Б.18

# ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 75 - 62

В.Н.Байер, А.И.Мильштейн, В.М.Страховенко

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФОТОНА С ИНТЕНСИВНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

Новосибирск

1975

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФОТОНА С ИНТЕНСИВНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

В.Н.Байер, А.И.Мильштейн, В.М.Страховенко

А Н Н О Т А Ц И Я

Нелинейные вакуумные эффекты при взаимодействии фотона с полем классической плоской электромагнитной волны рассмотрены в рамках операторной диаграммной техники. Найдена амплитуда рассеяния фотона в поле волны общего вида. Проанализирован случай монохроматической плоской волны. Получено новое представление для вероятности рождения пары частиц фотоном. Рассмотрено распространение фотона в поле волны.

Institute of Nuclear Physics,Novosibirsk,630090

# PHOTON INTERACTION WITH INTENSE ELECTROMAGNETIC WAVE

V.N.BAIER,A.I.MILSTEIN,V.M.STRAKHOVENKO

a b s t r a c t

Nonlinear vacuum effects at photon interaction with intense plane-wave field have been considered in frame of operator diagrammatic technique,which was recently applied to calculation of mass operator of electron in the intense plane-wave field (see Ref./3/). The amplitude of photon scattering in plane-wave field of general type (see Eq.(1.1))has been found (see EQs. (2.1),(2.5),(2.26)-(2.29) for spin 1/2 particles,(2.41) for spin 0 particles).The particular case of monochromatic plane-wave has been analysed (see Eqs.(2.30) - - (2.33)).A new representation of total probability of the pair creation by photon in plane-wave field has been found (see Eq.(2.38)).The photon propagation in the plane-wave field has been discussed.

## I. Введение

В работе /I/была сформулирована операторная диаграммная техника для квантовой электродинамики во внешних полях, основанная на операторном представлении функции Грина заряженной частицы в поле. Это означает, что вклад определенной диаграммы может быть взят в форме, совпадающей с формой записи для свободных частиц, в которой однако оператор импульса частицы $p_\mu = i\partial_\mu \to \mathcal{P}_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$ . Существенным элементом подхода является надлежащее преобразование входящих операторных выражений,после чего вычисления оказываются не сложными. Таким образом достоинством развиваемой техники является как её универсальность, так и относительная простота вычислений. В работах /I,2/ были рассмотрены явления в однородном и постоянном во времени электромагнитном поле, в статье /3/ специфика рассмотрения явлений в поле плоской электромагнитной волны была выяснена на примере вычисления массового оператора заряженной частицы. В данной работе та же техника применяется для изучения взаимодействия фотона с полем плоской электромагнитной волны, для чего в $\alpha$ - порядке рассмотрен вклад поляризации вакуума внешним фотоном в поле волны. Соответствующей физической реализацией является взаимодействие внешнего фотона с полем лазерной волны, когда последняя может быть представлена как классическое электромагнитное поле вида:

$$A_\mu(\varphi) = a_{1\mu}\psi_1(\varphi) + a_{2\mu}\psi_2(\varphi), \qquad (I.I)$$

где $\varphi = \varkappa x = \varkappa^0 x^0 - \vec{\varkappa}\vec{x}$, $\psi_1(\varphi)$ ,$\psi_2(\varphi)$ - некоторые функции, причем

$$\varkappa^2 = 0, \quad a_1\varkappa = a_2\varkappa = a_1 a_2 = 0. \qquad (I.2)$$

Явления в поле волны (I.I) характеризуются инвариантным параметром интенсивности

$$\xi_{1,2}^2 = -\frac{e^2 a_{1,2}^2}{m^2}, \qquad (I.3)$$

причем разложение в ряд по степеням $\xi_{1,2}^2$ является разложением по числу взаимодействий с полем волны (I.I). В области, где $\xi_{1,2}^2 \ll 1$ применима теория возмущений, а при $\xi_{1,2}^2 \sim 1$ взаимодействие с полем волны необходимо учитывать точно. Заметим, что существуют лазеры, для которых $\xi^2_{1,2}\sim 1$. Мнимая часть амплитуды упругого рассеяния внешнего фотона вперед связана с полной вероятностью рождения пары частица-античастица фотоном в поле волны. Эта задача изучалась в ряде работ /4-6/. В настоящей работе получено новое представление для вероятности рождения пары, даваемое в случае циркулярно поляризованной монохроматической волны однократным интегралом. Знание амплитуды взаимодействия фотона с полем (I.I) позволяет решить задачу о распространении фотона в "среде", которую представляет собой поле волны*).

В разделе II найдена амплитуда рассеяния фотона в поле волны (I.I), вычислен окончательный вид амплитуды для случая монохроматической волны, получены различные представления для вероятности рождения пары частиц фотоном, прослежен переход к случаю постоянного скрещенного поля. В разделе III обсуждается специфика распространения фотона в поле лазерной волны.

## II. Рассеяние фотона в поле плоской электромагнитной волны

Амплитуда рассеяния фотона с импульсом $k_1$ в поле плоской волны ( $k_1$ + волна $\to k_2$ ) при учете поляризации вакуума спинорными частицами имеет вид (см. (I.I4) работы /I/)

$$T = e_{1\mu}(k_1)\,e^{*}_{2\nu}(k_2)\,T^{\mu\nu}(k_1,k_2)$$

$$T^{\mu\nu}(k_1,k_2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4x\, Sp\langle x|\frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-m}\gamma^{\mu}e^{-ik_1X}\frac{1}{\hat{\mathcal{P}}-m}\gamma^{\nu}e^{ik_2X}|x\rangle, \qquad (2.I)$$

где $|x\rangle$ – собственный вектор оператора координаты $X$. Поскольку изменение $k_1$ обусловлено взаимодействием с волной, то всегда $k_2 = k_1 + c\varkappa$, где $c$ – скаляр. С учетом этого и соотношений (I.2) имеем

$$\varkappa k_1 = \varkappa k_2 = \varkappa k;\; a_1k_1 = a_1k_2 = a_1k;\; a_2k_1 = a_2k_2 = a_2k; \qquad (2.2)$$

*) Когда эта работа была окончена, нам стала известна работа /7/, в которой тот же круг вопросов рассмотрен с использованием явного вида функции Грина электрона в поле волны, найденного Швингером /8/. В области перекрытия результаты обеих работ совпадают. Мы благодарны В.И.Ритусу, указавшему нам на работу /7/.



т.е. когда скалярные произведения для векторов $k_1$ и $k_2$ одинаковы, мы будем пользоваться обозначением $k$.

Построим вектора

$$\Lambda_1^{\mu} = \frac{(kf_1)^{\mu}}{\sqrt{-a_1^2}\,\varkappa k},\quad \Lambda_2^{\mu} = \frac{(kf_2)^{\mu}}{\sqrt{-a_2^2}\,\varkappa k}, \qquad (2.3)$$

$$\Lambda_3^{\mu} = \frac{\varkappa^{\mu}k_1^2 - k_1^{\mu}\varkappa k}{\sqrt{k_1^2}\,\varkappa k},\quad \Lambda_4^{\mu} = \frac{\varkappa^{\mu}k_2^2 - k_2^{\mu}\varkappa k}{\sqrt{k_2^2}\,\varkappa k},$$

где

$$\Lambda_1^2 = \Lambda_2^2 = \Lambda_3^2 = \Lambda_4^2 = -1,$$

$$f_{1,2}^{\mu\nu} = \varkappa^{\mu}a_{1,2}^{\nu} - \varkappa^{\nu}a_{1,2}^{\mu},\quad (kf_{1,2})^{\mu} = k_{\nu}f_{1,2}^{\nu\mu}. \qquad (2.4)$$

Совокупности $k_1^{\mu}/\sqrt{k_1^2}, \Lambda_1^{\mu}, \Lambda_2^{\mu}, \Lambda_3^{\mu}$ и $k_2^{\mu}/\sqrt{k_2^2}, \Lambda_1^{\mu}, \Lambda_2^{\mu}, \Lambda_4^{\mu}$ представляют собой ортонормированные наборы*), по которым может быть разложен любой вектор задачи.

Амплитуда $T^{\mu\nu}(k_1,k_2)$ (2.I) является калибровочно-инвариантной (строго говоря после проведения регуляризации). Тогда, в силу сказанного выше, она может быть разложена по векторам (2.3):

$$T^{\mu\nu}(k_1,k_2) = c_1\Lambda_1^{\mu}\Lambda_2^{\nu} + c_2\Lambda_2^{\mu}\Lambda_1^{\nu} + c_3\Lambda_1^{\mu}\Lambda_1^{\nu} + c_4\Lambda_2^{\mu}\Lambda_2^{\nu} + c_5\Lambda_3^{\mu}\Lambda_4^{\nu} \qquad (2.5)$$

Коэффициенты при остальных возможных комбинациях из векторов $\Lambda_k^{\mu}$ обращаются в нуль в силу теоремы Фарри. Дальнейшая задача состоит в вычислении коэффициентов $c_1 \div c_5$. Воспользуемся тем, что в выражении $\int d^4x\, Sp\langle x|\ldots|x\rangle$ можно циклически переставлять операторы внутри обкладок, и перенесем в (2.I) оператор $(\hat{\mathcal{P}}+m)$ к правой обкладке. После этого пронесем оператор $e^{-ik_1X}$ налево, а оператор $e^{ik_2X}$ – направо, с учетом того, что они являются операторами сдвига в импульсном пространстве, и вынесем затем матрицу $\gamma^{\nu}$ направо:

$$T^{\mu\nu}(k_1,k_2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4x\, e^{-i(k_1-k_2)x}\, Sp\langle x|\frac{1}{(\mathcal{P}+k_1)^2-m^2}\gamma^{\mu}\times \qquad (2.6)$$

$$\times\frac{1}{\mathcal{P}^2-m^2}(\hat{\mathcal{P}}+m)\left[2\mathcal{P}^{\nu} + \gamma^{\nu}\hat{k}_2 + (m-\hat{\mathcal{P}})\gamma^{\nu}\right]|x\rangle.$$

В полученном выражении член с $(m-\hat{\mathcal{P}})$ в прямоугольных скобках приводится к виду:

$$\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4x\, e^{-i(k_1-k_2)x}\, Sp\left[\langle x|\frac{1}{\mathcal{P}^2-m^2}|x\rangle\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right], \qquad (2.7)$$

*) Имеют место соотношения полноты, например:

$$g^{\mu\nu} = \frac{k_1^{\mu}k_1^{\nu}}{k_1^2} - \Lambda_1^{\mu}\Lambda_1^{\nu} - \Lambda_2^{\mu}\Lambda_2^{\nu} - \Lambda_3^{\mu}\Lambda_3^{\nu}$$

используя который нетрудно убедиться (см. ниже), что этот член не зависит от поля волны. При регуляризации он выпадает, поэтому в дальнейшем мы его выписывать не будем. В остальном выражении проведем экспоненциальную параметризацию пропагаторов:

$$T^{\mu\nu}(k_1,k_2) = \frac{e^2}{(2\pi)^4}\int_0^\infty dt \int_0^\infty ds\, e^{-im^2(s+t)}\tilde{T}^{\mu\nu}, \tag{2.8}$$

где

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \int d^4x\, e^{-i(k_1-k_2)x}\, Sp\langle x| e^{it(\hat{\mathcal{P}}+\hat{k})^2}\gamma^\mu e^{is\hat{\mathcal{P}}^2}(\hat{\mathcal{P}}+m)(\gamma^\nu\hat{k}_2+2\mathcal{P}^\nu)|x\rangle \tag{2.9}$$

Для преобразования входящих в (2.9) членов воспользуемся формулами (А.26), (3.7) работы /3/, тогда $\tilde{T}^{\mu\nu}$ можно переписать в виде:

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \int d^4x\, e^{-i(k_1-k_2)x}\langle x| e^{it(\mathcal{P}+k_1)^2} e^{i\mathcal{P}^2 s} B^{\mu\nu}|x\rangle, \tag{2.10}$$

где

$$B^{\mu\nu} = Sp\left[\gamma^\mu(1+e^{(+)}\hat{\varkappa}\hat{a})(\hat{\mathcal{P}}+m)(\gamma^\nu\hat{k}_2+2\mathcal{P}^\nu)(1+e^{(-)}\hat{\varkappa}\hat{a})\right];$$

$$e^{(+)}(s) = \frac{e\tau^{(+)}(s)}{2(\varkappa\mathcal{P})},\quad \tau^{(+)}(s) = \psi(\varphi+2(\varkappa\mathcal{P})s) - \psi(\varphi); \tag{2.11}$$

$$e^{(-)}(t) = -\frac{e\tau^{(-)}(t)}{2\varkappa(\mathcal{P}+k)},\quad \tau^{(-)}(t) = \psi(\varphi-2\varkappa(\mathcal{P}+k)t) - \psi(\varphi).$$

Эти формулы можно использовать непосредственно для линейно-поляризованной волны. Однако ими можно пользоваться и в общем случае эллиптической поляризации, понимая, что применена компактная форма записи $a\psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2$, т.е. $a\tau = a_1\tau_1 + a_2\tau_2$.

Для вычисления коэффициентов $c_1 \div c_5$ в (2,5) можно свернуть тензор $T^{\mu\nu}_{(k_1,k_2)}$(2.8) с парными комбинациями векторов $\Lambda_1^\mu \div \Lambda_4^\mu$(2.3). При этом в силу калибровочной инвариантности $T^{\mu\nu}(k_1,k_2)$, члены в векторах $\Lambda_3^\mu$, $\Lambda_4^\mu$ содержащие $k_1^\mu$, $k_2^\nu$ при свертке дадут нуль. Все остальные члены в векторах $\Lambda_1^\mu \div \Lambda_4^\mu$ содержат либо $f_{1,2}^{\nu\mu}$, либо $\varkappa^\mu$, которые при свертке с $\varkappa^\mu$ обращаются в нуль. Это означает, что во входящем в формулу (2.10) следе $B^{\mu\nu}$ можно опустить все члены, содержащие $\varkappa^\mu, \varkappa^\nu$, что позволяет в дальнейшем использовать существенно упрощенное выражение для $B^{\mu\nu}$:

$$B^{\mu\nu} = 4\{2\mathcal{P}^\mu\mathcal{P}^\nu + \mathcal{P}^\mu k_2^\nu + \mathcal{P}^\nu k_2^\mu - g^{\mu\nu}(k_2\mathcal{P}) + \tag{2.12}$$

$$+(e^{(+)}(s)+e^{(-)}(t))[g^{\mu\nu}(\mathcal{P}fk_2) - k_2^\mu(\mathcal{P}f)^\nu + \mathcal{P}^\mu(kf)^\nu] -$$

$$-(e^{(+)}(s)-e^{(-)}(t))[(\mathcal{P}f)^\mu(2\mathcal{P}^\nu+k_2^\nu)+(kf)^\mu\mathcal{P}^\nu]\},$$

где следует понимать все комбинации так: $e^{(\pm)}f = e_1^{(\pm)}f_1 + e_2^{(\pm)}f_2$.

Учтем теперь, что тензор $B^{\mu\nu}$ содержит оператор $\mathcal{P}^\mu$ в векторной форме, а также в комбинациях $(\varkappa\mathcal{P})$, $(f\mathcal{P})^\mu$ и $(k_2\mathcal{P})$. В соответствии со сказанным выше, при свертке тензора $B^{\mu\nu}$ с векторами (2.3) образуются $(\varkappa\mathcal{P})$, $(f\mathcal{P})^\mu$. Скалярное произведение $(\varkappa\mathcal{P})$ коммутирует со всеми операторами задачи, и, следовательно, может рассматриваться как с-число. Комбинации $(f\mathcal{P})^\mu$ также коммутируют между собой. Поэтому фактически тензор $B^{\mu\nu}$ (2.12) содержит единственный операторный член $(k_2\mathcal{P})$, который мы рассмотрим отдельно, взяв для него исходное выражение:

$$\int d^4x \langle x| \frac{1}{(\mathcal{P}+k_1)^2-m^2}\,\frac{1}{\mathcal{P}^2-m^2}(k_2\mathcal{P})e^{-ik_1X}e^{ik_2X}|x\rangle. \tag{2.13}$$

Использовав тождество

$$2(k_2\mathcal{P}) = (\mathcal{P}+k_2)^2-m^2-(\mathcal{P}^2-m^2)-k_2^2, \tag{2.14}$$

перепишем (2.13) в форме

$$\frac{1}{2}\int d^4x\langle x|\frac{1}{(\mathcal{P}+k_1)^2-m^2}\cdot\frac{1}{\mathcal{P}^2-m^2}\left[(\mathcal{P}+k_2)^2-m^2-(\mathcal{P}^2-m^2)-k_2^2\right]e^{-ik_1X}e^{ik_2X}|x\rangle \tag{2.15}$$

Преобразуем первый член в фигурных скобках в (2.15) учитывая, что $[(\mathcal{P}+k_2)^2-m^2]e^{-ik_1X}e^{ik_2X} = e^{-ik_1X}e^{ik_2X}[(\mathcal{P}+k_1)^2-m^2]$ и воспользовавшись возможностью циклической перестановки операторов. После этого преобразования первый и второй члены в фигурных скобках в (2.15) сократятся, а это означает, что мы можем заменить в $B^{\mu\nu}$ (2.12) величину $(k_2\mathcal{P})$ на $-k_2^2/2$. После этого в выражении для тензора $B^{\mu\nu}$ не останется операторных членов, что существенно упрощает вычисление среднего $\langle x|\ldots|x\rangle$ в формуле (2.10).

Преобразуем выражение

$$I = \langle x|e^{it(\mathcal{P}+k_1)^2}e^{is\mathcal{P}^2}|x\rangle = \langle x|e^{ik_1X}e^{it\mathcal{P}^2}e^{-ik_1X}e^{is\mathcal{P}^2}|x\rangle, \tag{2.16}$$

используя результат распутывания экспоненциальных операторных выражений (см. (А.20), (3.7) работы /3/):

$$I = \langle x|e^{it\int_0^\infty[a(\mathcal{P}+k)-ea^2\tau^{(-)}(ty)]^2\frac{dy}{a^2}}e^{i(\mathcal{P}+k_1)_\perp^2 t}e^{i\mathcal{P}_\perp^2 s}e^{is\int_0^\infty[a\mathcal{P}-ea^2\tau^{(+)}(sy)]^2\frac{dy}{a^2}}|x\rangle, \tag{2.17}$$

где использованы обозначения (2.11). Дальнейшее рассмотрение удобно проводить в "специальной" системе отсчета, где вектор $\vec{\varkappa}$ направлен по оси 3, т.е. $\varkappa^0=\varkappa^3$; вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ лежат в плоскости (I,2). Введем переменные

$$\vartheta = \frac{x^0-x^3}{\sqrt{2}},\quad v = \frac{x^0+x^3}{\sqrt{2}};\quad p_\vartheta = i\frac{\partial}{\partial\vartheta},\quad p_v = i\frac{\partial}{\partial v}, \tag{2.18}$$

тогда $\varphi = \sqrt{2}\,\varkappa^0 \vartheta$ , $\mathcal{P}^0 = p^0 = \frac{p_\vartheta + p_v}{\sqrt{2}}$ ,

$$\varkappa \mathcal{P} = \sqrt{2}\,\varkappa^0 p_v \ , \quad \mathcal{P}^3 = p^3 = \frac{p_\vartheta - p_v}{\sqrt{2}} , \tag{2.19}$$

$$\mathcal{P}_\perp^2 = \mathcal{P}_0^2 - \mathcal{P}_3^2 = 2 p_\vartheta p_v .$$

Используя теорему полноты (см. (2.40) статья /2/)

$$\langle x | R(p) | x \rangle = \int d^4 p\, R(p) \tag{2.20}$$

среднее по состоянию, зависящему от 4-вектора $x_\mu$ , будем брать покомпонентно: $|x\rangle = |v, \vartheta, xa_1, xa_2\rangle$. При вычислении $\langle \vartheta | \ldots | \vartheta \rangle$ под знаком среднего следует оставить только члены, содержащие оператор $\mathcal{P}_\perp^2$ , поскольку оператор $(a\mathcal{P})$ не действует на $|\vartheta\rangle$ , а для входящих в выражение явных функций переменной $\vartheta$ (это функции $\tau^{(\pm)}$ ) состояние $|\vartheta\rangle$ является собственным, т.е. $e^{if(\vartheta)}|\vartheta\rangle = |\vartheta\rangle e^{if(\vartheta)}$. Учитывая это имеем из (2.I7), (2.20):

$$\langle \vartheta | e^{2it(p_\vartheta + k_{1\vartheta})(p_v + k_{1v})} e^{2is p_\vartheta p_v} | \vartheta \rangle = \frac{\pi}{s+t} e^{2ik_{1\vartheta}(p_v + k_{1v})t}\, \delta\left(p_v + \frac{k_{1v} t}{s+t}\right). \tag{2.21}$$

Тогда вычисление среднего $\langle v | \ldots | v \rangle$ сводится к интегрированию $\delta$-функции, при котором

$$2(\mathcal{P}+k)\varkappa \to 2\varkappa k \frac{s}{s+t} \ ; \quad 2(\mathcal{P}\varkappa) \to -\frac{2(\varkappa k)t}{s+t} , \tag{2.22}$$

а вычисление среднего по $xa_1, xa_2$ , проводится непосредственно согласно формуле (2.20) и сводится к интегралам Френеля. В итоге найдем для среднего (2.I6)

$$I = -\frac{i\pi^2}{(s+t)^2} e^{i\mu k_1^2} e^{i(s+t)\beta} , \tag{2.23}$$

где

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 ,$$

$$\beta_{1,2} = e^2 a_{1,2}^2 \left[ \int_0^1 \Delta_{1,2}^2(\mu y)\, dy - \left( \int_0^1 \Delta_{1,2}(\mu y)\, dy \right)^2 \right] , \tag{2.24}$$

$$\Delta_{1,2}(\mu y) = \psi_{1,2}(\varphi - 2(\varkappa k)\mu y) - \psi_{1,2}(\varphi) , \quad \mu = \frac{st}{s+t} .$$

Согласно проведенным выше рассуждениям, после замены $(k_2 \mathcal{P}) \to -\frac{k_2^2}{2}$ все операторы входящие в тензор $B^{\mu\nu}$ (2.I0), (2.I2) могут рассматриваться как с-числа. Тогда вычисление средних сводится к взятию квадратур того же типа, которые встречаются при вычислении поляризационного оператора в $\alpha$-порядке для свободных частиц при использовании экспоненциальной параметризации пропагаторов (см., напр. /9/). Фактически для получения результата следует подставить в (2.I0) среднее (2.I6), (2.23), а в тензоре $B^{\mu\nu}$ провести замены

$$\mathcal{P}^\mu \to R^\mu = -\frac{k_1^\mu t}{s+t} + e a_1^\mu \int_0^1 \Delta_1(\mu y)\, dy + e a_2^\mu \int_0^1 \Delta_2(\mu y)\, dy , \tag{2.25}$$

$$\mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\nu \to R^\mu R^\nu + \frac{i}{2(s+t)} \left( \frac{a_1^\mu a_1^\nu}{a_1^2} + \frac{a_2^\mu a_2^\nu}{a_2^2} \right) .$$

Подставляя найденный таким образом тензор $\tilde{T}^{\mu\nu}$ в (2.8) и сворачивая $T^{\mu\nu}(k_1, k_2)$ с соответствующими комбинациями векторов $\Lambda_1^\mu \div \Lambda_4^\mu$ входящих в (2.5), получим явные выражения для коэффициентов $c_1 \div c_5$ . Найденное так выражение для тензора $T^{\mu\nu}(k_1, k_2)$ нуждается в регуляризации. Для этого представим его в виде:

$$T^{\mu\nu}(k_1, k_2) = \left( T^{\mu\nu}(k_1, k_2) - T^{\mu\nu}_{F=0}(k_1, k_2) \right) + T^{\mu\nu}_{F=0}(k_1, k_2) \tag{2.26}$$

Первый член исчезает, когда после волны $F = 0$ , а второй член (не зависящий от поля, тогда $k_1 = k_2$ ) необходимо стандартным образом перенормировать (ср. /2/). После вычитания члена $T^{\mu\nu}_{F=0}(k_1, k_2)$ получим следующие выражения для коэффициентов $c_1 \div c_5$ в (2.5)

$$c_n = -\frac{i\alpha}{2\pi} \int_{-1}^{1} dv \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \int d^4x\, e^{-i(k_1 - k_2)x}\, e^{-im^2\tau\left(1 - \frac{k_1^2(1-v^2)}{4m^2}\right)} b_n , \tag{2.27}$$

где мы перешли к новым переменным $\tau = s+t$ , $v = \frac{s-t}{s+t}$ , т.е. $\mu = \frac{\tau}{4}(1 - v^2)$ и

$$b_1 = 2\xi_1 \xi_2 m^2 \left[ D_1 \int_0^1 \Delta_2(\mu y)\, dy - \frac{1}{1-v^2} \Delta_2(\mu) \int_0^1 \Delta_1(\mu y)\, dy \right] e^{i\beta\tau} ,$$

$$b_2 = 2\xi_1 \xi_2 m^2 \left[ D_2 \int_0^1 \Delta_1(\mu y)\, dy - \frac{\Delta_1(\mu)}{1-v^2} \int_0^1 \Delta_2(\mu y)\, dy \right] e^{i\beta\tau} , \tag{2.28}$$

$$b_3 = 2m^2 \left[ \xi_1^2 D_1 \int_0^1 \Delta_1(\mu y)\, dy + \frac{\Delta_2(\mu)\xi_2^2}{1-v^2} \int_0^1 \Delta_2(\mu y)\, dy \right] e^{i\beta\tau} - \left( \frac{i}{\tau} + \frac{k_2^2}{2} \right) \left( e^{i\beta\tau} - 1 \right) ,$$

$$b_4 = 2m^2 \left[ \xi_2^2 D_2 \int_0^1 \Delta_2(\mu y)\, dy + \frac{\Delta_1(\mu)\xi_1^2}{1-v^2} \int_0^1 \Delta_1(\mu y)\, dy \right] e^{i\beta\tau} - \left( \frac{i}{\tau} + \frac{k_2^2}{2} \right) \left( e^{i\beta\tau} - 1 \right) ,$$

$$b_5 = -\sqrt{k_1^2 k_2^2}\, \frac{(1-v^2)}{2} \left( e^{i\beta\tau} - 1 \right) ;$$

здесь

$$D_{1,2} = \int_0^1 \Delta_{1,2}(\mu y)\, dy + \frac{v^2}{1-v^2} \Delta_{1,2}(\mu) , \tag{2.29}$$

использованы обозначения (2.24). Поскольку коэффициенты $b_n$ являются функциями $\varphi=\varkappa x$, то взаимодействие фотона, описываемое тензором $T^{\mu\nu}_{(k_1,k_2)}$ в общем случае является неупругим $(k_1 \neq k_2)$, т.е. плоская волна вида (I.I) является для внешнего фотона оптически активной "средой".

В случае эллиптически поляризованной монохроматической волны, когда

$$\psi_1 = \cos\varphi\,,\quad \psi_2 = \sin\varphi \tag{2.30}$$

интегралы входящие в $b_n$ (2.28) без труда берутся. В результате получим для коэффициентов $C_n$ в выражении для $T^{\mu\nu}(k_1,k_2) - T^{\mu\nu}_{F=0}(k_1,k_2)$ (см. (2.5) ):

$$c_n = -i(2\pi)^4 m^2 \frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{1} dv \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} \exp\left\{-i\frac{2\rho}{|\lambda|(1-v^2)}\times\right.$$
$$\left.\times\left[1-\frac{k_1k_2(1-v^2)}{4m^2}+A(\xi_1^2+\xi_2^2)\right]\right\}\left[\delta(k_1-k_2)d_n+\sum_{\substack{\ell=-\infty\\ \ell\neq 0}}^{\infty}\delta(k_1-k_2-2\varkappa\ell)\,g_n^\ell\right], \tag{2.31}$$

где

$$d_1=-d_2=2\rho\,\xi_1\xi_2 A_0\left(\frac{1+v^2}{1-v^2}\right)J_0(z)\,\mathrm{sign}\,\lambda\,,$$

$$d_3=\left[A_1\xi_1^2-\sin^2\rho\,\frac{\xi_1^2-\xi_2^2}{1-v^2}\right]\left[J_0(z)-iJ_0'(z)\right]+\xi_1^2\sin^2\rho\left(\frac{1+v^2}{1-v^2}\right)J_0(z)-$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{k_1k_2}{m^2}+\frac{i|\lambda|(1-v^2)}{\rho}\right)\left(J_0(z)-e^{iy}\right),\quad d_4=d_3\left(\xi_1^2\leftrightarrow\xi_2^2\right), \tag{2.32}$$

$$d_5=-\frac{k_1k_2}{4m^2}(1-v^2)\left(J_0(z)-e^{iy}\right);$$

$$g_1^\ell=\xi_1\xi_2\left[2A_0\rho\frac{1+v^2}{1-v^2}\mathrm{sign}\,\lambda-A_1\frac{\ell}{z}\right]i^\ell J_\ell(z),\quad g_2^\ell=g_1^\ell(A_0\to -A_0,\ z\to z),$$

$$g_3^\ell=\left[\xi_1^2A_1+\sin^2\rho\,\frac{\xi_1^2v^2+\xi_2^2}{1-v^2}\right]i^\ell J_\ell(z)+\left[\xi_1^2A_1-\frac{\sin^2\rho(\xi_1^2-\xi_2^2)}{1-v^2}\right]\times$$
$$\times\, i^{\ell-1}J_\ell'(z)-\frac{1}{4}\left(\frac{k_1k_2}{m^2}+\frac{i|\lambda|(1-v^2)}{\rho}\right)i^\ell J_\ell(z),$$

$$g_4^\ell=g_3^\ell(\xi_1^2\leftrightarrow\xi_2^2)(-1)^\ell\,,\quad g_5^\ell=-\frac{\sqrt{k_1^2k_2^2}}{4m^2}(1-v^2)\,i^\ell J_\ell(z).$$

Здесь $J_0(z), J_\ell(z)$ – функции Бесселя, использованы обозначения

$$A=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sin^2\rho}{\rho^2}\right),\quad A_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\rho}{\rho^2}-\frac{\sin 2\rho}{2\rho}\right),\quad A_1=A+2A_0; \tag{2.33}$$

$$z=\frac{2\rho(\xi_1^2-\xi_2^2)}{|\lambda|(1-v^2)}A_0\,,\quad y=\frac{2\rho(\xi_1^2+\xi_2^2)}{|\lambda|(1-v^2)}A\,,\quad \lambda=\frac{(\varkappa k)}{2m^2};$$



сделана замена $\tau=\frac{2\rho}{|\lambda|m^2(1-v^2)}$. Выражения для $C_n$ (2.3I) представляют собой сумму двух членов. Один из них (с коэффициентом $d_n$ ) описывает упругое рассеяние фотона в поле волны, другой (содержащий $g_n$ ) описывает неупругое рассеяние, сопровождающееся излучением (поглощением) "фотонов" волны. В случае циркулярно поляризованной монохроматической волны $\xi_1^2=\xi_2^2=\xi^2$ входящие в (2.3I) коэффициенты существенно упрощаются. В этом случае тензор $T^{\mu\nu}_{(k_1,k_2)}$(2.5) имеет вид (вычтен тензор $T^{\mu\nu}$ при $F=0$):

$$\frac{T^{\mu\nu}_{(k_1,k_2)}}{i(2\pi)^4}=\Pi^{\mu\nu}_{(0)}\delta(k_1-k_2)+\Pi^{\mu\nu}_{(-)}\delta(k_1-k_2-2\varkappa)+\Pi^{\mu\nu}_{(+)}\delta(k_1-k_2+2\varkappa); \tag{2.34}$$

$$\Pi^{\mu\nu}_{(0)}=(\Lambda_1^\mu\Lambda_2^\nu-\Lambda_2^\mu\Lambda_1^\nu)\alpha_1+(\Lambda_1^\mu\Lambda_1^\nu+\Lambda_2^\mu\Lambda_2^\nu)\alpha_3+\Lambda_3^\mu\Lambda_3^\nu\alpha_5\,,$$

$$\Pi^{\mu\nu}_{(\mp)}=(\Lambda_1^\mu\mp i\Lambda_2^\mu)(\Lambda_1^\nu\mp i\Lambda_2^\nu)\alpha_0\,,$$

где(см.также(2.33))

$$\alpha_n=-\frac{\alpha}{2\pi}m^2\int_{-1}^{1}dv\int_0^\infty\frac{d\rho}{\rho}\exp\left\{-\frac{2\rho i}{|\lambda|(1-v^2)}\left[1-\frac{k_1k_2}{4m^2}(1-v^2)+2A\xi^2\right]\right\}\omega_n; \tag{2.35}$$

$$\omega_0=\xi^2A_1\,,\quad \omega_1=4\xi^2A_0\rho\left(\frac{1+v^2}{1-v^2}\right)\mathrm{sign}\,\lambda\,,$$

$$\omega_3=2\xi^2\sin^2\rho\,\frac{1+v^2}{1-v^2}-\left[1+\frac{k_1^2(1+v^2)}{4m^2}\right](1-e^{iy}),\quad \omega_5=-\frac{k_1^2(1-v^2)}{2m^2}(1-e^{iy}).$$

Таким образом из циркулярно поляризованной волны могут излучиться(поглотиться) только два фотона[x], что обусловлено тем, что "фотоны" волны имеют в этом случае определенную спиральность и возможны переходы без изменения спиральности падающего фотона $(\ell=0)$ и с изменением спиральности на обратную $(\ell=\pm 1)$. Это видно из (2.34), поскольку в неупругих членах образовались характерные комбинации из спиральных ортов.

Введем "диагональный" поляризационный оператор , связанный с амплитудой упругого рассеяния фотона следующим образом:

$$T_e^{\mu\nu}(k_1,k_2)=i(2\pi)^4\delta(k_1-k_2)\,\Pi_e^{\mu\nu}(k_1)\,. \tag{2.36}$$

Его мнимая часть определяет вероятность рождения электрон-

[x] Это обстоятельство отмечено в работе /7/.

позитронной пары фотоном в поле волны (ср.формулу (3.I4)/2/):

$$W = \frac{1}{K_1^0} e_\mu e_\nu^* \, \mathrm{Im}\, \Pi_e^{\mu\nu}(K_1), \qquad (2.37)$$

где $K_1^0$ - энергия фотона. С учетом формул (2.35), (2.5), (2.3I), (2.34) имеем отсюда для вероятности рождения пары неполяризованным реальным фотоном $(K_1^2=0)$ в поле циркулярно поляризованной волны:

$$W^{cz} = -\frac{g_{\mu\nu}\,\mathrm{Im}\,\Pi^{\mu\nu}_{e(cz)}}{2K_1^0} =$$

$$= \frac{\alpha m^2}{4\pi K_1^0}\,\mathrm{Im}\int_1^\infty \frac{du}{u\sqrt{u(u-1)}}\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho}\left\{ e^{-iZ_1^{cz}}\left[1-2\xi^2(2u-1)\sin^2\rho\right] - e^{-\frac{2i\rho u}{|\lambda|}}\right\} = \qquad (2.38)$$

$$= -\frac{\alpha m^2}{4K_1^0}\,\mathrm{Im}\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho} e^{-i\eta}\left\{(1+2\xi^2\sin^2\rho)\eta\left[H_0^{(2)}(\eta)+iH_1^{(2)}(\eta)\right]-2i\xi^2 H_0^{(2)}(\eta)\right\},$$

здесь $Z_1^{cz}=2u\eta$, $\eta=\frac{\rho}{|\lambda|}\left[1+\xi^2\left(1-\frac{\sin^2\rho}{\rho^2}\right)\right]$, $H_{0,1}^{(2)}$ - функция Ханкеля, проведена замена переменных $u=1/_{1-\upsilon^2}$. Аналогичным образом находятся вероятности рождения пары поляризованными фотонами. Формула (2.38) является новым представлением вероятности рождения пары, аналогичным формулам (3.36), (3.35) работы /3/ для вероятности излучения фотона электроном в поле волны. Используя производящую функцию для бесселевых функций и степенное разложение в ряд квадрата бесселевой функции имеем из (2.38) известное представление /5/ для $W^{cz}$:

$$W^{cz} = \frac{\alpha m^2}{4K_1^0}\sum_{n\,(u_n>1)} \int_1^{u_n} \frac{du}{u\sqrt{u(u-1)}}\left\{2J_n^2(z)+\xi^2(2u-1)\left[J_{n+1}^2(z)+J_{n-1}^2(z)-2J_n^2(z)\right]\right\}, \qquad (2.39)$$

где $z=\frac{2\xi\sqrt{1+\xi^2}}{\lambda}\sqrt{u(u_n-u)}$, $u_n=\frac{n\lambda}{1+\xi^2}$, неравенство $u_n\geq 1\ (2(\varkappa K)n\geq 4m^2(1+\xi^2))$, есть условие порога рождения, пары когда из волны поглощается $n$ "фотонов" с учетом изменения массы частиц в поле волны.

Предел $\xi\gg 1$ соответствует переходу к процессам в постоянном и однородном поле $\vec E\perp\vec H$, $|\vec E|=|\vec H|$, или, что то же самое, переходу к квазиклассическому приближению для фотона, распространяющегося во внешнем поле. В этом случае $\psi(\varphi)=\varphi$ и удобно воспользоваться формулами (2.5), (2.27) для линейно поляризованной волны $(\xi_2=0)$. Полученный таким образом поляризационный оператор в квазиклассическом приближении $\Pi^{\mu\nu}_{(q)}$ (см.(2.36)) можно использовать, в частности, для вычисления рождения пары фотоном. Например для неполяризованных фотонов получим вероятность

$$W^{(q)} = -\frac{g_{\mu\nu}\,\mathrm{Im}\,\Pi^{\mu\nu}_{(q)}}{2K_1^0} = \frac{\alpha m^2}{3\sqrt{3}\pi K_1^0}\int_0^1 d\upsilon\left(\frac{9-\upsilon^2}{1-\upsilon^2}\right)K_{2/3}\left(\frac{8}{3\chi(1-\upsilon^2)}\right), \qquad (2.40)$$

зависящую от одного параметра $\chi=\xi\frac{(\varkappa K_1)}{m^2}$. Этот результат согласуется с полученным ранее в квазиклассическом приближении (см. /I0/стр.I74).

Расчет вклада частиц со спином 0 в поляризацию вакуума полностью аналогичен проведенному выше, а сами вычисления являются значительно более простыми. Результат можно представить в форме (2.5), (2.27), где коэффициенты $b_n$ есть:

$$b_1^{(0)} = -\xi_1\xi_2 m^2\int_0^1 \Delta_2(\mu y)dy\left[\int_0^1 \Delta_1(\mu y)dy-\Delta_1(\mu)\right]e^{i\tau\beta}, \qquad (2.4I)$$

$$b_2^{(0)} = b_1^{(0)}\,(\xi_1\leftrightarrow\xi_2,\ \Delta_1\leftrightarrow\Delta_2),$$

$$b_3^{(0)} = -\xi_1^2 m^2\int_0^1 \Delta_1(\mu y)dy\left[\int_0^1 \Delta_1(\mu y)dy-\Delta_1(\mu)\right]e^{i\tau\beta}+\frac{i}{2\tau}(e^{i\tau\beta}-1),$$

$$b_4^{(0)} = b_3^{(0)}(\xi_1\leftrightarrow\xi_2,\ \Delta_1\to\Delta_2),\quad b_5^{(0)} = -\sqrt{K_1^2K_2^2}\,\frac{\upsilon^2}{4}(e^{i\tau\beta}-1).$$

## III. Распространение фотона в поле волны

Для внешнего фотона поле волны можно рассматривать как материальную "среду". Распространение фотона в этой среде описывается решениями уравнения Максвелла, которое с учетом взаимодействия с полем плоской волны можно в импульсном представлении записать в форме:

$$K_1^2 e_\mu(K_1) = \int \frac{T^{\mu\nu}(K_1,K_2)}{i(2\pi)^4}e_\nu(K_2)\,d^4K_2, \qquad (3.I)$$

где $e_\mu(K)$ - вектор поляризации фотона. Рассмотрим это уравнение в случае циркулярно поляризованной волны воспользовавшись тензором (2.34). Вектор поляризации в уравнении (3.I), (2.34) можно разложить по ортонормированному набору $\frac{K_1^\mu}{\sqrt{K_1^2}}, \Lambda_1^\mu, \Lambda_2^\mu, \Lambda_3^\mu$. Соответственно получаем четыре решения - одно продольное и три поперечных. Продольное решение можно записать в форме

$$e_\mu^{l}(K) = f(K)\,\delta(K^2)K_\mu, \qquad (3.2)$$

где $f(k)$ – произвольная функция. Одно из поперечных решений есть

$$e^{(1)}_{\mu}(k) = f^{(1)}(k)\,\delta(k^2+\alpha_5)\,\Lambda_{3\mu}\,, \qquad (3.3)$$

поскольку $(k^2+\alpha_5)\,e^{(1)}_{\mu} = 0$. Два других решения будем искать в виде

$$e^{\mu} = f^{(2)}\Lambda^{\mu}_{(+)} + f^{(3)}\Lambda^{\mu}_{(-)}\,, \quad \Lambda^{\mu}_{(\pm)} = \Lambda^{\mu}_{1} \pm i\Lambda^{\mu}_{2}\,. \qquad (3.4)$$

Подставляя это выражение в уравнение, найдем, что функции $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (k^2+\alpha_3+i\alpha_1)\,f^{(2)} + 2\alpha_0\, f^{(3)}_{(+)} = 0 \\ 2\alpha_0\, f^{(2)}_{(-)} + (k^2+\alpha_3-i\alpha_1)\, f^{(3)} = 0\,, \end{cases} \qquad (3.5)$$

где функции, имеющие индекс $(\pm)$ зависят от $k_1 \pm 2\varkappa$, остальные функции зависят от $k_1$. Эта система имеет решения при условии обращения в нуль детерминанта

$$\begin{vmatrix} k^2+\alpha_3+i\alpha_1 & 2\alpha_0 \\ 2\alpha_0^{(+)} & (k+2\varkappa)^2+\alpha_3^{(+)}-i\alpha_1^{(+)} \end{vmatrix} = 0\,, \qquad (3.6)$$

представляющего собой дисперсионное уравнение для этих двух решений.

Особенно просто выглядит анализ решений в области $\lambda \ll 1$, $k^2 \ll m^2\ (\xi^2 \lesssim 1)$, причем это неравенство выполняется для лазеров в видимой части спектра, если энергия внешнего фотона $k_1^{\,0} \lesssim 10^{10}$ эв. В этой области коэффициенты $\alpha_n$ (см. (2.35)) с точностью до членов $\sim \lambda^2$ имеют вид:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\xi^2}{60}\frac{(\varkappa k)^2}{m^2}\,, \quad \alpha_3 = \frac{11}{90}\frac{\alpha}{\pi}\xi^2\frac{(\varkappa k)^2}{m^2}\,, \quad \alpha_1 = \alpha_5 = 0\,. \qquad (3.7)$$

С этой же точностью корни уравнения (3.6) есть

$$k^2 = -\alpha_3\,, \quad (k+2\varkappa)^2 = -\alpha_3\,. \qquad (3.8)$$

Если ввести "показатель преломления" волны $n$ : $k_1^{\,2} = k_{10}^{\,2}(1-n^2)$, то имеем из (3.8) для фотона, падающего навстречу волне

$$n^2 = 1 + \frac{22}{45}\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{F}{F_0}\right)^2 \qquad (3.9)$$



где $F$ – напряженность поля волны, $F_0 = \frac{m^2}{e}$ – критическое поле. Таким образом, показатель преломления в этом пределе не зависит ни от энергии фотона, ни от частоты волны. Из формулы (3.9) следует, что при $\lambda \ll 1$ эффекты являются весьма слабыми. Они станут значительно более заметными, когда $\lambda \sim 1$. Именно область в относительной близости от порога двухчастичной реакции наиболее интересна для изучения эффектов интенсивности в поле волны. Такой же вывод следует и из анализа мнимой части амплитуды рассеяния вперед (2.37), см также /4-6/.

Авторы благодарны В.М.Каткову за ценные обсуждения.

Поступила 23 мая 1975 г.

## Литература


1. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко, ЖЭТФ,67,453,1974.
2. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. ЖЭТФ,68,405,1975.
3. В.Н.Байер, В.М.Катков, А.И.Мильштейн, В.М.Страховенко, ЖЭТФ,69,783,1975.
4. А.И.Никишов, В.И.Ритус. ЖЭТФ,46,776,1964.
5. Н.Б.Нарожный, А.И.Никишов, В.И.Ритус. ЖЭТФ,47,930,1964.
6. И.И.Гольдман. ЖЭТФ,46,1412,1964.
7. W.Becker,H.Mitter.Preprint Universität Tübingen.1974
8. J.Schwinger.Phys.Rev.82,664,1951.
9. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1973.
10. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат. М., 1973.



Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ

Подписано к печати 11.8.75г. МН 07417

Усл. печ. 1,0 л., тираж 200 экз. Бесплатно

Заказ № 62

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР, бт