30

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 75 - 59

Г.А.Кузьмин, А.З.Паташинский

ЗАВИСИМОСТЬ КОРРЕЛЯЦИЙ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ ОТ ВРЕМЕНИ

Новосибирск
1975

Зависимость корреляций в турбулентном потоке от времени.

Г.А.Кузьмин, А.З.Паташинский

Аннотация

Изучено влияние крупномасштабного переноса на зависимость мелкомасштабных корреляций от времени. Показано, что с помощью Т-экспоненты квантовой теории поля переносные взаимодействия могут быть исключены из гидродинамических уравнений.

Зависимость корреляций в турбулентном потоке от времени.

Г.А.Кузьмин, А.З.Паташинский

При эйлеровом описании турбулентности пульсации данного масштаба Λ переносятся без существенного искажения всеми движениями, масштабов $\Lambda' \gg \Lambda$. В диаграммной технике (см. например,[I]) наличие этого переноса приводит к появлению расходимости интегралов в области малых волновых чисел и затрудняет исследование свойств подобия пульсаций из инерционного интервала волновых чисел. Как подчеркивалось в работе Кадомцева[2], перенос не является настоящим взаимодействием. Однако в силу кинематических причин эффект переноса определяет зависимость функций корреляции от времени,

Рассмотрим этот эффект на примере статистически однородного скалярного поля $\varphi(\vec{x},t)$. Статистические свойства поля φ° в покоящейся жидкости определяются его средними (моментами)[3]

$$G_n^{\circ} = \langle \varphi^{\circ}(\vec{x}_1,t_1)\ldots\varphi(\vec{x}_n,t_n)\rangle \tag{I}$$

Найдем, как изменятся функции G_n° после дополнительного усреднения по галилеевым переносам со случайной скоростью $\vec{V}$. Наиболее простая связь между функциями G_n до и после усреднения по $\vec{V}$ имеется в представлении Фурье по пространственным аргументам. Поле φ в системе отсчета, движущейся относительно исходной со скоростью $\vec{V}$ связано с φ° выражением:

$$\varphi(\vec{x},t) = \varphi^{\circ}(\vec{x}-\vec{V}t,t) = exp\left(-tV_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tag{2}$$

Аналог преобразования (2) для компонент Фурье $\varphi_{\vec{k}}(t)$ есть:

$$\varphi_{\vec{k}}(t) = exp(-i\vec{k}\vec{V}t)\,\varphi^{\circ}_{\vec{k}}(t) \tag{3}$$

Отсюда получаем, что связь между функциями G_n в различных галилеевых системах отсчета дается формулой:

$$\tilde{G}_n(\vec{k}_1,t_1,\ldots,\vec{k}_n,t_n) = exp(-i\vec{V}\vec{\mathcal{L}})\,G_n^{\circ}(\vec{k}_1,t_1,\ldots,\vec{k}_n,t_n) \tag{4}$$

где $\vec{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{n}\vec{k}_i t_i$. Отметим, что в силу пространственной однородности $\sum_{i=1}^{n}\vec{k}_i = 0$. Поэтому $\vec{\mathcal{L}} = \sum_{i=1}^{n-1}\vec{k}_i\tau_i$, где $\tau_i = t_i - t_n$ Усредняя (4) по распределению вероятности $\vec{V}$, получаем:

$$G_n \equiv \langle \tilde{G}_n \rangle = Z(\vec{\mathcal{L}})\,G_n^{\circ} \tag{5}$$

где $Z(\vec{\alpha}) = \langle \exp(-i\vec{V}\vec{\alpha}) \rangle$ – характеристическая функция случайного вектора $\vec{V}$ [3]. В случае одновременных средних $\vec{\alpha} = 0$, $Z(0) = 1$ и $G_n = G_n^{\circ}$. Формула (5) для гауссового $\vec{V}$, $n=2,3$ была получена в [5]

Рассмотрим более общий случай, когда скорость V зависит от времени и от пространственных координат. Пусть поле φ° в покоящейся жидкости удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial \varphi^{\circ}}{\partial t} = P(\varphi^{\circ}) \tag{6}$$

где P – некоторый нелинейный оператор, содержащий степени φ° и пространственные производные. Оператор P может включать заданную случайную функцию $f(\vec{x},t)$ (стороннюю силу). Уравнение для поля φ в среде, движение которой описывается случайным полем скорости $\vec{V}(\vec{x},t)$ отличается от (6) заменой $\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\nabla$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\nabla\right)\varphi = P(\varphi) \tag{7}$$

Предполагается, что поля $\vec{V}$, φ° статистически независимы, а пространственные и временные масштабы изменения поля V много больше характерных масштабов поля φ°. Уравнение (7) с нулевой правой частью аналогично уравнению для $\mathcal{U}$ -матрицы квантовой теории поля и имеет решение в виде Т-экспоненты[4]

$$\varphi(\vec{x},t) = L\varphi(\vec{x},t_0) \equiv T\exp\left[-\int_{t_0}^{t} d\tau\, V_j(\vec{x},\tau)\frac{\partial}{\partial x_j}\right]\varphi(\vec{x},t_0) =$$

$$= \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t} dt_1 \vec{V}(\vec{x},t_1)\nabla \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V(\vec{x},t_2)\nabla \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V(\vec{x},t_n)\nabla\right\}\varphi(\vec{x},t_0) \tag{8}$$

Произведем преобразование функции φ в (7) с $P(\varphi) \neq 0$ по формуле:

$$\varphi(\vec{x},t) = L\tilde{\varphi}(\vec{x},t) = T\exp\left[-\int_{t_0}^{t} d\tau\, \vec{V}(\vec{x},\tau)\nabla\right]\tilde{\varphi}(\vec{x},t) \tag{9}$$

Уравнение (7) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = L^{-1}P(L\tilde{\varphi}) \tag{10}$$

Правая часть (10) с точностью до величин, малых по параметру $|\mathrm{grad}\,\vec{V}| / |\mathrm{grad}\,\varphi|$ совпадает с $P(\tilde{\varphi})$. Поэтому поля $\tilde{\varphi}$, φ° удовлетворяют одному и тому же уравнению и обладают одинаковыми корреляционными функциями. Если известны корреляционные функции поля φ°, то корреляционные функции поля φ могут быть вычислены с помощью формулы (9) усреднением по распределению вероятностей поля V. При вычислении момента полей в близких точках зависимостью поля $\vec{V}$ от координат и времени можно пренебречь. Формула (9) совпадает в этом случае с (2). Связь моментов G_n, G_n° имеет при этом вид (5).

Формулы аналогичные (5) могут быть получены и для моментов мелкомасштабной компоненты скорости в турбулентном потоке. В этом случае моменты G_n, G_n° будут тензорами ранга n. Подчеркнем, что множитель $Z(\vec{\alpha})$ имеет кинематическое происхождение и не содержит информации о реальных взаимодействиях в турбулентном потоке. Поэтому из исходных уравнений желательно исключить члены, отвечающие за чистый перенос одних вихрей другими. Обобщим с этой целью преобразование (9) на случай компонент Фурье эйлерова поля скорости. Крупномасштабную по отношению к $\vec{u}_{\vec{k}}(t)$ компоненту скорости определим из равенства:

$$V_k(\vec{x},t) = \exp\left(-\frac{\lambda^2 \vec{x}^2}{k^2}\right)\vec{u}_{\vec{x}}(t)$$

где $\lambda \gg 1$. Рассмотрим преобразование:

$$u_{i\vec{k}}(t) = \Delta_{ic}(\vec{k})\, T\exp\left[-i\vec{k}\int_{t_0}^{t} d\tau \int d^3x\, \vec{V}_k(\vec{x},\tau)\exp\left(-\vec{x}\frac{\partial}{\partial \vec{k}}\right)\right]\tilde{u}_{c\vec{k}}(t) \tag{11}$$

Преобразование (11) – аналог (9) в представлении Фурье. Множитель $\Delta_{ic}(\vec{k}) = \delta_{ic} - \frac{k_i k_c}{k^2}$ обеспечивает выполнение уравнения неразрывности, которое в представлении Фурье имеет вид:

$$\vec{k}\, u_{\vec{k}}(t) = 0$$

Подставив (11) в производную по времени уравнения Навье-Стокса

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right)u_{i,\vec{k}}(t) = -ik_j\, \Delta_{ic}(\vec{k})\int d^3q\, u_{j,\vec{q}}\, u_{c,\vec{k}-\vec{q}}(t) \tag{12}$$

получаем:

$$\Delta_{ic}(\vec{k})\, T\exp\left[-i\vec{k}\int_{t_0}^{t} d\tau \int d^3x\, \vec{V}_k(\vec{x},\tau)\exp\left(-\vec{x}\frac{\partial}{\partial \vec{k}}\right)\right]\frac{\partial \tilde{u}_{c\vec{k}}(t)}{\partial t} + \nu k^2 \tilde{u}_{i\vec{k}}(t) = \tag{13}$$

$$= -ik_j\, \Delta_{ic}(\vec{k})\int d^3q\left[1 - \exp\left(-\frac{\lambda^2 q^2}{k^2}\right)\right]u_{j,\vec{q}}(t)\, u_{c,\vec{k}-\vec{q}}(t)$$

Выведем приближенное уравнение, которому удовлетворяет $\tilde{u}_{i,\vec{\varkappa}}(t)$. Отметим, что хотя крупномасштабная часть скорости $\vec{V}$ велика, ее градиент мал по параметру λ^{-1}. Поэтому в нулевом приближении по λ^{-1} оператор $\exp(-\vec{x}\frac{\partial}{\partial\vec{\varkappa}})$ в (II) можно заменить на единицу. Преобразование (II) приобретает в этом случае вид:

$$u_{i,\vec{\varkappa}}(t) = \exp\left[-i\vec{\varkappa}\int_{t_0}^{t} d\tau \int d^3x\, \vec{V}_{\varkappa}(\vec{x},\tau)\right]\tilde{u}_{i,\vec{\varkappa}}(t) \qquad (14)$$

Подставляя (I4) в (I3) имеем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu\kappa^2\right)\tilde{u}_{i,\vec{\kappa}}(t) = -i\kappa_j\Delta_{il}(\vec{\kappa})\int d^3q\left[1-\exp\left(-\frac{\lambda^2q^2}{\kappa^2}\right)\right]\tilde{u}_{j,\vec{q}}(t)\,\tilde{u}_{l,\vec{\kappa}-\vec{q}}(t)\times$$

$$\times\exp\left\{i\vec{q}\int_{t_0}^{t}d\tau\int d^3x\left[\vec{V}_{\vec{q}}(\vec{x},\tau)-\vec{V}_{\vec{\kappa}-\vec{q}}(\vec{x},\tau)\right]+i\vec{\kappa}\int_{t_0}^{t}d\tau\int d^3x\left[\vec{V}_{\vec{\kappa}-\vec{q}}(\vec{x},\tau)-\vec{V}_{\vec{\kappa}}(\vec{x},\tau)\right]\right\} \qquad (15)$$

Легко показать, что при конечных $|\vec{q}|$, $|\vec{\kappa}-\vec{q}|$ (что обеспечивается быстрой сходимостью интеграла по d^3q в области малых $|\vec{q}|$, $|\vec{\kappa}-\vec{q}|$) показатель экспоненты в (I5) мал по параметру λ^{-1}. Поэтому в нулевом приближении по λ^{-1} для $\tilde{u}$ получаем уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu\kappa^2\right)\tilde{u}_{i,\vec{\kappa}}(t) = -i\kappa_j\Delta_{il}(\vec{\kappa})\int d^3q\left[1-\exp\left(-\frac{\lambda^2q^2}{\kappa^2}\right)\right]\tilde{u}_{j,\vec{q}}(t)\,\tilde{u}_{l,\vec{\kappa}-\vec{q}}(t) \qquad (16)$$

Учет следующих членов разложений по λ^{-1} приводит к появлению в уравнении для $\tilde{u}$ нелинейностей более высокого порядка. Уравнение аналогичное (I6) использовалось Кадомцевым [2] (см. также [5]) для построения улучшенного приближения прямых взаимодействий. Это уравнение можно также использовать для построения полной системы диаграммных уравнений для статистических характеристик поля $\tilde{u}$. В работе I для этой цели вместо (I6) использовалось непосредственно уравнение Навье-Стокса (I2) со случайной внешней силой. Предположение о подобии статистических характеристик поля u не приводило к противоречиям, если затравочная вершина эффективно сокращалась в области, где существенно различны аргументы входящих в нее линий. Затравочная вершина уравнения (I6) быстро убывает вне области, где ее аргументы одного порядка величины. Поэтому для этого поля $\tilde{u}$ можно ожидать отсутствия расходимостей в области малых волно-

вых чисел в диаграммной технике типа рассмотренной в работе [I]. Эта диаграммная техника и ее анализ аналогичны рассмотренным в [I]. Предположение в пространственно-временном подобии представляется естественным для поля $\tilde{u}$. Это определяет одновременные корреляции. Зависимость корреляций и функций отклика скорости u от времени определяется процессом переноса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.А.Кузьмин, А.З.Паташинский. ЖЭТФ 3,1176, 1972.
2. Б.Б.Кадомцев в сб. "Вопросы теории плазмы вып.4". Атомиздат, 1964.
3. Ю.В.Прохоров, Ю.А.Розанов. Теория вероятностей. "Наука", Москва, 1973.
4. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, "Наука", Москва, 1973.
5. R.H. Kraichnan Phys. Fluids 7, 1723, 1964.

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати 23.7.75г. МН 03126
Усл. 0,35 печ.л., тираж 200 экз., бесплатно
Заказ № 59 . ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР