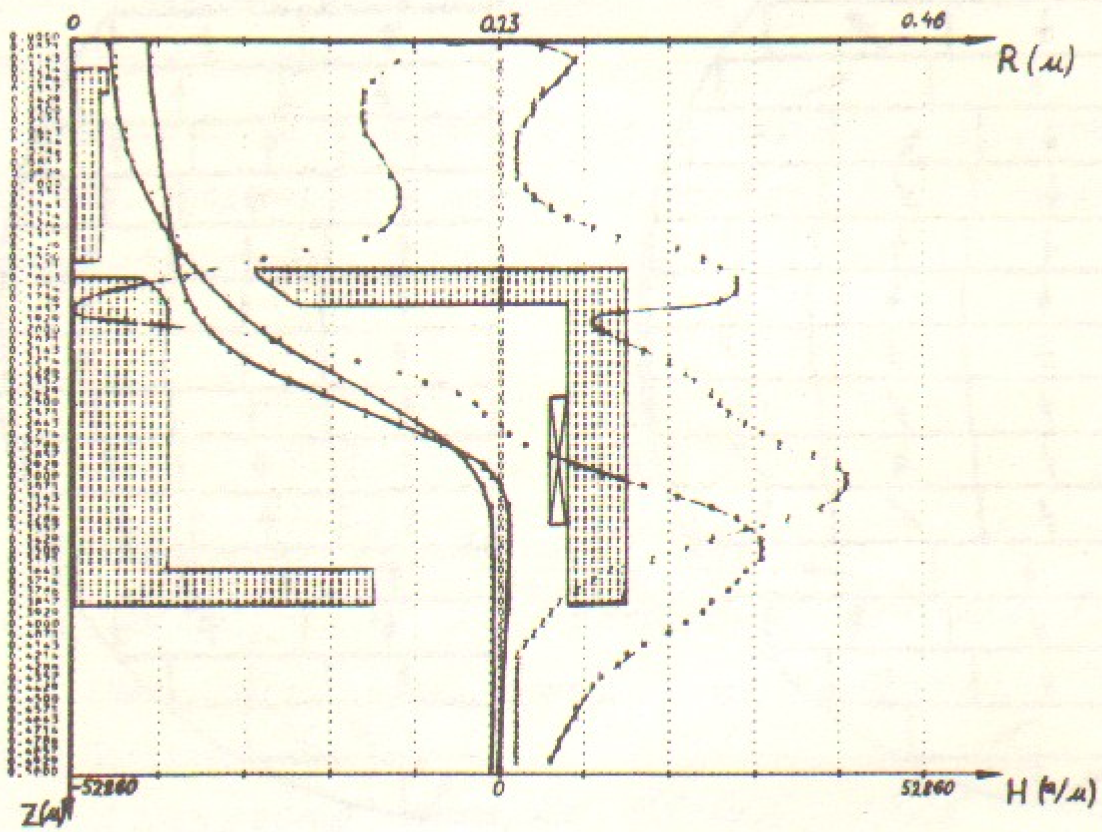


Рис 2

Работа поступила 20 октября 1975г.

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ

Подписано к печати 27.X-1975г. МН 03195

Усл. 0,8 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.

Заказ № 95.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР