10

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 75 - 20

В.Н.Байер, В.М.Катков, А.И.Мильштейн,
В.М.Страховенко

# К ТЕОРИИ КВАНТОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ПОЛЕ ИНТЕНСИВНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Новосибирск
1975

В.Н.Байер, В.М.Катков, А.И.Мильштейн, В.М.Страховенко

# К ТЕОРИИ КВАНТОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ПОЛЕ ИНТЕНСИВНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

## АННОТАЦИЯ

Операторная диаграммная техника, развитая ранее для рассмотрения явлений в однородном внешнем поле, применена к процессам в поле плоской электромагнитной волны. В основе способа вычислений лежит специфическая техника распутывания операторных выражений. Найден массовый оператор скалярной и спинорной частиц в поле эллиптически поляризованной волны общего вида, задаваемый двухкратным интегралом. Мнимая часть его дает новое представление полной вероятности излучения частицы в поле волны. Для спинорных частиц приведен анализ поляризованных эффектов.

Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk, 630090

ON THE THEORY OF QUANTUM PROCESSES IN THE FIELD OF INTENSE ELECTROMAGNETIC WAVE

V.N.BAIER, V.M.KATKOV, A.I.MILSTEIN, V.M.STRAKHOVENKO

a b s t r a c t

An operator diagrammatic technique which was formulated for consideration of the phenomena in a homogeneous external electromagnetic field is applied to the processes in the intense plane-wave field. The method of calculation is based on specific disentanglement of the operator expressions. The mass operator of scalar and spinor particle in the elliptically polarized plane-wave of general tipe (see Eq.(1.1)) has been obtained. It is represented by two-fold integral (see Eqs.(2.22) or (3.21),(3.18)). The mean value of the mass operator on the mass shell in the monochromatic plane-wave has been also calculated (see Eqs.(2.28),(3.32)). It's imaginary part is a new representation of the total probability of radiation of the particle in the plane-wave field (see for example (2.32),(3.37) for circular polarization of the plane-wave). An analisys of the spin correlations has been carried out for spinor particles.

## I. Введение

Быстрый прогресс лазерной техники, позволяющей получать волны с весьма высокой напряженностью электромагнитного поля (до $10^9$ в/см) стимулировал широкие исследования квантовых процессов в поле интенсивной электромагнитной волны. В последние годы появилось большое число работ, посвященных эффектам, возникающим при движении электрона и фотона в поле интенсивной плоской волны. Особый интерес представляет вероятность излучения фотона электроном в поле волны (этот вопрос рассмотрен в работах: /1/ - для линейно поляризованной волны, /2,3/ -для циркулярно поляризованной волны, /4/ - для волны произвольной поляризации, см.также /5/); а также вероятность образования электрон-позитронной пары фотоном в поле волны /1,2/. В этих работах использованы решения уравнения Дирака в поле плоской волны, найденные Волковым (см., напр., /5/). Тем самым взаимодействие заряженных частиц с полем электромагнитной волны учитывается точно. Взаимодействие же с полем излучения рассматривается в низшем порядке теории возмущений. Найденные вероятности представляют мнимую часть массового и поляризованного оператора. Значительный интерес представляют также вещественные части этих операторов (поправки к массе и т.д.). К сожалению получение этих величин в рамках указанной техники является затруднительным и до настоящего времени не проведено.

В последнее время тремя из авторов был развит операторный подход к задачам электромагнитных взаимодействий во внешнем электромагнитном поле /6/. В рамках этого подхода был найден массовый оператор в постоянном в пространстве и времени электромагнитном поле. В настоящей работе этот операторный подход использован для получения массового оператора в поле плоской волны общего вида для частиц со спином[x)] 0 и 1/2. Несмотря на общность подхода и исходных выражений, рациональный способ вычислений для случая движения в поле плоской волны заметно отличается от расчета для случая движения в однородном поле. В основе этого способа лежит специфическая техника распутывания

x) Рассмотрение частиц со спином 0 представляет как самостоятельный физический интерес, так и является весьма ценным методически.

операторных выражений. С ее помощью удается получить выражение для массового оператора частицы, находящейся в эллиптически поляризованной волне общего вида. Лишь при вычислении среднего на массовой оболочке на последнем этапе вычисления необходимо задать явную форму волны. Указанное среднее дается двухкратным интегралом, причем в частном случае циркулярно поляризованной волны подынтегральное выражение содержит только элементарные функции. Мнимая часть этого среднего есть новое представление для полной вероятности излучения частицы в поле, особенно пригодное для проведения суммирования по числу "фотонов", поглощенных из поля волны. Реальная часть массового оператора вычислена впервые. Также впервые учтены спиновые эффекты.

Плоскую волну общего вида мы будем описывать потенциалом:

$$A_\mu(\varphi) = a_{1\mu}\psi_1(\varphi) + a_{2\mu}\psi_2(\varphi) \qquad (\text{I.1})$$

где $\varphi \equiv \varkappa x = \varkappa^0 x^0 - \vec{\varkappa}\vec{x}$, причем

$$\varkappa^2 = 0, \quad \varkappa a_1 = \varkappa a_2 = a_1 a_2 = 0 \qquad (\text{I.2})$$

В случае линейной поляризации $a_{2\mu}$ =0. Напряженность поля волны есть:

$$F_{\mu\nu} = (a_{1\nu}\varkappa_\mu - a_{1\mu}\varkappa_\nu)\psi_1'(\varphi) + (a_{2\nu}\varkappa_\mu - a_{2\mu}\varkappa_\nu)\psi_2'(\varphi) \qquad (\text{I.3})$$

где $\psi'_{1,2} \equiv d\psi_{1,2}/d\varphi$. Иногда бывает удобно ввести "специальную" систему, в которой $A_0$ =0; вектор $\vec{\varkappa}$ направлен по оси 3; т.е. $\varkappa^0 = \varkappa^3$, а вектора напряженности поля волны лежат в плоскости (I,2).

Раздел II посвящен случаю скалярных частиц. Найден массовый оператор в поле волны (I.I), проанализирована его мнимая часть, прослежен переход к случаю постоянного скрещенного поля. В разделе III найден массовый оператор спинорной частицы и проанализированы его свойства, включая спиновые корреляции. Приложения посвящены выяснению технических деталей предлагаемого подхода.



## II. Массовый оператор скалярной частицы

Массовый оператор частицы со спином 0 может быть представлен в виде (см./6/, формула (I.I0)):

$$M^{(0)} = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,(2\mathcal{P}-k)^\mu \frac{1}{(\mathcal{P}-k)^2 - m^2 + i\varepsilon}(2\mathcal{P}-k)_\mu \frac{1}{k^2+i\varepsilon} \qquad (2.\text{I})$$

где $\mathcal{P}_\mu \equiv \mathcal{P}_\mu(\varphi) = i\partial_\mu - eA_\mu(\varphi)$. Форма записи (2.I) такая же, как для массового оператора скалярной частицы в отсутствие поля, однако существенно новым элементом является наличие в интеграле (2.I) некоммутирующих операторов. Поэтому перед вычислением интеграла по $k$ необходимо провести надлежащее преобразование подынтегрального выражения. Удобно использовать экспоненциальное представление операторов. Для этого проведем параметризацию типа:

$$\frac{1}{k^2+i\varepsilon}\,\frac{1}{(\mathcal{P}-k)^2-m^2+i\varepsilon} = -\int_0^\infty ds\int_0^s du\, e^{-ium^2} e^{iu(\mathcal{P}^2-2\mathcal{P}k)+isk^2} \qquad (2.2)$$

С учетом (2.2) массовый оператор (2.I) можно переписать в форме

$$M^{(0)} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\int_0^\infty ds\,\Big\{\int_0^s du\Big[4\mathcal{P}^\mu e^{iu(\mathcal{P}-k)^2}\mathcal{P}_\mu - \{(\mathcal{P}^2-m^2), e^{iu(\mathcal{P}-k)^2}\}\Big]e^{i(s-u)k^2}e^{-ium^2} - i\left(e^{is((\mathcal{P}-k)^2-m^2)} - 2e^{isk^2}\right)\Big\} \qquad (2.3)$$

где $\{\,,\}$ обозначает антикоммутатор. В формуле (2.3) проведено интегрирование по частям члена, содержавшего $\mathcal{P}k$ в предэкспоненциальном выражении, что позволило привести $M^{(0)}$ к виду, где от $k$ зависит только показатель экспоненты. Таким образом, взятие интеграла по $k$ сводится к вычислению

$$Q^{(0)} = \int d^4k\, e^{iu(\mathcal{P}-k)^2}e^{i(s-u)k^2} = \int d^4k\, e^{-ikX}e^{iu\mathcal{P}^2}e^{ikX}e^{i(s-u)k^2} \qquad (2.4)$$

где мы использовали оператор сдвига в импульсном пространстве: для некоторой функции $f(\mathcal{P})$ имеет место $e^{-ikX}f(\mathcal{P})e^{ikX} = f(\mathcal{P}-k)$, $[\mathcal{P}_\mu, X_\nu] = ig_{\mu\nu}$. Входящее в (2.4) экспоненциальное операторное выражение $\exp[iu\mathcal{P}^2]$ содержит некоммутирующие операторы. Одним из центральных пунктов данного рассмотрения является распутывание этого выражения (см.Приложение А), которое для случая линейно поляризованной волны $A_\mu(\varphi) = a_\mu \psi(\varphi)$ дает (см.(А.I9)):

$$e^{iu\mathcal{P}^2} = \exp\left\{ i \int_0^u [a\mathcal{P} - ea^2\Delta(\tau)]^2 \frac{d\tau}{a^2} \right\} e^{iu\mathcal{P}_\perp^2} \qquad (2.5)$$

где $\Delta(\tau) = \psi(\varphi - 2\varkappa\mathcal{P}\tau) - \psi(\varphi)$, $\mathcal{P}_\perp = \mathcal{P} - \frac{(\mathcal{P}a)a}{a^2}$. В результате распутывания мы получили произведение двух операторов, таких что в показателе каждого из них стоят коммутирующие операторы. После этого можно выполнить интегрирование по $k$. Подставляя (2.5) в (2.4), найдем после простых преобразований:

$$Q^{(0)} = \int d^4k \exp\left\{ i \int_0^u (a\mathcal{P}(\varphi,k))^2 \frac{d\tau}{a^2} - 2iak \int_0^u (a\mathcal{P}(\varphi,k)) \frac{d\tau}{a^2} \right\} e^{iu(\mathcal{P}_\perp^2 - 2\mathcal{P}_\perp k_\perp)} e^{isk^2} \qquad (2.6)$$

где $k_\perp = k - (ka)a/a^2$.

$$\mathcal{P}(\varphi,k) = \mathcal{P} - ea\Delta(\tau,k), \quad \Delta(\tau,k) = \psi(\varphi - 2\varkappa(\mathcal{P}-k)\tau) - \psi(\varphi) \qquad (2.7)$$

Разложим все входящие в (2.6) вектора по ортам

$$\vec{e}_1 = \frac{[\vec{\varkappa}\vec{a}]}{\varkappa^0\sqrt{-a^2}}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa^0}, \quad \vec{e}_2 = [\vec{e}_3\vec{e}_1] \qquad (2.8)$$

которые мы выберем в качестве осей декартовой системы координат. В этой системе введем переменные

$$y = k^0 + k^3, \quad z = k^0 - k^3, \quad v = k^2, \quad w = k^1 \qquad (2.9)$$

тогда

$$k^2 = yz - v^2 - w^2, \quad ak = a^0 z + v\sqrt{-a^2}, \quad \varkappa k = \varkappa^0 z$$

$$\mathcal{P}_\perp k_\perp = b_1 z + b_2 y - \mathcal{P}_\perp^2 v - \mathcal{P}_\perp^1 w \qquad (2.10)$$



где $b_1 = \frac{\mathcal{P}_\perp^0 + \mathcal{P}_\perp^3}{2}$, $b_2 = \frac{\mathcal{P}_\perp^0 - \mathcal{P}_\perp^3}{2}$. Переходя в интеграле (2.6) к переменным (2.9) и подставляя в него (2.I0), находим, что интеграл по $y$ имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{iy(sz - 2b_2 u)} = 2\pi\delta(sz - 2b_2 u) \qquad (2.11)$$

так что интегрирование по $z$ свелось к интегрированию $\delta$-функции, т.е. к замене во всем выражении $z \to \frac{2b_2 u}{s} = \frac{u(\varkappa\mathcal{P})}{s\varkappa_0}$ (величина $\mathcal{P}(\varphi;k)$ зависит только от $z$). Оставшиеся интегралы по $v$ и $w$ вычисляются непосредственно (они сводятся к интегралам Френеля). В результате получаем после некоторых преобразований:

$$Q_e^{(0)} = -\frac{i\pi^2}{s^2} \exp\left\{ i\eta \int_0^1 [a\mathcal{P} - ea^2\Delta(\eta y)]^2 \frac{dy}{a^2} \right\} e^{i\beta} e^{i\eta\mathcal{P}_\perp^2} \qquad (2.12)$$

где сделана замена $u \to us$; $\eta = u(1-u)s$

$$\Delta(\eta y) = \psi(\varphi - 2\varkappa\mathcal{P}\eta y) - \psi(\varphi) \qquad (2.13)$$

$$\beta = -\xi^2 s m^2 u^2 \left[ \int_0^1 \Delta^2(\eta y)\,dy - \left( \int_0^1 \Delta(\eta y)\,dy \right)^2 \right]$$

здесь

$$\xi^2 = -\frac{e^2 a^2}{m^2} \qquad (2.14)$$

параметр, характеризующий интенсивность плоской волны x) (см., например, /5/). Используя (2.5), можно переписать (2.I2) в форме

$$Q_e^{(0)} = -\frac{i\pi^2}{s^2} e^{i\beta} e^{i\eta\mathcal{P}^2} \qquad (2.15)$$

Для завершения вычислений необходимо преобразовать комбинацию, возникающую в первом члене (2.3) после выполнения интегрирования

$$\mathcal{P}^\mu e^{i\beta} e^{i\eta\mathcal{P}^2} \mathcal{P}_\mu \qquad (2.16)$$

---

x) Параметр $\xi$ является чисто классическим, работа поля на длине волны $\lambda = 1/\varkappa^0$ есть $\xi m$. Если ввести "объем взаимодействия" с поперечным размером $1/m$ и продольным размером $\lambda$, то $\xi^2 =$ (число фотонов в объеме взаимодействия) $\times\,\alpha$ $(\alpha = e^2/4\pi)$.

Соответствующее рассмотрение проведено в Приложении А. Для линейно-поляризованной волны $A_\mu = a_\mu \psi(\varphi)$ имеем (см. (А.28), (А.35)):

$$\mathcal{P}^\mu e^{i\beta} e^{i\zeta\mathcal{P}^2} \mathcal{P}_\mu = \\ = \left(\mathcal{P}^2 + \frac{\xi^2 m^2 \Delta^2(\zeta)}{2} + \varkappa\mathcal{P}\frac{d\beta}{d\varphi}\right) e^{i\beta} e^{i\zeta\mathcal{P}^2} \tag{2.17}$$

где $\Delta(\zeta)$ дается формулой (2.I3).

Интеграл по $k$ от последнего не зависящего от $u$ члена в правой части (2.3) берется непосредственно. Можно также воспользоваться формулой (2.I2), положив в ней $u = 1$ ($u = s$ в формуле (2.4)). В итоге получим

$$\int d^4k\, e^{is(\mathcal{P}-k)^2} = \int d^4k\, e^{isk^2} = -\frac{i\pi^2}{s^2} \tag{2.18}$$

Подставляя (2.I2), (2.I7), (2.I8) в (2.3), имеем:

$$M^{(0)} = \frac{\alpha}{2\pi} m^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left\{ \int_0^1 du \left[1 + \frac{\mathcal{P}^2}{m^2} + \xi^2\Delta^2(\zeta) + \frac{\varkappa\mathcal{P}}{m^2}\frac{d\beta}{d\varphi}\right] \times \right. \\ \left. \times e^{-ism^2u} e^{i\beta} e^{i\zeta\mathcal{P}^2} + \frac{i}{sm^2}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-ism^2}\right)\right\} \tag{2.19}$$

Найденный массовый оператор расходится таким же образом, как массовый оператор скалярной частицы в отсутствии внешнего поля. Поэтому перенормировка его является стандартной:

$$M_R^{(0)} = M^{(0)} - M^{(0)}(\mathcal{P}^2 = m^2, A_\mu = 0) - (\mathcal{P}^2 - m^2)\frac{dM^{(0)}}{d\mathcal{P}^2}(\mathcal{P}^2 = m^2, A_\mu = 0) \tag{2.20}$$

В результате находим перенормированный массовый оператор скалярной частицы в поле линейно поляризованной плоской волны:

$$M_R^{(0)} = \frac{\alpha}{2\pi} m^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_0^1 du \left\{\left[1 + \frac{\mathcal{P}^2}{m^2} + \xi^2\Delta^2(\zeta) + \frac{\varkappa\mathcal{P}}{m^2}\frac{d\beta}{d\varphi}\right] \times \right. \\ \left. \times e^{-ism^2u} e^{i\beta} e^{i\zeta\mathcal{P}^2} - e^{-ism^2u^2}\left[2 + \left(\frac{\mathcal{P}^2}{m^2} - 1\right)\left(1 + 2isu(1-u)\right)\right]\right\} \tag{2.21}$$

здесь $\beta$, $\Delta(\zeta)$ даются формулой (2.I3). Заметим, что кроме рассмотренной диаграммы имеется еще т.н. контактная диаграмма собственной энергии, на которой фотон излучается и поглощается в одной точке. Вклад этой диаграммы выпадает при регуляризации.



Для физических приложений значительный интерес представляет среднее значение $M_R^{(0)}$ на массовой оболочке $\mathcal{P}^2\Phi = m^2\Phi$. Поскольку $M_R^{(0)}$ зависит только от $\mathcal{P}^2$, $\varkappa\mathcal{P}$, то из (2.2I) непосредственно следует (ср.формулу (I.8) работы /6/):

$$\langle M_R^{(0)} \rangle \equiv \int d^4x\, \Phi^+(x) M_R^{(0)} \Phi(x) = \frac{\alpha}{2\pi} m^2 \frac{1}{V} \int d^4x \int_0^\infty \frac{ds}{s} \times \\ \times \int_0^1 du\, e^{-ism^2u^2} \left\{\left(1 + \frac{\xi^2}{2}\Delta^2(\zeta) + \frac{\lambda}{4}\frac{d\beta}{d\varphi}\right) e^{i\beta} - 1\right\} \tag{2.22}$$

где $\Phi$ – решение уравнения Клейна-Гордона в поле волны, $V$ -нормировочный 4-обьем (использовано только свойство $\mathcal{P}^2\Phi = m^2\Phi$, $(2\varkappa\mathcal{P}/m^2)\Phi = \lambda\Phi$).

Выше был найден массовый оператор в поле линейно поляризованной волны. В общем случае эллиптически поляризованной волны в интеграл (2.4) следует подставить распутанное выражение (А.20). Дальнейшее вычисление аналогично проведенному выше, причем в результат члены, содержащие амплитуды волн $a_1$ и $a_2$, входят аддитивно. В итоге оказывается, что в (2.I5) следует сделать замену:

$$\beta \to \beta_1 + \beta_2, \\ \beta_k = -\xi_k^2 s m^2 u^2 \left[\int_0^1 \Delta_k^2(\zeta y)\, dy - \left(\int_0^1 \Delta_k(\zeta y)\right)^2\right], \quad k = 1, 2 \tag{2.23}$$

где

$$\Delta_k = \psi_k(\varphi - 2\varkappa\mathcal{P}\zeta y) - \psi_k(\varphi), \quad \xi_k = -\frac{e^2 a_k^2}{m^2} \quad (k = 1, 2) \tag{2.24}$$

а в (2.I7) кроме того сделать замены

$$\xi^2\Delta^2(\zeta) \to \xi_1^2\Delta_1^2(\zeta) + \xi_2^2\Delta_2^2(\zeta), \quad \frac{d\beta}{d\varphi} \to \frac{d(\beta_1 + \beta_2)}{d\varphi} \tag{2.25}$$

Это можно понять еще так: в ответ (2.2I), (2.22) входит $[A_\mu(\tilde{\varphi}) - A_\mu(\varphi)]^2$. В случае линейной поляризации мы полагали $A_\mu = a_\mu\psi(\varphi)$, в общем случае мы должны положить $A_\mu = a_{1\mu}\psi_1(\varphi) + a_{2\mu}\psi_2(\varphi)$, что и приводит к заменам (2.23), (2.25). В итоге явный вид массового оператора скалярной частицы в поле эллиптически поляризованной волны следует прямо из (2.2I); (2.22), где необходимо провести замены (2.23); (2.25).

Для выполнения интегрирования по $\chi$ примем во внимание, что подынтегральная функция зависит только от переменной $\varphi$ (в специальной системе $\varphi = \varkappa^0(x^0 - x^3)$ ). Для монохроматической плоской волны

$$\psi_1(\varphi) = \cos\varphi \;, \quad \psi_2(\varphi) = \sin\varphi \tag{2.26}$$

имеем периодическую функцию $\varphi$ , так что можно ограничиться интегрированием по одному периоду[x)]. С учетом этого имеем:

$$\frac{1}{V}\int d^4x\left[\;\right] = \frac{1}{2\varkappa^0 L}\int\limits_{-\varkappa^0 L}^{\varkappa^0 L} d\varphi\left[\;\right] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi\left[\;\right] \tag{2.27}$$

Важным достоинством данного подхода является возможность получения результата для общего случая плоской волны произвольной конфигурации (см.(2.2I), (2.22)) и только на последнем этапе расчета нужно задать явную форму волны (см.(2.26)). После несложных преобразований нетрудно убедиться, что члены, зависящие от $\varphi$ , встречаются только в комбинации $(\xi_1^2 - \xi_2^2)\cos\left[2\left(\varphi - \frac{\varkappa p}{m^2}\right)\right]$. После выделения этой комбинации интегрирование по $\varphi$ выполняется без труда. Для монохроматической плоской волны с эллиптической поляризацией имеем для массового оператора скалярной частицы:

$$\langle M_R^{(0)}\rangle_{el} = \frac{\alpha}{\pi} m^2 \int\limits_0^\infty \frac{dt}{t}\int\limits_0^\infty \frac{dv}{(1+v)^2}\Big\{ e^{-iz_1}\big[\left[1 + (\xi_1^2+\xi_2^2)\times \right.$$
$$\left. \times \sin^2 t\right] J_0(z_0) - i(\xi_1^2 - \xi_2^2)\sin^2 t\, J_1(z_0)\big] - e^{-2itv/\lambda}\Big\} \tag{2.28}$$

где $J_0(z_0)$ , $J_1(z_0)$ – функции Бесселя, $\lambda = \frac{2\varkappa p}{m^2}$ ,

$$z_0 = \frac{1}{\lambda} tv(\xi_1^2 - \xi_2^2)\left[\frac{\sin^2 t}{t^2} - \frac{\sin 2t}{2t}\right],\; z_1 = \frac{2tv}{\lambda}\left[1 + \frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{2}\left(1 - \frac{\sin^2 t}{t^2}\right)\right] \tag{2.29}$$

в формуле (2.28) мы перешли к новым переменным $v = \frac{u}{1-u}$ , $t = v\lambda m^2 s / 2(1+v)^2$. Массовый оператор (2.28) зависит от инвариантных характеристик интенсивности волны $\xi_1^2$ ; $\xi_2^2$ и от

---

x) Очевидно, что члены, в которых зависимость от $\varphi$ имеет форму $e^{i\beta}\frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{1}{i}\frac{d}{d\varphi}e^{i\beta}$ , при этом обращаются в нуль.



инвариантного интеграла движения частицы в поле волны $\lambda = 2\varkappa p/m^2$. Если положить в (2.28) $\xi_2^2 = 0$ , то получим массовый оператор для случая линейной поляризации. В частном случае циркулярно поляризованной волны $\xi_1^2 = \xi_2^2 = 0$ выражение для массового оператора сущ ственно упрощается:

$$\langle M_R^{(c)}\rangle_{cr} = \frac{\alpha}{\pi} m^2 \int\limits_0^\infty \frac{dt}{t}\int\limits_0^\infty \frac{dv}{(1+v)^2}\Big\{ e^{-iz_1^{cr}}(1 + 2\xi^2 \sin^2 t) - e^{-2itv/\lambda}\Big\} \tag{2.30}$$

где $z_1^{cr} = \frac{2tv}{\lambda}\left[1 + \xi^2\left(1 - \frac{\sin^2 t}{t^2}\right)\right]$.

Мнимая часть $\langle M_R^{(c)}\rangle$ известным образом связана с полной вероятностью $W^{(0)}$ излучения скалярной частицы в поле волны (ср./6/, формула (2.43)):

$$W^{(c)} = -\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{Im}\langle M_R^{(0)}\rangle \tag{2.3I}$$

где $\varepsilon$ – нулевая компонента среднего кинетического импульса (квазиимпульса) частицы в поле волны. Подставляя в (2.3I) выражения (2.28), (2.30), получаем явный вид полной вероятности излучения. Для циркулярно поляризованной волны она представляется двухкратным интегралом от выражения, содержащего только элементарные функции:

$$W_{cr}^{(c)} = \frac{\alpha}{\pi}\frac{m^2}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty \frac{dt}{t}\int\limits_0^\infty \frac{dv}{(1+v)^2}\Big\{(1 + 2\xi^2 \sin^2 t)\sin z_1^{cr} - \sin\left(\frac{2tv}{\lambda}\right)\Big\} \tag{2.32}$$

Выражение (2.3I), (2.28) и его частный случай (2.32) является новым представлением для полной вероятности излучения удобным, в частности, для анализа ситуации, когда $\xi^2 \sim 1$ . Выполнив ряд преобразований (см.Приложение Б), можно перейти от формул (2.30), (2.3I) к полной вероятности в форме, аналогичной известному представлению для спинорных частиц

$$W_{cr}^{(c)} = \frac{\alpha m^2}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{v_n}\frac{dv}{(1+v)^2}\Big\{-J_n^2(z) + \xi^2\left[\frac{1}{2}\left(J_{n+1}^2(z) + J_{n-1}^2(z)\right) - J_n^2(z)\right]\Big\} \tag{2.33}$$

где обозначения $z$ , $v_n$ введены в формуле (Б.4).

В случае малых интенсивностей $\xi_{1,2}^2 \ll 1$ , когда применима теория возмущений, можно разложить $W^{(c)}$ по степеням $\xi_{1,2}^2$ . Первый член разложения $(\sim \xi_{1,2}^2)$ после деления на поток $\varkappa p/\varepsilon\omega$ , где $\omega \equiv \varkappa^c$ , и учета того, что $\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{2} = \frac{4\pi\alpha}{m^2\omega}$

(см.,напр., /5/) дает полное сечение комптоновского рассеяния на скалярной частице:

$$\sigma^{(0)} = \frac{4\pi\alpha^2}{m^2\lambda}\left\{\frac{(2+\lambda)^2}{\lambda(1+\lambda)} - \left(\frac{2}{\lambda}+\frac{4}{\lambda^2}\right)\ln(1+\lambda)\right\} \tag{2.34}$$

где $\lambda = 2\varkappa p/m^2$. Этот результат очевидно справедлив для любой поляризации волны.

Как известно, см.,напр., /5/, предел $\xi \gg 1$ соответствует переходу к процессам, происходящим в постоянном и однородном поле $\vec{E}\perp\vec{H}$, $|\vec{E}|=|\vec{H}|$ (такое поле обычно называют скрещенным), или, что то же самое, переходу к квазиклассическому приближению для частицы во внешнем поле. Этот предел соответствует выбору потенциала $A_\mu = a_\mu\varphi$ (в специальной системе вектора $\vec{E}$, $\vec{H}$ лежат в плоскости (I.2). Тогда массовый оператор получается непосредственно из (2.22), куда необходимо подставить величины $\beta$, $\Delta(\eta)$, следующие после элементарных вычислений из (2.I3):

$$\beta \to \beta_c = -\frac{1}{3}\chi^2 s^3 u^4 (1-u)^2, \qquad \xi^2\Delta^2(\eta) \to \xi^2\Delta_c(1) = 4\chi^2 s^2 u^2 (1-u)^2 \tag{2.35}$$

где

$$\chi^2 = \frac{e^2}{m^6}\langle pF^2p\rangle = \xi^2\frac{(\varkappa p)^2}{m^4} \tag{2.36}$$

В итоге найдем:

$$\langle M_R^{(0)}\rangle_c = \frac{\alpha m^2}{\pi}\int_0^\infty\frac{dt}{t}\int_0^1 du\left[(1+2t^2(1-u)^2)\exp\left\{-\frac{iu}{\chi}\left[t+\frac{t^3}{3}(1-u)^2\right]\right\} - e^{-\frac{iut}{\chi}}\right] \tag{2.37}$$

где введена переменная $t = su\chi$. Если воспользоваться известными представлениями для функций Бесселя мнимого аргумента $K_\nu(x)$ (см./7/, стр.4I2,984), ввести функцию $L_\nu(x)$ (см./9/, стр.I8I)

$$L_{2/3}(x) = \int_0^\infty dz\, z\cos\left[\frac{3x}{2}\left(z+\frac{z^3}{3}\right)\right] \tag{2.38}$$

и провести ряд преобразований с использованием рекуррентных соотношений между этими функциями, то можно получить следующее выражение для массового оператора скалярной частицы в скрещенном поле:



$$\langle M_R^{(0)}\rangle_c = \frac{\alpha m^2}{3\pi}\int_0^\infty\frac{dv}{(1+v)^2}(5+2v)\left[L_{2/3}\left(\frac{2v}{3\chi}\right) - \frac{i}{\sqrt{3}}K_{2/3}\left(\frac{2v}{3\chi}\right)\right] \tag{2.39}$$

где $v = \frac{u}{1-u}$, совпадающее с полученным ранее в квазиклассическом приближении (см./9/, стр.I88).

## Ш. Массовый оператор спинорной частицы

Для частицы со спином I/2 массовый оператор во внешнем поле может быть представлен в виде (см./6/, формула (3.I)):

$$M^{(1/2)} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+i\varepsilon}\gamma^\mu\frac{\hat{P}-\hat{k}+m}{(\hat{P}-\hat{k})^2-m^2}\gamma_\mu \tag{3.I}$$

Проведя параметризацию (2.2), перепишем его в виде:

$$M^{(1/2)} = \frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^\infty ds\, s\int_0^1 du\,\tilde{M}^{(1/2)} \tag{3.2}$$

где

$$\tilde{M}^{(1/2)} = \int d^4k\,\gamma^\mu(\hat{P}-\hat{k}+m)e^{isu[(\hat{P}-\hat{k})^2-m^2]}\gamma_\mu e^{is(1-u)k^2} \tag{3.3}$$

Как и в случае скалярных частиц воспользуемся процедурой сдвига в импульсном пространстве:

$$e^{i(\hat{P}-\hat{k})^2u} = e^{-ikX}e^{i\hat{P}^2u}e^{ikX} \tag{3.4}$$

Операция распутывания экспоненциального операторного выражения, являющаяся одним из основных пунктов данного подхода, проводится так же, как в случае скалярных частиц с некоторыми усложнениями, обусловленными спиновыми членами (см.Приложение А). В итоге найдем для случая линейно поляризованной волны $A_\mu = a_\mu\psi(\varphi)$

$$e^{iu\hat{P}^2} = e^{e\hat{a}\hat{\varkappa}\Delta(u)/2\varkappa P}e^{iuP^2} = \exp\left(e\hat{a}\hat{\varkappa}\Delta(u)/2\varkappa P\right)\exp\left\{i\int_0^u[aP-ea^2\Delta(\tau)]^2\frac{d\tau}{a^2}\right\}e^{iuP_\perp^2} \tag{3.5}$$

где использованы те же обозначения, что в (2.5).

Интеграл (3.3) разбивается на два, один из которых, не содержащий $k_\mu$ в предэкспоненциальном факторе

$$Q^{(1/2)} = \int d^4k\, e^{ius(\hat{P}-\hat{k})^2}e^{is(1-u)k^2} \tag{3.6}$$

берется так же, как интеграл $Q^{(0)}$ (2.4) в разделе II. При этом в дополнительном по сравнению с $Q^{(0)}$ множителе согласно (2.I0), (2.II) $(\wp - k)\varkappa \to \varkappa\wp(1-u)$, $\Delta(su) \to \Delta(\zeta)$, так что для линейно поляризованной волны имеем

$$
\begin{aligned}
Q_e^{(1/2)} &= \exp\left\{ e\hat{a}\hat{\varkappa}\Delta(\zeta)/2\varkappa\wp(1-u)\right\} Q_e^{(0)} = \\
&= -\frac{i\pi^2}{s^2}\left(1+\frac{e\hat{a}\hat{\varkappa}\Delta(\zeta)}{2\varkappa\wp(1-u)}\right)e^{i\beta}e^{i\zeta\wp^2}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

где $Q_e^{(0)}$ дается формулой (2.I5), использованы обозначения (2.I3), в последнем равенстве учтено, что все степени $\hat{a}\hat{\varkappa}$ выше первой равны нулю. Для вычисления второго интеграла (3.3), содержащего $k_\mu$ в предэкспоненциальном факторе, будем исходить из равенства (ср.(2.II), /6/):

$$
\int d^4k \frac{\partial}{\partial k^\mu}\left(e^{-ikX}e^{ius\hat{\wp}^2}e^{ikX}e^{is(1-u)k^2}\right) = 0 \tag{3.8}
$$

Выполнив в (3.8) дифференцирование, найдем

$$
\int \hat{k}\, e^{ius(\hat{\wp}-\hat{k})^2}e^{is(1-u)k^2}d^4k = \frac{1}{2s(1-u)}\gamma^\mu\left[X_\mu, Q^{(1/2)}\right] \tag{3.9}
$$

где мы учли (3.4), что сводит взятие искомого интеграла к вычислению коммутатора $X_\mu$ с уже найденной величиной $Q^{(1/2)}$ (3.7), представляющей произведение трех операторов

$$
A = \left(1+\frac{e\hat{a}\hat{\varkappa}\Delta(\zeta)}{2\varkappa\wp(1-u)}\right),\quad B = e^{i\beta},\quad C = e^{i\zeta\wp^2} \tag{3.I0}
$$

Тождество

$$
[X_\mu, ABC] = [X_\mu, A]BC + A[X_\mu, B]C + AB[X_\mu, C] \tag{3.II}
$$

сводит задачу к нахождению коммутаторов $X_\mu$ с каждым из операторов (3.I0). Нетрудно убедиться, что коммутатор $\gamma^\mu[X_\mu, A] \backsim \varkappa^2 = 0$. Остальные коммутаторы вычислены в Приложении А (см.(А.3I), (А.35)). Подставляя их в (3.II) и пронося $e^{i\beta}$ направо с учетом (А.35), получим:

$$
\begin{aligned}
\gamma^\mu[X_\mu, Q^{(1/2)}] = \Big\{2\zeta\Big[\hat{\wp} &+ \frac{e(\gamma f\wp)}{\varkappa\wp}\int_0^1\Delta(\zeta y)dy + \frac{\hat{\varkappa}\xi^2m^2}{2\varkappa\wp}\times \\
&\times\int_0^1\Delta^2(\zeta y)dy\Big] + \hat{\varkappa}\left(\frac{\partial\beta}{\partial(\varkappa\wp)} + 2\zeta\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\right)\Big\}Q_e^{(1/2)}
\end{aligned}
\tag{3.I2}
$$



где $(\gamma f\wp) = \gamma^\mu f_{\mu\nu}\wp^\nu$, напомним, что $f_{\mu\nu} = \varkappa_\mu a_\nu - \varkappa_\nu a_\mu$. тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}\psi'(\varphi)$. Подставляя (3.6), (3.7), (3.9), (3.I2) в (3.3), имеем:

$$
\begin{aligned}
\tilde{M}^{(1/2)} = e^{-ism^2u}\gamma^\mu\Big\{m &+ \hat{\wp}(1-u) - u\frac{e(\gamma f\wp)}{\varkappa\wp}\int_0^1\Delta(\zeta y)dy - \\
&- \frac{\hat{\varkappa}\xi^2m^2u}{2\varkappa\wp(1-u)}\left[\int_0^1\Delta^2(\zeta y)dy - 2u\left(\int_0^1\Delta(\zeta y)dy\right)^2\right]\Big\}Q_e^{(1/2)}\gamma_\mu
\end{aligned}
\tag{3.I3}
$$

Проделав в (3.I3) обычные алгебраические операции с $\gamma$ матрицами с учетом того, что

$$
\hat{\wp}\hat{a}\hat{\varkappa} = i\gamma^5(\gamma f^*\wp) + (\gamma f\wp) \tag{3.I4}
$$

где $f^*_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}f^{\gamma\delta}$, и выделив справа оператор $e^{i\zeta\hat{\wp}^2}$, имеем массовый оператор (3.2) в поле линейно поляризованной волны:

$$
\begin{aligned}
M_e^{(1/2)} = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^\infty\frac{ds}{s}\int_0^1 du\, e^{-ism^2u}\Big\{&2(m-\hat{\wp})(1-\hat{a}\hat{\varkappa}H) + \hat{\wp}(1+u) + \\
&+(\gamma f\wp)E - uHi\gamma^5(\gamma f^*\wp) + \hat{\varkappa}\xi^2\mathcal{G}\Big\}e^{i\beta}e^{i\zeta\hat{\wp}^2}
\end{aligned}
\tag{3.I5}
$$

где введены обозначения

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{e\Delta(\zeta)}{2\varkappa\wp},\quad E = \frac{e}{\varkappa\wp}\left[u\int_0^1\Delta(\zeta y)dy - \frac{\Delta(\zeta)}{2}\left(1+\frac{u}{2}\right)\right], \\
\mathcal{G} &= \frac{m^2}{2\varkappa\wp}\left[\Delta^2(\zeta) + \frac{u}{1-u}\left(u\Delta(\zeta)\int_0^1\Delta(\zeta y)dy + \int_0^1\Delta^2(\zeta y)dy - 2u\left(\int_0^1\Delta(\zeta y)dy\right)^2\right)\right]
\end{aligned}
\tag{3.I6}
$$

Полученный результат без труда обобщается на общий случай эллиптически поляризованной волны (см.Приложение А (А.26), (А.2I)). Интеграл $Q^{(1/2)}$ (3.6) берется с использованием (А.26) как и раньше (ср.(3.7)):

$$
\begin{aligned}
Q_{el}^{(1/2)} &= e^{\frac{e\hat{a}_1\hat{\varkappa}\Delta_1(\zeta)}{2\varkappa\wp(1-u)}}e^{\frac{e\hat{a}_2\hat{\varkappa}\Delta_2(\zeta)}{2\varkappa\wp(1-u)}}Q_{el}^{(0)} = \\
&= -\frac{i\pi^2}{s^2}\left(1+\frac{e\hat{a}_1\hat{\varkappa}\Delta_1(\zeta)}{2\varkappa\wp(1-u)} + \frac{e\hat{a}_2\hat{\varkappa}\Delta_2(\zeta)}{2\varkappa\wp(1-u)}\right)e^{i(\beta_1+\beta_2)}e^{i\zeta\wp^2}
\end{aligned}
\tag{3.I7}
$$

где $Q_{el}^{(0)}$ дается формулой (2.I5) с заменой (2.23). Второй интеграл может быть вычислен с помощью формулы (3.9), куда необходимо подставить (3.I7). Процедура вычисления аналогична использованной выше. В итоге найдем массовый оператор в поле эллиптически поляризованной волны:

$$M_{el}^{(1/2)}=\frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^1\frac{ds}{s}\int\limits_0^1 du\, e^{-ism^2u}\Big\{2(m-\hat{\mathcal{P}})(1-\hat{a}_1\hat{\varkappa}H_1-\hat{a}_2\hat{\varkappa}H_2)+\hat{\mathcal{P}}(1+u)$$
$$+(\gamma f_1\mathcal{P})E_1+(\gamma f_2\mathcal{P})E_2-i\gamma^5(\gamma f_1^*\mathcal{P})uH_1-i\gamma^5(\gamma f_2^*\mathcal{P})uH_2-\qquad(3.18)$$
$$-i\gamma^5\Lambda N+\hat{\varkappa}(\xi_1^2\mathcal{G}_1+\xi_2^2\mathcal{G}_2)\Big\}e^{i(\beta_1+\beta_2)}e^{i\zeta\hat{\mathcal{P}}^2}$$

где $E_{1,2}$ , $\mathcal{G}_{1,2}$ , $H_{1,2}$ даются формулами (3.16), куда следует подставить соответственно $\Delta_1$ и $\Delta_2$ ; тензора $f^*_{\kappa\alpha\beta}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}f_\kappa^{\gamma\delta}$;
$\Lambda=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\alpha a_1^\beta a_2^\gamma\varkappa^\delta$;

$$N=\frac{e^2u}{2\varkappa\mathcal{P}}\left(1+\frac{1}{1-u}\right)\left[\Delta_2(\zeta)\int\limits_0^1\Delta_1(\zeta y)dy-\Delta_1(\zeta)\int\limits_0^1\Delta_2(\zeta y)dy\right]\qquad(3.19)$$

Обратим внимание на появление члена нового по сравнению с (3.15) типа, содержащего $\gamma^5\Lambda$ .

Найденные выражения для массового оператора (3.15), (3.18) должны быть стандартным образом перенормированы (ср./6/, формула (3.15)):

$$M_R^{(1/2)}=M^{(1/2)}-M^{(1/2)}(\hat{\mathcal{P}}=m,A_\mu=0)-(\hat{\mathcal{P}}-m)\frac{\partial M}{\partial\hat{\mathcal{P}}}(\hat{\mathcal{P}}=m,A_\mu=0)\qquad(3.20)$$

В результате получаем перенормированный массовый оператор электрона в поле плоской волны:

$$M_R^{(1/2)}=M^{(1/2)}-\frac{\alpha}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{ds}{s}\int\limits_0^1 du\, e^{-ism^2u^2}\Big\{m(1+u)-(\hat{\mathcal{P}}-m)(1-u)\big[1-2ism^2u(1+u)\big]\Big\}\qquad(3.21)$$

куда в качестве $M^{(1/2)}$ следует подставить (3.18) (или (3.15) в случае линейной поляризации волны).

Для физических приложений большой интерес представляет среднее от массового оператора на массовой оболочке. Введем оператор

$$\pi^\mu=\pi_0^\mu+i\varkappa^\mu\frac{e\hat{\varkappa}\hat{A}'}{2(\varkappa i\partial)}\ ,\quad \pi_0^\mu=i\partial^\mu-\varkappa^\mu\left(\frac{e(Ai\partial)}{(\varkappa i\partial)}-\frac{e^2A^2}{2(\varkappa i\partial)}\right)\qquad(3.22)$$

для которого выполняются следующие соотношения

$$[\pi^\mu,\pi^\nu]=0,\quad \pi^2=\hat{\mathcal{P}}^2,\quad [\hat{\mathcal{P}}^2-m^2,\pi^\mu]=0\qquad(3.23)$$

В соответствии с (3.23) выберем состояния, которые удовлетворяют квадрированному уравнению Дирака $(\hat{\mathcal{P}}^2-m^2)\Phi=0$ , а также уравнению



$$\pi^\mu\Phi=p^\mu\Phi\qquad(3.24)$$

где $p^\mu$ - постоянный 4-й вектор $(p^2=m^2)$ , т.е. имеется 3 независимых компоненты вектора ( $p^1$ , $p^2$ , $p^3-p^0$ в специальной системе). Решение уравнения Дирака очевидно можно представить в форме

$$\Psi=(\hat{\mathcal{P}}+m)\Phi\qquad(3.25)$$

Подвергнем $\Psi$ унитарному преобразованию

$$\Psi_u=U\Psi,\quad U=\exp\left\{-\frac{e\hat{\varkappa}\hat{A}}{2\varkappa\mathcal{P}}\right\}\qquad(3.26)$$

которое переводит уравнение Дирака $(\hat{\mathcal{P}}-m)\Psi=0$ в уравнение

$$(\hat{\pi}^0-m)\Psi_u=0\ ,\quad \pi_\mu^0\Psi=p_\mu\Psi_u\qquad(3.27)$$

С учетом (3.23), (3.27) описание спиновых состояний теперь может проводиться как для свободных частиц. Тогда введем 4-вектор спина $s^\mu$ ( $s^2=-1$, $ps=0$ , в операторной форме $p\to\pi^0$ ) и проведем с помощью оператора $\gamma^5\hat{s}$ классификацию спиновых состояний. Проделав над оператором $-\gamma^5\hat{s}$ обратное (3.26) преобразование, получим для спинового оператора уравнения Дирака:

$$R=\exp\left\{\frac{e\hat{\varkappa}\hat{A}}{2\varkappa\mathcal{P}}\right\}(-\gamma^5\hat{s})\exp\left\{-\frac{e\hat{\varkappa}\hat{A}}{2\varkappa\mathcal{P}}\right\}=-\gamma^5\Big[\hat{s}+\frac{e}{\varkappa\mathcal{P}}\times$$
$$\times\big((As)\hat{\varkappa}-(\varkappa s)\hat{A}\big)-\frac{e^2}{2(\varkappa\mathcal{P})^2}(\varkappa s)\hat{\varkappa}\hat{A}\Big]\qquad(3.28)$$

собственные состояния которого есть

$$R\Psi_p^{\pm s}=\pm\Psi_p^{\pm s}\qquad(3.29)$$

где $p$ - постоянный 4-вектор (3.24). Заметим, что все полученные соотношения становятся совершенно наглядными, если воспользоваться известной формой волновой функции электрона в поле волны (см., напр.,/5/). Нетрудно убедиться, что для состояний (3.29) имеют место следующие соотношения:

$$\bar{\Psi}_p^s\gamma^5(\gamma f_{1,2}^*\mathcal{P})\Psi_p^s=(sf_{1,2}^*p);\quad \bar{\Psi}_p^s\gamma^5\Lambda\Psi_p^s=(sa_1a_2\varkappa)\qquad(3.30)$$
$$\bar{\Psi}_p^s\hat{\varkappa}\Psi_p^s=\frac{\varkappa p}{m}\ ;\quad \bar{\Psi}_p^s(\gamma f_{1,2}\mathcal{P})\Psi_p^s=0$$

где $(a_1 a_2 a_3 a_4) = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} a_{4\delta}$, при выводе последнего соотношения можно исходить из $(\gamma f \hat{p}) = \frac{1}{2}[\hat{f}, \sigma f]$. Подставляя эти соотношения в (3.2I), имеем для перенормированного массового оператора в поле эллиптически поляризованной плоской волны на массовой оболочке:

$$\langle M_R^{(1/2)} \rangle_{el} = \int d^4x\, \bar{\Psi}_p^{s} (M_R^{(1/2)})_{el} \Psi_p^{s} = \frac{\alpha}{2\pi} \int \frac{d^4x}{V} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_0^1 du\, e^{-ism^2u^2} \times$$
$$\times \left\{ \left[ m(1+u) + \frac{(\varkappa p)}{m} (\xi_1^2 \varphi_1 + \xi_2^2 \varphi_2) - iu \left( H_1 (s f_1^* p) + \right.\right.\right. \tag{3.3I}$$
$$\left.\left.\left. + H_2 (s f_2^* p) \right) - i (s a_1 a_2 \varkappa) N \right] e^{-i(\beta_1 + \beta_2)} - m(1+u) \right\}$$

где использованы те же обозначения, что и в (3.I8). Два последних члена в прямоугольных скобках зависят от спина электрона, для неполяризованных электронов они выпадают.

Как уже отмечалось, существенным достоинством развиваемого подхода является возможность получения массового оператора в поле плоской волны общего вида (I.I). Только на последнем этапе вычислений при выполнении интегрирования по $x$, которое сводится к интегрированию по $\varphi$ (ср.(2.27)), необходимо задать явную форму волны. Для монохроматической плоской волны (2.26) найдем окончательную форму среднего от перенормированного массового оператора электрона:

$$\langle M_R^{(1/2)} \rangle_{el} = \frac{\alpha}{2\pi} m \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_0^\infty \frac{dv}{(1+v)^2} \left\{ e^{-iz_1} \left[ \left( 1 + \frac{v}{1+v} + g_1 \left( \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2} \right) + \right.\right.\right. \tag{3.32}$$
$$\left.\left.\left. + i \frac{e^2}{m^2} \frac{(s a_1 a_2 \varkappa)}{m} g_3 \right) J_0(z_0) + i g_2 \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{2} J_1(z_0) \right] - \left( 1 + \frac{v}{1+v} \right) e^{-2itv/\lambda} \right\}$$

здесь

$$g_1 = 2\sin^2 t + v \left( 1 - \frac{\sin 2t}{2t} + \frac{v}{1+v} g \right);$$
$$g_2 = -2\sin^2 t + v \left[ \frac{1}{2} \left( \cos 2t - \frac{\sin 2t}{2t} \right) + \frac{v}{1+v} g \right]; \tag{3.33}$$
$$g = -\cos^2 t + \sin 2t/t - \sin^2 t/t^2;$$
$$g_3 = \frac{2v(2+v)}{\lambda(1+v)} \sin t (\sin t/t - \cos t); \quad \lambda = \frac{2\varkappa p}{m^2}$$

переменные и остальные обозначения такие же, как в (2.28). Среднее от массового оператора электрона в поле зависит не только от характеристик интенсивности $\xi_1^2$, $\xi_2^2$ и инвариантного интеграла движения $(\varkappa p)$, но и от спинового корреляционного члена

$$\frac{e^2}{m^2} (s a_1 a_2 \varkappa) = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2} \tilde{\xi}_2 (\varkappa s) \tag{3.34}$$



где $\tilde{\xi}_2$ – параметр Стокса, характеризующий степень циркулярной поляризации плоской волны. Для неполяризованных электронов этот член выпадает. Положив в (3.32) $\xi_2 = 0$, имеем случай линейной поляризации, а при $\xi_1^2 = \xi_2^2 = \xi^2$ – случай циркулярной поляризации. В последнем случае это выражение существенно упрощается и зависит только от элементарных функций:

$$\langle M_R^{(1/2)} \rangle_{cr} = \frac{\alpha}{2\pi} m \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_0^\infty \frac{dv}{(1+v)^2} \left\{ \left( e^{-iz_1^{cr}} - e^{-2itv/\lambda} \right) \left[ 1 - \frac{\lambda}{4} \rho \left( \frac{3}{(1+v)^2} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - 1 \right) \right] + \xi^2 \sin^2 t \left( 2 + \frac{v^2}{1+v} \right) e^{-iz_1^{cr}} \right\}; \quad \rho = \tilde{\xi}_2 \frac{(\varkappa s)}{(\varkappa p)} m, \tag{3.35}$$

где $z_1^{cr}$ определено в (2.30), проведено преобразование интеграла с использованием интегрирования по частям.

Полная вероятность излучения в поле волны для частиц со спином I/2 есть (см.формулу (3.I9) /6/):

$$W^{(1/2)} = -\frac{2m}{\varepsilon} \operatorname{Im} \langle M_R^{(1/2)} \rangle \tag{3.36}$$

где $\varepsilon$ – нулевая компонента среднего кинетического импульса (квазиимпульса) электрона в поле волны. Явное выражение для $W^{(1/2)}$ получим, подставив (3.32), (3.35) в (3.36). Для циркулярно поляризованной волны полная вероятность есть двухкратный интеграл от выражения, содержащего элементарные функции:

$$W_{cr}^{(1/2)} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{m^2}{\varepsilon} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_0^\infty \frac{dv}{(1+v)^2} \left\{ \left( \sin z_1^{cr} - \sin \frac{2vt}{\lambda} \right) \left[ 1 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\lambda}{4} \rho \left( \frac{3}{(1+v)^2} - 1 \right) \right] + \xi^2 \sin^2 t \left( 2 + \frac{v^2}{1+v} \right) \sin z_1^{cr} \right\} \tag{3.37}$$

Выражения (3.36), (3.32) и частный случай (3.37) являются новым представлением для вероятности, удобным в частности для анализа ситуации, когда $\xi^2 \sim 1$. Другое его достоинство состоит в том, что для любой поляризации волны $W^{(1/2)}$ представляется двухкратным интегралом, тогда как в традиционном подходе /I-5/ для случая волны эллиптической поляризации (этот вопрос рассматривался недавно в /I0/) полная вероятность представляется трехкратным интегралом. Отметим еще, что все спиновые корреляции обсуждаются впервые.

Выполнив ряд преобразований (см.Приложение Б), можно перейти к стандартному представлению полной вероятности

$$W_{cr}^{(1/2)}=\alpha\frac{m^2}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{v_n}\frac{dv}{(1+v)^2}\left\{-J_n^2(z)\left[1-\frac{\lambda}{4}\rho\left(\frac{3}{(1+v)^2}-1\right)+\right.\right. \tag{3.38}$$

$$\left.+\frac{\xi^2}{2}\left[1+v^2/2(1+v)\right]\left[J_{n+1}^2(z)+J_{n-1}^2(z)-2J_n^2(z)\right]\right.$$

где $z$ и $v_n$ введены в формуле (В.4). Для случая неполяризованных электронов следует в (3.38) опустить член с $\rho$ тогда мы получим известный результат(см.,напр., /5/).

Рассмотрим теперь асимптотические разложения массового оператора. В случае малых интенсивностей $\xi_{1,2}^2\ll 1$, когда применима теория возмущений, можно разложить массовый оператор (для простоты ограничимся случаем циркулярно поляризованной волны) по степеням $\xi^2$ :

$$\langle M_R^{(1/2)}(\xi^2\ll 1)\rangle^{cr}=\frac{\alpha m\xi^2}{2\pi}\left\{\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{\rho}{4}\right)\left(\mathcal{S}_2(1+\lambda)-\mathcal{S}_2(1-\lambda)\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{\rho}{2\lambda}-\frac{2}{\lambda^2}\right)\left[\frac{\pi^2}{3}-\mathcal{S}_2(1+\lambda)-\mathcal{S}_2(1-\lambda)\right]+\frac{3\lambda^2-\lambda\rho-4}{4(1-\lambda^2)}+ \tag{3.39}$$

$$\left.+\frac{\lambda^4-2\lambda^3\rho-3\lambda^2}{4(1-\lambda^2)^2}\ln\lambda-i\pi\left[\frac{1}{8}+\frac{\rho}{2}+\frac{2}{\lambda}+(\lambda^2\rho-1)/8(1+\lambda)^2\right]\right\}$$

здесь

$$\lambda=\frac{2\varkappa p}{m^2},\qquad \mathcal{S}_2(x)=-\int_0^1\frac{dt}{t}\ln(1-tx) \tag{3.40}$$

– функция Спенса. Как уже отмечалось, мнимая часть $\langle M_R^{(1/2)}(\xi^2\ll 1)\rangle^{cr}$ (3.39) связана с полным сечением комптоновского рассеяния фотона с циркулярной поляризацией на электроне (см.(2.34)):

$$\sigma_{com}^{(1/2)}=\frac{4}{a^2\lambda}\,\mathrm{Im}\frac{\langle M_R^{(1/2)}(\xi^2\ll 1)\rangle^{cr}}{m} \tag{3.41}$$

Учитывая, что для $\lambda>0$, $\mathrm{Im}\,\mathcal{S}_2(1+\lambda)=\pi\ln(1+\lambda)$ получаем из (3.39):

$$\sigma_{com}^{(1/2)}=\frac{2\pi\alpha^2}{m^2\lambda}\left\{\left[1-\rho-\frac{2(\rho+2)}{\lambda}-\frac{8}{\lambda^2}\right]\ln(1+\lambda)+\frac{1+4\rho}{2}+\frac{8}{\lambda}+\frac{\lambda^2\rho-1}{2(1+\lambda)^2}\right\} \tag{3.42}$$

Это же сечение можно получить из выражений, приведенных, например, в /5/, с помощью элементарного интегрирования. Интересно, что при $\lambda\gg 1$ логарифмический член в (3.42) входит с множителем$(1-\rho)$и при $\rho=1$ исчезает. Этот факт нетрудно понять. Для этого заметим, что значение $|\rho|=1$ возможно лишь когда вектора $\vec n=\frac{\vec\varkappa}{\varkappa^0}$ и $\vec\zeta$ ( направление оси квантования



спина) коллинеарны (например, в системе покоя электрона $\rho=-\tilde\zeta_2(\vec\zeta\vec n)$). Логарифмический при $\lambda\gg 1$ вклад дается диаграммой, на которой сначала излучается конечный фотон, а затем поглощается начальный, и определяется кинематической ситуацией, при которой конечный фотон рассеивается назад (проще всего в этом убедиться, проводя анализ в ц-системе). Если вектора $\vec\zeta$ и $\vec n$ коллинеарны, то процесс возможен лишь при одном значении спиральности начального фотона.

Действительная часть (3.39) дает низшую по $\xi^2$ поправку к массе, ее асимптотические разложения имеют вид:

$$\mathrm{Re}\langle M_R^{(1/2)}(\xi^2\ll 1)\rangle^{cr}=\begin{cases}\frac{\alpha m\xi^2}{6\pi}\lambda^2\left(\ln\frac{1}{\lambda^2}-\frac{11}{24}\right), & \lambda\ll 1\\ \frac{\alpha m\xi^2}{8\pi}\left(\ln^2\lambda+\ln\lambda+\frac{\pi^2}{2}\left(\rho+\frac{1}{3}\right)-3\right), & \lambda\gg 1\end{cases} \tag{3.43}$$

Видно, что при малых $\lambda$ величина $\mathrm{Re}\langle M_R^{(1/2)}(\xi^2\ll 1)\rangle^{cr}$ возрастает с ростом $\lambda$ от нуля, при больших $\lambda$ она $\propto\ln^2\lambda$ ; $\mathrm{Re}\langle M_R^{(1/2)}(\xi^2\ll 1)\rangle^{cr}$ слабо зависит от $\rho$ при любых $\lambda$ .

Интересно также поведение $\langle M_R^{(1/2)}\rangle^{cr}$ при $\lambda\gg 1$ и произвольном фиксированном значении параметра $\xi^2$ . Соответствующая асимптотика имеет вид:

$$\langle M_R^{(1/2)}\rangle^{cr}=\frac{\alpha m\xi^2}{8\pi}\left\{\ln^2\tilde\lambda+\ln\tilde\lambda+\frac{\pi^2}{2}\left(\rho+\frac{1}{3}\right)+1-\frac{4}{\xi^2}\ln(1+\xi^2)-i\pi\left[(1-\rho)\ln\tilde\lambda+\right.\right. \tag{3.44}$$

$$\left.\left.+\frac{1+5\rho}{2}\right]-4\int_0^{\infty}dt\,\ln\left[1-\frac{\sin^2t}{t^2}\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right]\left[\frac{\sin^2t}{t}+i\rho\left(\frac{\sin^2t}{t^2}-\frac{\sin 2t}{2t}\right)\right]\right\}$$

где $\tilde\lambda=\lambda/(1+\xi^2)=2\varkappa p/m^2(1+\xi^2)$ . Сравнивая (3.44) с (3.39), (3.43), видим, что в логарифмических членах точный учет интенсивности, по сравнению с теорией возмущений, сводится в этом пределе к замене $\lambda\to\tilde\lambda$ , или $m^2\to(m^*)^2$ , где $m^*$ – эффективная масса электрона в поле волны (квадрат квазиимпульса равен $m^2(1+\xi^2)$). Для нелогарифмических членов такой простой связи нет и в (3.44) стоит сложная функция $\xi^2$ .

Переход к случаю $\xi^2\gg 1$ , который сводится к рассмотрению процесса в постоянном скрещенном поле, был детально проанализирован в предыдущем разделе. Аналогичная процедура для спинорных частиц дает, как и в разделе II, известные результаты, приведенные, напр., в /9/. Поэтому ограничимся замечанием, касающимся спиновых членов (см.(3.31)). Изучавшаяся нами в поле волны спиновая корреляция (3.34) пропорциональна частоте волны и в пределе постоянного поля выпадает. Однако в этом пределе остается член, содержащий спин электрона в комбинации $(\mathcal{S}' f^* p)$ и дающий известный результат (см./9/, стр.183,184).

## Приложение А

Рассмотрим преобразования операторных выражений, встречающихся в данной работе. Пусть $R$ некоторый оператор. Определим $R(s)$ следующей формулой (эта процедура широко использовалась в /II/):

$$R(s) \equiv \tilde{R} = e^{is\mathcal{P}^2} R e^{-is\mathcal{P}^2} \qquad \text{(A.I)}$$

причем $R(0) = R$. Если $R = \mathcal{P}_\mu$, то дифференцируя (A.I) по $s$, получим:

$$\frac{d\tilde{\mathcal{P}}_\mu}{ds} = i\widetilde{[\mathcal{P}^2, \mathcal{P}_\mu]} = 2e\widetilde{\mathcal{P}^\lambda F_{\lambda\mu}} \qquad \text{(A.2)}$$

Для линейно поляризованной волны $A_\mu = a_\mu \psi(\varphi)$, $F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}\psi'(\varphi)$, $f_{\mu\nu} = \varkappa_\mu a_\nu - \varkappa_\nu a_\mu$
Подставляя явный вид $F_{\mu\nu}$ в (A.2), имеем

$$\frac{d\tilde{\mathcal{P}}_\mu}{ds} = -2e\,[\varkappa_\mu(\widetilde{a\mathcal{P}}) - a_\mu(\varkappa\mathcal{P})]\,\widetilde{\psi'(\varphi)} \qquad \text{(A.3)}$$

где учтено, что $(\varkappa\mathcal{P})$ коммутирует с $\mathcal{P}_\mu$. Свернув (A.3) с $a^\mu$, найдем:

$$\frac{d(\widetilde{a\mathcal{P}})}{ds} = 2ea^2(\varkappa\mathcal{P})\widetilde{\psi'(\varphi)} = 2ea^2(\varkappa\mathcal{P})\psi'(\tilde{\varphi}) \qquad \text{(A.4)}$$

Нам понадобится также знание оператора $X_\mu(s)$ $\left([X_\mu, \mathcal{P}_\nu] = -ig_{\mu\nu}\right)$, для которого уравнение типа (A.2) имеет вид:

$$\frac{d\tilde{X}_\mu}{ds} = -2\tilde{\mathcal{P}}_\mu \qquad \text{(A.5)}$$

Свернув это уравнение с $\varkappa^\mu$, имеем:

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{ds} = -2(\varkappa\mathcal{P}) \qquad \text{(A.6)}$$

Решение (A.6) дает для $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi} \equiv \varphi(s) = \varphi - 2(\varkappa\mathcal{P})s \qquad \text{(A.7)}$$

Подставляя (A.7) в (A.4) и решая последнее уравнение, получим:

$$(\widetilde{a\mathcal{P}}) = (a\mathcal{P}) - ea^2\Delta(s) \qquad \text{(A.8)}$$



где

$$\Delta(s) = \Psi(\varphi(s)) - \Psi(\varphi) \qquad \text{(A.9)}$$

Используя (A.8), (A.7), решим уравнение (A.3):

$$\mathcal{P}_\mu(s) = \mathcal{P}_\mu + \frac{e}{\varkappa\mathcal{P}}(f\mathcal{P})_\mu\Delta(s) - \frac{e^2a^2\varkappa_\mu}{2\varkappa\mathcal{P}}\Delta^2(s) \qquad \text{(A.I0)}$$

Перейдем теперь к "распутыванию" выражения $e^{is\mathcal{P}^2}$. Для линейно поляризованной волны запишем $\mathcal{P}^2$ в форме:

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}_a^2 + \mathcal{P}_\perp^2 \qquad \text{(A.II)}$$

где $\mathcal{P}_a = a(a\mathcal{P})/a^2$, $\mathcal{P}_\perp = \mathcal{P} - \mathcal{P}_a$. В соответствии с методикой, изложенной в /9/ (Приложение В), представим $e^{is\mathcal{P}^2}$ в виде:

$$e^{is\mathcal{P}^2} = e^{is(a+b)} = L(s)\,e^{isb}e^{isa} \qquad \text{(A.I2)}$$

где $a = \mathcal{P}_\perp^2$, $b = \mathcal{P}_a^2$. Дифференцируя (A.I2) по $s$, умножая результат слева на $L^{-1}$ и справа на $e^{-isa}e^{-isb}$, найдем:

$$iL^{-1}\frac{dL}{ds} = b - e^{isb}f(s)e^{-isb} \qquad \text{(A.I3)}$$

где $f(s) = e^{isa}\,b\,e^{-isa}$. Учитывая, что

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(is)^n}{n!}\underbrace{[a,[a,[a,..[a,b]}_{n}\ldots] = \sum\frac{(is)^n}{n!}\underbrace{[\mathcal{P}^2,[\mathcal{P}^2\ldots[\mathcal{P}^2,b]}_{n}\ldots] \qquad \text{(A.I4)}$$

имеем, что (ср.(A.I))

$$f(s) = e^{is\mathcal{P}^2}b\,e^{-is\mathcal{P}^2} = \tilde{b} \qquad \text{(A.I5)}$$

тогда можно непосредственно использовать результат (A.8):

$$f(s) = \tilde{b} = (\widetilde{a\mathcal{P}})^2/a^2 = \frac{(a\mathcal{P} - ea^2\Delta(s))^2}{a^2} \qquad \text{(A.I6)}$$

Так как $[\tilde{b}, b] = 0$, то (A.I3) принимает вид

$$iL^{-1}\frac{dL}{ds} = b - \tilde{b} \qquad \text{(A.I7)}$$

Решением этого уравнения с очевидным начальным условием $L(0)=1$ будет:

$$L(s)=\exp\left\{is\int_0^1[a\mathcal{P}-ea^2\Delta(sy)]^2\frac{dy}{a^2}\right\}e^{-isb} \qquad (\text{A.I8})$$

Используя (А.I8),имеем из (А.I2):

$$e^{iu\mathcal{P}^2}=e^{iu\int_0^1[a\mathcal{P}-ea^2\Delta(uy)]^2\frac{dy}{a^2}}\,e^{iu\mathcal{P}_\perp^2} \qquad (\text{A.I9})$$

В общем случае эллиптической поляризации волны (I.I), когда $A_\mu(\varphi)=a_{1\mu}\psi_1(\varphi)+a_{2\mu}\psi_2(\varphi)$ представим (ср.(А.II)) $\mathcal{P}^2=\mathcal{P}_{a_1}^2+\mathcal{P}_{a_2}^2+\mathcal{P}_\perp^2$, операторы $\mathcal{P}_{a_1}^2=(a_1\mathcal{P})^2/a_1^2=b_1$, $\mathcal{P}_{a_2}^2=\frac{(a_2\mathcal{P})^2}{a_2^2}=b_2$ коммутируют между собой. Полагая в (А.I2) $b=b_1+b_2$, можно непосредственно воспользоваться полученными выше выражениями, причем в формулы (А.I2) – (А.I5) члены, содержащие $a_1\psi_1(\varphi)$ и $a_2\psi_2(\varphi)$, будут входить аддитивно. В итоге получим для общего случая эллиптической поляризации:

$$e^{iu\mathcal{P}^2}=\exp\left\{iu\left[\int_0^1[a_1\mathcal{P}-ea_1^2\Delta(uy)]^2\frac{dy}{a_1^2}+\int_0^1[a_2\mathcal{P}-ea_2^2\Delta_2(uy)]^2\frac{dy}{a_2^2}\right]\right\}e^{iu\mathcal{P}_\perp^2} \qquad (\text{A.20})$$

где

$$\Delta_k(s)=\psi_k(\varphi(s))-\psi_k(\varphi)\quad(k=1,2) \qquad (\text{A.2I})$$

Для частиц со спином I/2 в случае линейно поляризованной волны $A_\mu(\varphi)=a_\mu\psi(\varphi)$ необходимо распутать выражение:

$$e^{iu\hat{\mathcal{P}}^2}=e^{iu(\mathcal{P}_F^2+\mathcal{P}_\perp^2)} \qquad (\text{A.22})$$

где $\mathcal{P}_F^2=\mathcal{P}_a^2+\frac{e}{2}\sigma F\equiv\mathcal{P}_a^2+ie\hat{a}\hat{\varkappa}\psi'(\varphi)$, остальные обозначения введены в (А.II). Если положить в (А.I2) $b=\mathcal{P}_F^2$, то дальнейшая процедура будет такой же, как выше (А.I3) –(А.I7), причем для $f_F(s)$ теперь имеем:

$$f_F(s)=\widetilde{(a\mathcal{P})^2}/a^2+ie\hat{a}\hat{\varkappa}\widetilde{\psi'(\varphi)} \qquad (\text{A.23})$$

В итоге для $L_F$ найдем

$$L_F(s)=e^{\frac{e\hat{a}\hat{\varkappa}\Delta(s)}{2\varkappa\mathcal{P}}}\,e^{is\int_0^1[a\mathcal{P}-ea^2\Delta(sy)]^2\frac{dy}{a^2}}\,e^{-is\mathcal{P}_F^2} \qquad (\text{A.24})$$



Подставляя (А.24) в (А.I2), где $L\to L_F$, $\mathcal{P}^2\to\hat{\mathcal{P}}^2$, приходим к (3.5). В общем случае эллиптической поляризации волны (I.I) вместо (А.22) будем иметь

$$e^{iu\hat{\mathcal{P}}^2}=e^{iu(\mathcal{P}_{F_1}^2+\mathcal{P}_{F_2}^2+\mathcal{P}_\perp^2)} \qquad (\text{A.25})$$

где $\mathcal{P}_{F_{1,2}}^2=\mathcal{P}_{a_{1,2}}^2+ie\hat{a}_{1,2}\hat{\varkappa}\psi_{1,2}'(\varphi)$. Положив $b=\mathcal{P}_{F_1}^2+\mathcal{P}_{F_2}^2$ найдем с помощью тех же операций, что и раньше

$$e^{iu\hat{\mathcal{P}}^2}=\exp\left(\frac{e\hat{a}_1\hat{\varkappa}\Delta_1(u)}{2\varkappa\mathcal{P}}\right)\exp\left(\frac{e\hat{a}_2\hat{\varkappa}\Delta_2(u)}{2\varkappa\mathcal{P}}\right)\exp\left\{iu\int_0^1[a_1\mathcal{P}-ea_1^2\Delta_1(sy)]^2\frac{dy}{a_1^2}\right\}\exp\left\{iu\int_0^1[a_2\mathcal{P}-ea_2^2\Delta_2(sy)]^2\frac{dy}{a_2^2}\right\}e^{iu\mathcal{P}_\perp^2} \qquad (\text{A.26})$$

где использованы те же обозначения, что в (А.20).

Выведем для случая линейно поляризованной волны некоторые операторные выражения, встречающиеся в расчете. Комбинацию

$$q=\mathcal{P}^\mu e^{is\mathcal{P}^2}\mathcal{P}_\mu \qquad (\text{A.27})$$

с помощью (А.I), (А.I0) представим в форме

$$q=\mathcal{P}^\mu\mathcal{P}_\mu(s)e^{is\mathcal{P}^2}=\left[\mathcal{P}^2-\frac{e^2a^2\Delta^2(s)}{2}\right]e^{is\mathcal{P}^2} \qquad (\text{A.28})$$

Коммутатор

$$B_\mu=[X_\mu,e^{is\mathcal{P}^2}]=[X_\mu-X_\mu(s)]e^{is\mathcal{P}^2} \qquad (\text{A.29})$$

может быть вычислен с помощью решения уравнения (А.5):

$$X_\mu(s)=X_\mu-2s\int_0^1dy\,\mathcal{P}_\mu(sy) \qquad (\text{A.30})$$

если использовать явный вид $\mathcal{P}_\mu(s)$ (А.I0), тогда

$$\hat{B}=\gamma^\mu B_\mu=2s\left[\hat{\mathcal{P}}+\frac{e(\gamma f\mathcal{P})}{\varkappa\mathcal{P}}\int_0^1\Delta(sy)dy-\frac{e^2a^2\hat{\varkappa}}{2\varkappa\mathcal{P}}\int_0^1\Delta^2(sy)dy\right] \qquad (\text{A.3I})$$

Для вычисления коммутатора

$$D_\mu=[X_\mu,e^{i\beta}] \qquad (\text{A.32})$$

где $\beta$ есть функция $\varkappa\mathcal{P}$, заметим, что поскольку

$$[X_\mu,\varkappa\mathcal{P}]=-i\varkappa_\mu \qquad (\text{A.33})$$

то коммутатор $X_\mu$ с функцией $\beta(\varkappa P)$ есть $-i\varkappa_\mu \beta'(\varkappa P)$, так что

$$D_\mu \equiv [X_\mu, e^{i\beta}] = \varkappa_\mu \frac{d\beta}{d(\varkappa P)} e^{i\beta} \tag{A.34}$$

Коммутатор $P_\mu$ с функцией от $\varphi = \varkappa x$ вычисляется непосредственно, если использовать явный вид $P_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$

$$[e^{i\beta}, P_\mu] = \varkappa_\mu \frac{\partial\beta}{\partial\varphi} e^{i\beta} \tag{A.35}$$

Для $\beta$, определенного формулой (2.I3), имеем:

$$\frac{\partial\beta}{\partial\varphi} = -\frac{e^2a^2 u\Delta(\xi)}{(\varkappa P)(1-u)}\left[\frac{\Delta(\xi)}{2} - \int_0^1 \Delta(\xi y)\,dy\right] \tag{A.36}$$

## Приложение Б

Интеграл по $t$ в выражении для мнимой части (2.30) может быть распространен на всю вещественную ось, причем точка $t=0$ согласно правилам Фейнмана обходится снизу:

$$\mathrm{Im}\langle M_R^{(c)}\rangle_{cr} = \frac{\alpha}{2\pi} m^2 \int_0^\infty \frac{dv}{(1+v)^2}\, \mathrm{Im}\int_{-i\varepsilon-\infty}^{-i\varepsilon+\infty} \frac{dt}{t} e^{-iz_1^{cr}(1+2\xi^2\sin^2 t)} \tag{Б.I}$$

Член, содержащий $\cos 2t$ в показателе экспоненты, разложим в ряд по бесселевым функциям (см./7/, стр.987):

$$e^{-i\frac{b}{t}\cos 2t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n J_n\left(\frac{b}{t}\right) e^{2int} \tag{Б.2}$$

где $b = \frac{v}{\lambda}\xi^2$, $\lambda = 2\varkappa P/m^2$. Подставим формулу (Б.2) в (Б.I) и проведем разложение входящей комбинации (см./8/, стр.I9):

$$e^{i\frac{b}{t}} J_n\left(\frac{b}{t}\right) = \frac{1}{\sqrt\pi}\sum_{m=0}^\infty \frac{i^m}{m!}\frac{\Gamma(n+m+\frac12)}{\Gamma(2n+m+1)}\left(\frac{2b}{t}\right)^{n+m} \tag{Б.3}$$

После этого интегралы по $t$ без труда берутся с помощью теории вычетов:

$$\mathrm{Im}\int_{-i\varepsilon-\infty}^{-i\varepsilon+\infty}\frac{dt}{t}e^{-iz_1^{cr}} = \begin{cases}0 & v>v_n\\ 2\pi\sum\limits_{n=1}^\infty J_n^2(z); & v<v_n\end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\int_{-i\varepsilon-\infty}^{-i\varepsilon+\infty}\frac{dt}{t}e^{-iz_1^{cr}}\sin^2 t = \begin{cases}0 & v>v_n\\ \pi\sum\limits_{n=1}^\infty \left[J_n^2(z) - \frac12\left(J_{n+1}^2(z)+J_{n-1}^2(z)\right)\right]; & v<v_n\end{cases} \tag{Б.4}$$



где $z = \frac{2n\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\sqrt{\frac{v}{v_n}\left(1-\frac{v}{v_n}\right)}$, $v_n = \frac{n\lambda}{1+\xi^2}$. При выводе этих результатов мы воспользовались известным разложением в ряд квадрата бесселевой функции (/8/, стр.I9). Подставляя (Б.4) в (Б.I), приходим к (2.33).

## Литература


I. А.И.Никишов, В.И.Ритус, ЖЭТФ, 46, 776, I964.
2. Н.Б.Нарожный, А.И.Никишов, В.И.Ритус. ЖЭТФ, 47, 930, I964.
3. И.И.Гольдман. ЖЭТФ, 46, I4I2, I964.
4. L.S.Brown,T.W.Kibble.Phys.Rev.133A,705,1964.
5. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория, часть I. "Наука", I968.
6. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. ЖЭТФ, 67, 453, I974.
7. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, рядов и сумм и произведений. Физматгиз, I962.
8. Г.Бейтман, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, том П. "Наука", I966.
9. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.С.Фадин. Излучение релятивистских электронов. Атомиздат, I973.
I0. В.А.Люлька. ЖЭТФ, 67, I638, I974.
II. В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко. ЖЭТФ, 68, 405, I975.


Поступила - 7 февраля I975 г.

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати 10.III-1975г. МН 02808
Усл. 1,2 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 20

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вт