8

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 74 - 94

Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БУНЧИРОВАННОГО ПУЧКА С ВАКУУМНОЙ КАМЕРОЙ, С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ СТЕНОК

Новосибирск

1974

Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БУНЧИРОВАННОГО ПУЧКА С ВАКУУМНОЙ КАМЕРОЙ, С КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ СТЕНОК

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе исследуется когерентное взаимодействие мультипольных возбуждений протяженного сгустка с вакуумной камерой накопителя, стенки которой имеют конечную проводимость. Приведены выражения для декрементов колебаний и условия устойчивости.

В В Е Д Е Н И Е

В настоящей работе рассмотрена устойчивость мультипольного коллективного движения протяженного сгустка, взаимодействующего со стенками вакуумной камеры, имеющими конечную проводимость σ. По поводу устойчивости дипольных колебаний, когда сгусток колеблется как целое, в настоящее время имеется довольно большой список работ. Здесь мы для решения названной задачи используем метод кинетического уравнения в переменных действие-фаза /I/, позволяющий единым образом исследовать устойчивость колебаний произвольной мультипольности.

Для реальных длин сгустков ($\gamma^2 l_b \gg l_\perp$, γ - релятивистский фактор, $l_\perp$ - поперечный размер камеры), поля наведенные пучком в камере с конечной проводимостью стенок, медленно (как степени $t^{-1/2}$) убывают со временем. При этом декременты когерентных колебаний, в общем случае, определяются суммой вкладов однооборотных[x)] и многооборотных эффектов:

$$\delta = \delta_{st} + \delta_{mt}$$

За однооборотные эффекты ответственно взаимодействие частиц на длине пучка, что соответствует полному исчезновению наведенных полей за время, равное периоду обращения частиц в машине ($2\pi/\omega_s$). Многооборотные эффекты определяются взаимодействием пучка с полями, наведенными на предыдущих оборотах.

Если наведенные поля квазистационарны, как это имеет место в случае конечной проводимости, необходимый для неустойчивости сдвиг фазы между наведенными полями и возбуждением короткого сгустка обеспечивается колебанием частиц около равновесной орбиты. При возбуждении в пучке колебания с мультипольностью m_α ($\omega \simeq m_\alpha \omega_\alpha$, α = I,2,3) набег фазы колебаний за оборот есть $2\pi m_\alpha \nu_\alpha$, ν_α-безразмерная частота колебания по степени свободы α.

Колебания будут затухать, если:

$$k < |m_\alpha| \nu_\alpha < k + 1/2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (I)$$

и раскачиваться, когда:

$$k+1/2 < m_\alpha \nu_\alpha < k+1$$

В случае дипольных колебаний ($|m_\alpha| = 1$) эти неравенства переходят в известное правило устойчивости

$$k < \nu < k+1/2 \qquad (2)$$

Для многомерных возбуждений ($\omega \simeq \sum_\alpha m_\alpha \omega_\alpha$) правило (I) остается в силе для суммовых возбуждений ($\prod_\alpha m_\alpha > 0$)

Устойчивость: $k < \sum_\alpha m_\alpha \nu_\alpha < k+1/2$ (Iа)

Неустойчивость: $k+1/2 < \sum_\alpha m_\alpha \nu_\alpha < k+1$

для разностных возбуждений $\prod_\alpha m_\alpha < 0$ положение области устойчивости зависит еще от размеров пучка. Из (I), (Iа) видно, что размер области устойчивости на рабочей клетке ν_r, ν_z может быть значительно меньше, чем это следует из (2). Получение условий устойчивости протяженного сгустка требует более подробного расчета, поскольку нужно знать поведение полей на длине пучка.

Работа состоит из четырех частей.

В первой части работы вычислена функция Грина камеры с конечной проводимостью стенок. Расчет велся без каких-либо специальных предположений о геометрии камеры.

Функция Грина строится в виде ряда по параметру d/λ, где d - толщина скин-слоя, λ - характерная длина волны колебания. Для наиболее важных для коллективной устойчивости низкочастотных колебаний поля ($\lambda > \ell_1$, ℓ_1 - поперечный размер камеры) достаточно ограничиться первыми двумя членами разложения:

$$G_{\alpha\beta}(\vec r, \vec r\,'|\omega) = G^{\infty}_{\alpha\beta}(\vec r, \vec r\,'|\omega) + G^{\sigma}_{\alpha\beta}(\vec r, \vec r\,'|\omega) \qquad (4)$$

где $G^{\infty}_{\alpha\beta}$ - функция Грина камеры с идеальнопроводящими стенками, а добавка $G^{\sigma}_{\alpha\beta}$ описывает возбуждение в стенках камеры токов проводимости. Используя граничное условие Леонтовича, можно выразить $G^{\sigma}_{\alpha\beta}$ через функцию Грина идеальнопроводящей камеры $G^{\infty}_{\alpha\beta}$

(которая считается известной).

Во второй части работы приводится интегральное уравнение, определяющее спектр нормальных колебаний пучка.

В третьей части работы получены декременты бетатронных и синхробетатронных колебаний. Для обычных геометрий вакуумной камеры (эллиптическая, круглая, прямоугольная) вклад в декремент аксиально-продольных колебаний ($\omega \simeq m_z \omega_z + m_c \omega_s$) от однооборотных эффектов можно оценить по формулам:

$$\delta_{st} = \frac{N r_0 c R_0^2 |m_z|}{8\pi\gamma\, \varphi_0^{1/2} \ell_1^4 \Gamma^2(|m_z|)} \left\langle \left(\frac{a_z}{2\ell_1}\right)^{2|m_z|-2} \right\rangle \left(\frac{\omega_s}{4\pi\sigma}\right)^{1/2} (\Delta_1 + \Delta_2) \qquad (5)$$

где

$$\Delta_1 \simeq \begin{cases} \dfrac{2^{1/4}\pi\,\Gamma(|m_c|-1/4)}{\Gamma(1/4)\Gamma(-1/4)\Gamma(|m_c|+1)}\, z & |z| \ll 1 \\[2ex] \dfrac{2^{5/4}\,\Gamma(|m_c|+1/2)}{\nu_z\,\Gamma(|m_c|+1)}\, \dfrac{\mathrm{sign}(z)}{|m_z z|^{3/2}} & |z| \gg 1 \end{cases}$$

$$\Delta_2 \simeq \begin{cases} \left(\dfrac{\ell_1}{R_0}\right)^2 \dfrac{4\pi\,\Gamma(|m_c|+1/4)}{2^{1/4}\,\Gamma^2(1/4)\,\Gamma(|m_c|+1)\,\varphi_0} & |z| \ll 1 \\[2ex] \left(\dfrac{\ell_1}{R_0}\right)^2 \dfrac{8\pi^{1/2}\,2^{3/4}}{|m_z z|^{3/2}} & |z| \gg 1 \end{cases}$$

Здесь N - число частиц в пучке, $r_0 = e^2/m_0 c^2$ - классический радиус частицы, $2\pi R_0$ - периметр орбиты, $\gamma = E_s/m_0 c^2$, ω_s - частота обращения частиц в машине, σ - проводимость стенок камеры, скобки $\langle\ \rangle$ означают усреднение по стационарному распределению, параметр z связан с хроматизмом машины

$$z = \varphi_0 \frac{d \ln \nu_z}{d \ln \omega_s}$$

$\varphi_0 = \ell_b/2R_0$, ℓ_b - длина сгустка.

Первое слагаемое в (5) учитывает модуляцию бетатронных фаз продольным движением (*head - tail* эффект). При малом хроматизме машины оно имеет противоположный знак для бетатронных ($m_c = 0$) и синхробетатронных ($m_c \neq 0$) колебаний, что соответствует перераспределению декрементов между бетатронными и синхробетатронными модами. Второе слагаемое, обязанное возбуждению полей поперечным движением, такой особенности не имеет.

Декремент радиально-продольных колебаний запишем аналогично (5):

$$\delta_{st} = \frac{N r_0 c R_0^2 |m_r|}{8\pi\gamma\psi_0^{1/2} \ell_1^4 \Gamma(|m_r|)^2} \left\langle \left(\frac{a_r}{2\ell_1}\right)^{2|m_r|-2} \right\rangle \left(\frac{\omega_s}{4\pi\sigma}\right)^{1/2} (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3)$$

где величины Δ_1, Δ_2 получаются из (5) заменой индекса z на r, а слагаемое с Δ_3, пропорциональное радиальной модуляции потерь, по порядку величины есть:

$$\Delta_3 \simeq \begin{cases} \overline{\psi} \dfrac{\ell_1}{\ell_0} \dfrac{4\pi\, 2^{3/4}}{\Gamma^2(1/4)} & |z| \ll 1 \\ \overline{\psi} \dfrac{\ell_1}{R_0} \dfrac{8\pi^{1/2}\, 2^{3/4}}{|m_z z|^{3/2}} & |z| \gg 1 \end{cases}$$

где $R_0\psi$ – мгновенная равновесная орбита при единичном относительном отклонении импульса частицы от равновесного.

Вклад многооборотных эффектов в декременты двумерных бетатронных колебаний ($\omega \simeq m_z\omega_z + m_r\omega_r$), по порядку величины есть:

$$\delta_{mt} \simeq \frac{N r_0 c R_0^2 Z_{m_z,m_r}}{8\pi\gamma\, \Gamma^2(|m_z|)\Gamma^2(|m_r|)\ell_1^4} \left(\frac{\omega_s}{4\pi\sigma}\right)^{1/2} \sum_{\ell=1} \frac{\sin 2\pi\ell |m_z\nu_z + m_r\nu_r|}{\ell^{1/2}} \qquad (6)$$

где Z_{m_z,m_r} – фактор, зависящий от поперечных размеров пучка, частот бетатронных колебаний (ν_z, ν_r) и номеров мультипольности (m_z, m_r):

$$Z_{m_z,m_r} = \left\langle \left(\frac{a_z}{2\ell_1}\right)^{2|m_z|-2} \left(\frac{a_r}{2\ell_1}\right)^{2|m_r|-2} \left[\frac{a_z^2 \operatorname{sign}(m_z)}{4\ell_1^2\nu_z} + \frac{a_r^2 \operatorname{sign}(m_r)}{4\ell_1^2\nu_r}\right] \right\rangle \operatorname{sign}(m_z\nu_z + m_r\nu_r) \qquad (7)$$

Величина δ_{mt} увеличивает декремент возбуждения, если положение рабочей точки на плоскости (ν_z, ν_r) таково, что

$$k - \frac{1 - \operatorname{sign}(Z_{m_z,m_r})}{4} < |m_r\nu_r + m_z\nu_z| < k + \frac{1 + \operatorname{sign}(Z_{m_z,m_r})}{4}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots \qquad (8)$$

Для суммового возбуждения ($m_r \cdot m_z > 0$) фактор Z_{m_z,m_r} всегда положителен, при этом (8), как видно, переходит в верхнее неравенство из (Ia):

$$k < |m_z\nu_z + m_r\nu_r| < k + 1/2 \qquad (9)$$

Если возбуждение разностное ($m_r \cdot m_z < 0$), то положение области устойчивости зависит также от соотношения радиального и вертикального размеров пучка. Для одномерных дипольных колебаний, например $m_r = 0$, $|m_z| = 1$, условие (8) переходит в (2):

$$k < \nu_z < k + 1/2$$

Вычислена также сумма декрементов синхробетатронных колебаний по всем синхротронным модам, при заданной мультипольности бетатронных колебаний (m_r, m_z). Полученная сумма декрементов не зависит от хроматизма машины ($d\nu/d\ln\omega_s$) и положительна в области, определяемой неравенствами (8). Поскольку положительная определенность суммы декрементов является необходимым условием устойчивости, выполнение условий (8), во всяком случае, необходимо для коллективной устойчивости мод с заданной мультипольностью поперечного движения (m_z, m_r).

В четвертой части работы получены декременты синхротронных колебаний.

I. Функция Грина

Функция Грина для камеры с конечной проводимостью стенок удовлетворяет системе уравнений

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathcal{D}(\vec{r}, \vec{r}', t-t') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t')$$
$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathcal{D}_{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}', t-t') = -4\pi\delta_{\alpha\beta}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t') \qquad (10)$$

и должна быть построена так, чтобы для Фурье-образов полей

$$\vec{\mathcal{E}}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \vec{\mathcal{E}}(t)\, e^{i\omega t}, \quad \vec{H}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \vec{H}(t)\, e^{i\omega t}$$

на стенках камеры выполнялись граничные условия Леонтовича:

$$[\vec{n}\,\vec{\mathcal{E}}_\omega] = \left(\frac{-i\omega}{4\pi\sigma}\right)^{1/2} [\vec{n}[\vec{H}_\omega \vec{n}]] \qquad (II)$$

$\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности камеры, направленный внутрь металла, $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, греческие индексы ($\alpha, \beta, \dots$) пробегают значения I,2,3, латинские $i, j, \dots$ – два значения τ, z. На граничной поверхности определена правая тройка ортов: вектор $\vec{n}$, тангенциальный к контуру поперечного сечения единичный вектор $\vec{\tau}$ и вектор бинормали $\vec{e} = [\vec{n}\vec{\tau}]$.

Пренебрегая кривизной камеры, ищем решение (I0) в виде:

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\, \exp[ik(y-y') - i\omega(t-t')]\, G_{\alpha\beta}(\vec{r}_\perp, \vec{r}_\perp', k, \omega) \qquad (I2)$$

где y – продольная координата ($y = vs$), $\vec{r}_\perp$ – поперечные к оси камеры координаты.

Фурье-образ функции Грина $G_{\alpha\beta}(\vec{r}_\perp, \vec{r}_\perp', k, \omega)$ запишем в виде суммы:

$$G_{\alpha\beta} = G^{\infty}_{\alpha\beta} + G^{\sigma}_{\alpha\beta}$$

где слагаемое $G^{\infty}_{\alpha\beta}$ представляет собой функцию Грина идеально проводящей камеры

$$(\Delta_\perp - k^2 + \omega^2/c^2)\, G^{\infty}_{\alpha\beta} = -4\pi\delta_{\alpha\beta}\,\delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}_\perp')$$

$$(\Delta_\perp - k^2 + \omega^2/c^2)\, G = -4\pi\,\delta(\vec{r}_\perp - \vec{r}_\perp') \qquad (I3)$$

$$G^{\infty}_{y\beta}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp') = \tau_i G^{\infty}_{i\beta}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp') = 0, \quad G^{\infty}_{y\beta} = \delta_{y\beta}\, G_{yy}(\vec{r}_\perp, \vec{r}_\perp')$$

где $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$, $\vec{r}_s \equiv \vec{r}_\perp$ – на поверхности волновода. При этом второе слагаемое $G^{\sigma}_{\alpha\beta}$ удовлетворяет однородному уравнению

$$(\Delta_\perp - k^2 + \omega^2/c^2)\, G^{\sigma}_{\alpha\beta} = 0 \qquad (I4)$$

и граничным условиям

$$G^{\sigma}_{y\beta}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp')\, e^{iky} = \frac{1\cdot c}{\sqrt{-4\pi i\sigma\omega}}\,[\vec{\tau}\vec{\nabla}]_\lambda\, G_{\lambda\beta}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp')\, e^{iky} \qquad (I5а)$$

$$\tau_i G^{\sigma}_{i\beta}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp')\, e^{iky} = \frac{1\cdot c}{\sqrt{-4\pi i\sigma\omega}}\,[\vec{e}\vec{\nabla}]\, G_{y\beta}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp')\, e^{iky} \qquad (I5б)$$

Поскольку $G^{\sigma}_{\alpha\beta}$ описывает поля без источников, при специальном выборе калибровки

$$\frac{\partial G^{\sigma}_{x\beta}}{\partial x} + \frac{\partial G^{\sigma}_{z\beta}}{\partial z} + ik\, G^{\sigma}_{y\beta} = 0 \qquad (I6)$$

скалярные компоненты G^{σ} можно положить равными нулю.

С использованием теоремы Грина

$$G^{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\oint ds\left[G^{\infty}_{\lambda\alpha}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp)\frac{\partial}{\partial n}G^{\sigma}_{\lambda\beta}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp') - G^{\sigma}_{\lambda\beta}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp')\frac{\partial}{\partial n}G^{\infty}_{\lambda\alpha}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp)\right] \qquad (I7)$$

(интегрирование ведется вдоль контура волновода, $\partial/\partial n \equiv \vec{n}\cdot\vec{\nabla}$), преобразуем уравнения (I3), (I4) в систему интегральных уравнений для $G_{\alpha\beta}$.

Для продольной компоненты $G^{\sigma}_{y\beta}$, с учетом граничных значений $G^{\infty}_{\lambda\beta}$, тождество (I7) дает:

$$G^{\sigma}_{y\beta}(\vec{r}_\perp, \vec{r}_\perp') = -\frac{1}{4\pi}\oint ds\, G^{\sigma}_{y\beta}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp')\frac{\partial}{\partial n}G^{\infty}_{yy}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp)$$

Подставив сюда значение $G^{\sigma}_{y\beta}$ на контуре из (I5а), получаем:

$$G^{\sigma}_{y\beta} = -\frac{1\cdot c}{4\pi}\oint\frac{ds}{\sqrt{-4\pi i\sigma\omega}}\frac{\partial}{\partial n}G^{\infty}_{yy}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp)[\vec{\tau}\vec{\nabla}]_\lambda G^{\infty}_{\lambda\beta}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp') - \frac{1c}{4\pi}\oint\frac{ds}{\sqrt{-4\pi i\sigma\omega}}\frac{\partial}{\partial n}G^{\infty}_{yy}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp)[\vec{\tau}\vec{\nabla}]_\lambda G^{\sigma}_{\lambda\beta}(\vec{r}_s, \vec{r}_\perp') \qquad (I8)$$

Для поперечных компонент $G^{\sigma}_{i\beta}$ тождество (I7), после ряда преобразований можно записать в виде:

$$G^{\sigma}_{i\beta}(\vec{r}_1,\vec{r}_1')=-\frac{1}{4\pi}\oint ds\left[ik\,G^{\sigma}_{y\beta}(\vec{r}_s,\vec{r}_1')\,n_j G^{\infty}_{ji}(\vec{r}_s,\vec{r}_1)+\right.$$
$$\left.+\,\tau_j G^{\sigma}_{j\beta}(\vec{r}_s,\vec{r}_1')[\vec{e}\vec{\nabla}]_k G^{\infty}_{ki}(\vec{r}_s,\vec{r}_1)\right] \qquad (19)$$

При получении (I9) были использованы граничные условия для $G^{\infty}_{\lambda\kappa}$, соотношения полноты

$$\tau_i\tau_k+n_in_k=\delta_{ik}$$

и калибровочное условие (I6).

После подстановки в (I9) контурных значений $G^{\sigma}_{\alpha\beta}$ из (I5а), (I5б), получаем систему уравнений для определения поперечных компонент $G^{\sigma}_{i\beta}$:

$$G^{\sigma}_{i\beta}=-\frac{1c}{4\pi}\oint\frac{ds}{\sqrt{-4\pi i\sigma\omega}}\left[ik\,n_j G^{\infty}_{ji}(\vec{r}_s,\vec{r}_1)[\vec{e}\vec{\nabla}]_\lambda\left(G^{\infty}_{\lambda\beta}(\vec{r}_s,\vec{r}_1')+G^{\sigma}_{\lambda\beta}(\vec{r}_s,\vec{r}_1')\right)-\right.$$
$$\left.-[\vec{e}\vec{\nabla}]_k G^{\infty}_{ki}(\vec{r}_s,\vec{r}_1)[\vec{e}\vec{\nabla}]_\lambda\left(G^{\infty}_{\lambda\beta}(\vec{r}_s,\vec{r}_1')+G^{\sigma}_{\lambda\beta}(\vec{r}_s,\vec{r}_1')\right)\right] \qquad (20)$$

Уравнения (I8), (20) образуют полную неоднородную систему интегральных уравнений для определения $G^{\sigma}_{\alpha\beta}$.

Полученная система уравнений является точной и поэтому описывает весь спектр колебаний поля. Для целей настоящей работы нам достаточно найти решение системы (I8),(20) в длинноволновой области, когда $d\ll\lambda$ (d –толщина скин-слоя, λ характерная длина волны). При этом уравнения (I8),(20) можно проитеррировать по степеням $\sigma^{-1/2}$. Считая $G^{\sigma}_{\alpha\beta}$ величиной первого порядка малости, можем записать решение (I8),(20) в первом приближении:

$$G^{\sigma}_{y\beta}=-\frac{1c}{4\pi}\oint\frac{ds}{\sqrt{-4\pi i\sigma\omega}}\,\frac{\partial}{\partial n}G^{\infty}_{yy}(\vec{r}_s,\vec{r}_1)[\vec{\tau}\vec{\nabla}]\,G^{\infty}_{\lambda\beta}(\vec{r}_s,\vec{r}_1') \qquad (21а)$$

$$G^{\sigma}_{i\beta}=-\frac{1c}{4\pi}\oint\frac{ds}{\sqrt{-4\pi i\sigma\omega}}\left[ik\,n_j G^{\infty}_{ji}(\vec{r}_s,\vec{r}_1)[\vec{\tau}\vec{\nabla}]_\lambda G^{\infty}_{\lambda\beta}(\vec{r}_s,\vec{r}_1')-\right.$$
$$\left.-[\vec{e}\vec{\nabla}]_k G^{\infty}_{ki}(\vec{r}_s,\vec{r}_1)[\vec{e}\vec{\nabla}]_j G^{\infty}_{j\beta}(\vec{r}_s,\vec{r}_1')\right] \qquad (21б)$$

Полученное решение имеет простые спектральные свойства. В низкочастотной области ($\omega\to 0$) $G^{\sigma}_{\alpha\beta}$ ведет себя как $\omega^{-1/2}$.

При этом на больших временах электрическое поле спадает как $t^{-3/2}$, а магнитное как $t^{-1/2}$. Кроме корневой особенности в низкочастотной области $G^{\sigma}_{\alpha\beta}$ имеет еще простые и двукратные полюса на собственных частотах камеры ($\omega\sim c/\ell_1$). Однако, в рассматриваемом случае $\gamma^2\ell_0\gg\ell_1$, эти частоты не дают существенного вклада в декременты колебаний.

Таким образом, зная функцию Грина для камеры с идеально-проводящими стенками $G^{\infty}_{\alpha\beta}$, можно легко из (2Iа), (2Iб) восстановить добавку $G^{\sigma}_{\alpha\beta}$ за счет конечной проводимости. Такой расчет проделан в приложении для камеры прямоугольного сечения.

В заключение заметим, что для замкнутой камеры, из-за периодичности полей по азимуту $\theta=y/R_0$, интегрирование в формуле (I2) по k следует заменить суммированием:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\to\frac{1}{2\pi R_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}$$

П. <u>Основное интегральное уравнение</u>

В настоящей работе, для расчета декрементов, мы используем формализм из /2/.

Пусть $F(\vec{p},\vec{r},t)$ плотность частиц в фазовом пространстве. Если описывать колебания частиц около равновесной орбиты канонически-сопряженными переменными действие-фаза $I_\alpha(\vec{p},\vec{r},t)$, $\psi_\alpha(r,\vec{p},t)$, $\dot{\psi}_\alpha=\omega_\alpha(I)$, $\alpha=1,2,3$, то в стационарном состоянии, когда коллективное движение отсутствует, частицы равномерно распределены по фазам колебаний ψ_α:

$$F_{st}(\vec{p},\vec{r},t)=F_{st}(I)$$

В возбужденном состоянии:

$$F=F_{st}(I)+\sum_{m\neq 0}F_m(I)\,e^{im_\alpha\psi_\alpha-i\omega t}$$

Спектр коллективных колебаний пучка, взаимодействующего с внешней системой, определяется совместным решением уравнений Власова. При этом, в первом приближении, нормальными коллективными координатами являются гармоники функции распределения

$$F_m(I)\exp[i m_\alpha \psi_\alpha - i\omega t],$$

которые удовлетворяют однородному интегральному уравнению

$$\Delta\omega_m F_m = e^2 m_\alpha \frac{\partial F_{st}}{\partial I_\alpha} \frac{1}{2\pi R_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\Gamma' K_{mn}(I, I') F_m(I') \qquad (22)$$

где $\Delta\omega_m = \omega - m_\alpha \omega_\alpha$,

$$K_{mn} = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi d\psi' d\theta d\theta'}{(2\pi)^8} \frac{v_\alpha v_\beta'}{c^2} G_{\alpha\beta}(\vec{z}_\perp, \theta, \vec{z}_\perp', \theta' | \omega_{mn}) e^{-i m_\alpha (\psi - \psi')_\alpha - i n(\theta - \theta')}$$

$\omega_{m,n} = m_\alpha \omega_\alpha + n\omega_s$, $G_{\alpha\beta}$ – функция Грина системы, с которой взаимодействует пучок, по повторяющимся индексам здесь и везде ниже производится суммирование.

Целые числа m_α определяют мультипольность возбуждения. Поскольку ядро интегрального уравнения (22) зависит от номеров мультипольности как от параметров, уравнение (22) позволяет единым образом исследовать устойчивость колебаний произвольной мультипольности без привлечения каких-либо дополнительных построений.

Используя разбиение функции Грина

$$G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}^{\infty} + G_{\alpha\beta}^{\sigma}$$

запишем ядро $K_{m,n}$ в виде:

$$K_{mn} = K_{mn}^{\infty} + K_{m,n}^{\sigma}$$

где возбуждение в стенках камеры токов проводимости учитывается слагаемым K_{mn}^{σ}. Для не слишком коротких пучков ($\gamma^2 \ell_b > \ell_\perp$, ℓ_b – длина пучка, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v_s^2/c^2}$) вакуумная камера накопителя является запредельным волноводом. При этом слагаемое K_{mn}^{∞} описывает взаимодействие пучка с квазистатическими, в системе покоя пучка, полями и не дает систематического изменения энергии коллективного движения. Возникающий сдвиг частоты пропорционален γ^{-3}. Поэтому в релятивистском случае $\gamma \gg 1$ слагаемое K_{mn}^{∞} можно опустить. Тогда уравнение (22) переходит в:

$$\Delta\omega_m F_m = \frac{e^2 m_\alpha}{2\pi R_0} \frac{\partial F_{st}}{\partial I_\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\Gamma' K_{mn}^{\sigma}(I, I') F_m(I') \qquad (22a)$$

Для практического использования (22а) нужно еще указать правила перехода от переменных $(\vec{p}, \vec{z})$ к переменным действие-

фаза (I, ψ). В случае мягкофокусирующей машины эти формулы имеют вид:

$$r = r_b + R_0 \overline{\psi} \frac{\Delta p}{p_s}, \quad r_b = a_r \cos\chi_r, \quad z = a_z \cos\chi_z,$$

$$\chi_i = \psi_i + \varphi_c \frac{d\omega_i}{d\omega_s}, \quad \theta = \omega_s t + \varphi_c + \vartheta_b, \quad \vartheta_b = -\frac{\overline{\psi}}{R_0} \frac{dr_b}{d\theta}, \quad \varphi_c = \varphi \sin\psi_c,$$

$$\vec{p}_\perp = \frac{p_s}{R_0} \frac{d\vec{z}_\perp}{d\theta}, \quad \Delta p = p - p_s = \mu_c \frac{d\varphi_c}{dt}; \quad \frac{d\psi_\alpha}{dt} = \omega_\alpha = \omega_0 \nu_\alpha, \quad \alpha = r, z, c$$

$$I_{r,z} = \frac{p_s (a^2 \nu)_{r,z}}{2R_0}, \quad I_c = \frac{\mu_c \omega_c \varphi^2}{2} R_0$$

Здесь все величины, относящиеся к равновесному движению отмечены индексом s, $2\pi R_0$ – периметр орбиты; $\omega_0 = \omega_0(E)$ – частота обращения ($\omega_s = \omega_0(E_s)$); $\mu_c = (d\omega_0/dp)_s^{-1}$ – масса синхротронного движения; $\psi = (\Delta r/R_0)/(\Delta p/p_s)$ для мягкофокусирующей машины $\psi \simeq (1-n)^{-1}$, n – показатель спада ведущего поля.

Модуляция фаз бетатронных колебаний возникает благодаря зависимости частот ω_r, ω_z от энергии E: $\omega_\alpha(E) = \omega_0(E)\nu_\alpha(E)$

III. Декременты синхробетатронных колебаний

Имея выражения для функции Грина камеры с конечной проводимостью стенок (21а), (21б), проведем расчет декрементов синхробетатронных колебаний пучка.

При расчете будем предполагать выполненным неравенство

$$\gamma^2 \ell_b \gg \ell_\perp \qquad (23)$$

где $\ell_\perp$ – поперечный размер камеры, ℓ_b – длина сгустка. Это означает, что мы пренебрегаем запаздыванием в $G_{\alpha\beta}^{\infty}$; для низкочастотных колебаний поля такое приближение оправдано. Кроме того (23) означает ($\gamma^2 \gg 1$), что в идеальнопроводящей камере происходила бы сильная экранировка пучка стенками камеры. При этом азимутальную зависимость $G_{\alpha\beta}^{\infty}$ можно положить δ-функцией

$$G_{\alpha\beta}^{\infty}(\vec{z}_\perp, \vec{z}_\perp', \theta - \theta') = G_{\alpha\beta}^{\infty}(\vec{z}_\perp, \vec{z}_\perp')\delta(\theta - \theta')$$

Для простоты записей рассмотрим сначала аксиально-продольные колебания $\omega \simeq m_z \omega_z + m_c \omega_c$.

Уравнение (22а) перепишем в виде:

$$\Delta\omega_m f_m = \frac{e^2 m_z \rho(\varphi)}{2\pi R_0} \frac{\partial F_{st}}{\partial I_z} \sum_n \mathcal{J}_{m_c}(n_1\varphi) \int dI' f_m(I') \mathcal{J}_{m_c}(n_1\varphi) K^{\sigma}_{mn}(I_1, I_1')$$

где было принято, что в стационарном состоянии распределение по амплитудам бетатронных и синхротронных колебаний факторизуется

$$F_{st}(I_z, I_c) = \rho(\varphi) F_{st}(I_z)$$

и было введено обозначение $n_1 = n + m_z d\omega_z / d\omega_s$

Воспользовавшись (2Iа) (2Iб) перепишем K^{σ}_{mn} в виде:

$$K^{\sigma}_{mn} = \frac{v_1^2}{4\pi c^2} \oint \frac{ds}{\sqrt{-4\pi i \sigma \omega_{mn}}} \Big[(\alpha_z \tilde{e}_\lambda G^{\infty}_{\lambda z})(\alpha_z' \tilde{e}_\lambda G^{\infty}_{\lambda z})' +$$

$$+ \Big(\frac{\partial}{\partial n} G^{\infty}_{yy} + i k_n \alpha_z n_i G^{\infty}_{iz}\Big)\Big(\frac{\partial G^{\infty}_{yy}}{\partial n} - i k_n \alpha_z' n_i G^{\infty}_{iz}\Big)' \Big]_{m,n}$$

где $\alpha_z = v_z / v_1$, $k_n = n/R_0$; $\tilde{e}_\lambda = [\vec{e}\,\vec{v}]_\lambda$

Вычислив Фурье-гармоники по бетатронным фазам получим:

$$K^{\sigma}_{mn} = \frac{R_0^2 \omega_s}{4\pi (|m_z|!)^2} \left(\frac{a_z a_z'}{4}\right)^{|m_z|} \frac{\Phi^{(0)}_{m_z} + 2n\, m_z \nu_z \left(\frac{\ell_1}{R_0}\right)^2 \Phi^{(1)}_{m_z}}{\sqrt{-i(m_z \nu_z + n)}} \qquad (24)$$

где были удержаны старшие члены разложения ядра K_{mn} по ℓ_1/R_0. Входящие в (24) геометрические факторы $\Phi^{(0)}_{m_z}$ и $\Phi^{(1)}_{m_z}$ равны:

$$\Phi^{(0)}_{m_z} = \oint ds \left(\frac{\omega_s}{4\pi\sigma}\right)^{1/2} \left[\frac{\partial^{|m_z|}}{\partial z^{|m_z|}} \frac{\partial}{\partial n} G^{\infty}_{yy}(\vec{z}_s|0)\right]^2$$

$$(25)$$

$$\Phi^{(1)}_{m_z} = \frac{1}{\ell_1^2} \oint ds \left(\frac{\omega_s}{4\pi\sigma}\right)^{1/2} \left[\frac{\partial^{|m_z|}}{\partial z^{|m_z|}} \frac{\partial}{\partial n} G^{\infty}_{yy}(\vec{z}_s|0)\right]\left[\frac{\partial^{|m_z|-1}}{\partial z^{|m_z|-1}} n_\lambda G^{\infty}_{\lambda z}(\vec{z}_s|0)\right]$$

Легко видеть, что $\Phi^{(1)}_{m_z}$ и $\Phi^{(0)}_{m_z}$ величины одного порядка.
Решение ищем в виде:

$$f_m(a_z^2, \varphi) = (a_z/2)^{|m_z|} f_m(\varphi)$$

При этом функция $f_m(\varphi)$ удовлетворяет уравнению (26)

$$\lambda f_m = -\rho(\varphi) \sum_n V_m(n) \mathcal{J}_{m_c}(n_1\varphi) \int_0^\infty d\varphi' \varphi' \mathcal{J}_{m_c}(n_1\varphi') f_m(\varphi')$$

где λ обозначено:

$$\lambda = \frac{\Delta\omega_m 8\pi \gamma \nu_z \Gamma^2(|m_z|)}{N r_0 c R_0^2 \,\mathrm{sign}(m_z)} \left\{ \left\langle \left(\frac{a_z}{2}\right)^{2|m_z|-2} \right\rangle \right\}^{-1},$$

и

$$V_m(n) = \frac{1}{\sqrt{-i(m_z\nu_z + n)}} \left[\Phi^{(0)}_{m_z} + 2 m_z \nu_z n \left(\frac{\ell_1}{R_0}\right)^2 \Phi^{(1)}_{m_z}\right],$$

c – скорость света, $r_0 = e^2/m_0 c^2$ – классический радиус частицы, N – число частиц в сгустке.

Прямое решение уравнения (26) с произвольным распределением $\rho(\varphi)$ затруднительно. К тому же, на практике обычно интерес представляет не весь его спектр, а старшие собственные значения, определяющие пороговый ток.

Умножая (26) на $\varphi^{|m_c|+k+1}$ (k =0,I,2...) и интегрируя по φ от 0 до ∞ получим точную систему уравнений для центральных моментов $f_m(\varphi)$

$$q_k = \int_0^\infty d\varphi\, \varphi^{|m_c|+k+1} f_m(\varphi),$$

$$\lambda q_{2k} = -\sum_n V_m(n) \int_0^\infty d\varphi\, \varphi^{|m_c|+2k+1} \rho(\varphi) \mathcal{J}_{m_c}(n_1\varphi) \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\frac{n_1}{2}\right)^{|m_c|+2k_1} \frac{(-1)^{k_1} q_{2k_1}}{k_1!\,(|m_c|+k_1)!} \qquad (27)$$

$$q_{2k+1} = 0$$

Для гауссова распределения по амплитудам синхротронных колебаний

$$\rho(\varphi) = \frac{2}{\varphi_0^2} \exp(-\varphi^2/\varphi_0^2)$$

моменты q_{2k} с ростом k растут не быстрее $\varphi_0^k \Gamma(k + |m_c|)$. При этом в сумме по k в (27) можно пренебречь вкладом моментов с $k_1 > k$

$$\lambda q_{2k} \simeq -\sum_n V_m(n) \int_0^\infty d\varphi\, \varphi^{|m_c|+2k+1} \rho(\varphi) \mathcal{J}_{m_c}(n_1\varphi) \sum_{k_1=0}^{k} \left(\frac{n_1}{2}\right)^{|m_c|+2k_1} \frac{(-1)^{k_1} q_{2k_1}}{k_1!\,(|m_c|+k_1)!} \qquad (28)$$

т.е. зацеплением момента q_{2k} с более высокими.

Формально такое приближение предполагает, что в первом возбужденном состоянии вблизи $\omega = m_z\omega_z + m_c\omega_c$ возмущение плотности $f_m(\varphi)$ не имеет корней нигде, за исключением точки $\varphi = 0$, где оно имеет корень кратности $|m_c|$, и точки $\varphi \to \infty$.

Система уравнений (28) имеет "треугольную" матрицу и поэтому легко может быть решена. Уравнение для определения собственного значения λ получим, положив в (28) $\kappa=0$:

$$\lambda = -\sum_n \frac{V_m(n)}{|m_c|!}\left(\frac{n_1}{2}\right)^{|m_c|}\int_0^\infty \frac{d\varphi}{\varphi_0^2}\varphi^{|m_c|+1}e^{-\varphi^2/\varphi_0^2}\, J_{m_c}(n_1\varphi) =$$

$$= -\frac{2}{|m_c|!}\sum_n V_m(n)\left(\frac{n_1\varphi_0}{2}\right)^{2|m_c|} \exp[-n_1^2\varphi_0^2/4] \qquad (29)$$

Остальные уравнения определяют моменты q_{2k}, за исключением момента q_0, который определяется нормировкой решения $f_m(\varphi)$.

Сумму по n в (29) представим в виде:

$$\lambda = -\int_{-\infty}^{\infty} dn\,(\quad) - \sum_{\ell\neq 0}\int_{-\infty}^{\infty} dn\, e^{2\pi i \ell n}(\quad) = \lambda_{st} + \lambda_{mt}, \qquad (30)$$

где первое слагаемое λ_{st} соответствует взаимодействию частиц с полями, затухающими за время оборота пучка ($\sim 1/\omega_s$), а второе описывает многооборотные эффекты, когда сгусток взаимодействует с полями, наведенными на предыдущих оборотах.

I. Однооборотные эффекты

Вычислим вклад в декремент колебаний от первого слагаемого в (30):

$$\lambda_{st} = -\frac{2}{|m_c|!}\int_{-\infty}^{\infty} dn\, V_m(n)\left(\frac{n_1\varphi_0}{2}\right)^{2|m_c|} e^{-\varphi_0^2 n_1^2/4} = \qquad (31)$$

$$= -\frac{2}{|m_c|!}\left(\frac{2\pi}{\varphi_0}\right)^{1/2}\hat{d}_{m_z}\lim_{\alpha\to 1}\frac{d^{|m_c|}}{d(-\alpha)^{|m_c|}}\left[\frac{\mathcal{D}_{-1/2}(z\sqrt{\alpha/2})}{\alpha^{1/4}}\right]$$

$z = -i\, m_z\varphi_0\, d\nu_z/d\ln\omega_s$; функция $\mathcal{D}_{-1/2}(z)$ связана с функцией параболического цилиндра $D_{-1/2}(z)$ /3/ по формуле $\mathcal{D}_{-1/2} = e^{z^2/4}D_{-1/2}$; $\hat{d}_{m_z}$ – дифференциальный оператор:

$$\hat{d}_{m_z} = \Phi^{(0)}_{m_z} + 2i\, m_z\nu_z\left(\frac{\ell_\perp}{R_0}\right)^2\Phi^{(1)}_{m_z}\frac{d}{dz}$$

Простые выражения для декремента $\delta = -Im(\omega)$ можно получить из (31) в двух предельных случаях

<u>а.</u> $|z| \ll 1$ – малый набег фазы на длине сгустка.

Разлагая (31) по степеням z, получаем выражение для декремента:

$$\delta_{st} = \frac{N r_0 c\, R_0^2|m_z|}{8\pi\gamma\,\varphi_0^{1/2}\,\Gamma^2(|m_z|)}\left\langle\left(\frac{a_z}{2}\right)^{2|m_z|-2}\right\rangle(\Delta_1+\Delta_2) \qquad (32)$$

где

$$\Delta_1 = \varphi_0\frac{d\ln\nu_z}{d\ln\omega_s}\,\frac{\pi\, 2^{1/4}\,\Gamma(|m_c|-1/4)}{\Gamma(1/4)\Gamma(-1/4)\Gamma(|m_c|+1)}\,\Phi^{(0)}_{m_z} \qquad (32а)$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{\ell_\perp}{R_0}\right)^2\frac{4\pi\,\Gamma(|m_c|+1/4)}{\varphi_0\, 2^{1/4}\,\Gamma^2(1/4)\Gamma(|m_c|+1)}\,\Phi^{(1)}_{m_z} \qquad (32б)$$

Первое слагаемое Δ_1 описывает эффект модуляции бетатронных фаз продольными колебаниями (*head-tail* эффект). Оно дает вклад различного знака в декременты бетатронных ($m_c=0$) и синхробетатронных ($m_c\neq 0$) колебаний. Это характерное для *head-tail* эффекта поведение объясняется тем, что наличие хроматизма $d\nu/d\ln\omega_s$ приводит к появлению связи синхротронных и бетатронных колебаний, которая вызывает перераспределение декрементов между бетатронными и синхробетатронными модами. Появление этого слагаемого обязано возбуждению полей продольным движением частиц.

Знак второго слагаемого Δ_2, возникающего за счет возбуждения полей поперечным движением частиц, не зависит от значения мультипольности синхротронных колебаний m_c. Величина Δ_2 содержит малый множитель ($(\ell_\perp/R_0)^2$), так что отношение Δ_1/Δ_2 по порядку величины есть:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\sim\left(\frac{\ell_b}{\ell_\perp}\right)^2\frac{d\ln\nu_z}{d\ln\omega_s}$$

При этом второе слагаемое становится определяющим, когда

$$\ell_b\left|\frac{d\nu_z}{d\ln\omega_s}\right| < \nu_z\,\ell_\perp(\ell_\perp/\ell_b)$$

<u>б.</u> $|z|\gg 1$ – большой набег фазы на длине пучка.

Используя асимптотическое значение $\mathcal{D}_{-1/2}$ /3/ получаем:

$$\Delta_1 \simeq \frac{2^{5/4}\,\mathrm{sign}(d\nu_z/d\ln\omega_s)}{\left|m_z\varphi_0\frac{d\nu_z}{d\ln\omega_s}\right|^{1/2}}\,\frac{\Gamma(|m_c|+1/2)}{\Gamma(|m_c|+1)}\,\Phi^{(0)}_{m_z}$$

$$\Delta_2 \simeq \left(\frac{\ell_1}{R_0}\right)^2 \frac{8\pi^{1/2}\, 2^{3/4}}{\left| m_z \varphi_0 \frac{d\nu_z}{d\ln\omega_s} \right|^{3/2}} \Phi^{(1)}_{m_z}$$

Отношение Δ_1/Δ_2 по порядку величины

$$\left|\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right| \sim \left| m_z \frac{d\ln\nu_z}{d\ln\omega_s}\right| \frac{\ell_b R_0}{\ell_1^2} > 1$$

при не слишком малом хроматизме

$$\left|\frac{d\nu_z}{d\ln\omega_s}\right| > \frac{\nu_z}{|m_z|} \frac{\ell_1^2}{\ell_b R_0}$$

2. Влияние радиально-продольной связи

Для радиально-продольных синхробетатронных колебаний, когда $\omega \simeq m_z\omega_z + m_r\omega_r$, декремент δ_{st} можно представить в виде:

$$\delta_{st} = \frac{N r_0 c R_0^2 |m_z|}{8\pi \gamma \varphi_0^{1/2} \Gamma^2(|m_z|)} \left\langle \left(\frac{a_z}{2}\right)^{2|m_z|-2} \right\rangle (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3) \qquad (33)$$

где величины Δ_1, Δ_2 получаются из формул (32а),(32б) заменой индексов z на r, а слагаемое Δ_3 дает вклад в декремент от радиально-продольной связи. Мы здесь приводим выражения для Δ_3 для двух предельных случаев.

а. $|z| \ll 1$ При этом

$$\Delta_3 = \frac{8\pi}{2^{1/4}\Gamma^2(1/4)} \frac{\overline{\psi}}{\ell_b} \frac{\partial}{\partial r} \Phi^{(0)}_{m_z-1}$$

б. $|z| \gg 1$

$$\Delta_3 = \frac{8\pi^{1/2}\, 2^{3/4}}{\left| m_z \varphi_0 \frac{d\nu_z}{d\ln\omega_s}\right|^{3/2}} \frac{\overline{\psi}}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \Phi^{(0)}_{m_z-1}$$

Отметим, что радиально-продольная связь уменьшает декремент при

$$\overline{\psi} \frac{\partial \Phi^{(0)}_{m_z-1}}{\partial r} > 0 \qquad (34)$$

Величина Δ_3 определяется радиальной модуляцией когерентных потерь. Поэтому при нормальных условиях, когда пучок движется в центре камеры правильного сечения с равномерным распределением проводимости σ по контуру, вклад от Δ_3 мал по сравнению с Δ_1, Δ_2. Если радиальная модуляция потерь велика

$$\left|\frac{\partial \Phi^{(0)}_{m-1}}{\partial r}\right| \simeq \frac{\Phi^{(0)}_{m_z-1}}{\ell_1}$$

то декремент радиально-продольных колебаний определяется величиной Δ_3 при

$$\ell_b \left|\frac{d\nu_z}{d\ln\omega_s}\right| \ll \overline{\psi} \frac{R_0 \ell_b}{\ell_b}$$

3. Многооборотные эффекты

Второе слагаемое в формуле (30) описывает взаимодействие сгустка с полями наведенными на предыдущих оборотах. Удерживая старшие члены разложения по (ℓ_1/R_0) можно записать:

$$\lambda_{mt} = -\frac{2\Phi^{(0)}_{m_z}}{|m_c|!} \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dn}{\sqrt{-i(m_z\nu_z+n)}} \left(\frac{n_1\varphi_0}{2}\right)^{2|m_c|} \exp\left[-\frac{n_1^2\varphi_0^2}{4} - 2\pi i\ell n\right] \qquad (35)$$

или

$$\lambda_{mt} = -\frac{2\Phi^{(0)}_{m_z}}{|m_c|!} \left(\frac{2\pi}{\varphi_0}\right)^{1/2} \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{2\pi i\ell m_z\nu_z} \lim_{\alpha\to 1} \frac{\partial^{|m_c|}}{\partial(-\alpha)^{|m_c|}} \Lambda_\ell(\alpha, z) \qquad (35а)$$

где $z = \varphi_0 m_z\, d\nu_z/d\ln\omega_s$ и была введена функция

$$\Lambda_\ell(\alpha, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(-ix)^{1/2}} \exp\left[-\alpha(z/2-x)^2 - 4\pi i\ell x/\varphi_0\right] \qquad (36)$$

Если хроматизм машины не мал ($\varphi_0 |d\nu/d\ln\omega_s| \sim 1$), из (35а) получаем выражение для многооборотной части декремента

$$\delta_{mt} = \frac{N r_0 c R_0^2}{8\pi\gamma \nu_z \Gamma^2(|m_z|)} \left\langle \left(\frac{a_z}{2}\right)^{2|m_z|-2} \right\rangle \Phi^{(0)}_{m_z} \Delta_{mt}\,, \qquad (37)$$

где

$$\Delta_{mt} = \frac{(z/2)^{2|m_c|}}{|m_c|!} e^{-z^2/4} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\ell |m_z|\nu_z}{\ell^{1/2}}$$

Отметим, что Δ_{mz} принимает максимальное значение при $z^2 = 4|m_z|$, при этом

$$\Delta_{mz}^{max} \simeq \frac{1}{|m_z|\nu_z} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi \ell |m_z| \nu_z}{\ell^{1/2}}$$

Если хроматизм машины мал $|z| \to 0$, многооборотная часть декремента синхробетатронных колебаний δ_{mz} пропорциональна малому числу $(\nu_0/2\pi)^{2|m_z|} \ll 1$. Поэтому, с точки зрения устойчивости возбуждений, практический интерес представляет только случай бетатронных колебаний $|m_z| = 0$, когда декремент слабо зависит от длины сгустка:

$$\Delta_{mz} \simeq \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi \ell |m_z| \nu_z}{\ell^{1/2}} = \Delta(|m_z|\nu_z) \qquad (37a)$$

Поведение функции $\Delta(x)$ хорошо известно: $\Delta(x) = \Delta(x+1)$

$$\Delta(x) < 0 \;, \quad k + 1/2 < x < k+1 \;, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\Delta(x) > 0 \;, \quad k < x < k + 1/2 \;, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

При этом "условие устойчивости" $\delta_{mz} > 0$ имеет вид:

$$k < |m_z|\nu_z < k + 1/2 \qquad (38)$$

Для дипольных бетатронных колебаний $|m_z| = 1$, неравенство (38) дает известное правило $k < \nu_z < k + 1/2$.

4. Двумерные бетатронные возбуждения $(\omega \simeq m_z\omega_z + m_r\omega_r)$

Для этого типа возбуждений уравнение (22а) дает следующее выражение для многооборотной части декремента:

$$\delta_{mz} = \frac{N r_0 c R_0^2 Z_{m_z, m_r}}{8\pi \gamma \Gamma^2(|m_z|) \Gamma^2(|m_r|)} \Phi^{(0)}_{m_z + m_r} \Delta(|m_r\nu_r + m_z\nu_z|) \qquad (39)$$

где Z_{m_z, m_r} – фактор, зависящий от размеров пучка

$$Z_{m_z, m_r} = \left\langle \left(\frac{a_z}{2}\right)^{2|m_z|-2} \left(\frac{a_r}{2}\right)^{2|m_r|-2} \left[\frac{\mathrm{sign}(m_z)\, a_r^2}{\nu_z} + \frac{\mathrm{sign}(m_r)\, a_z^2}{\nu_r}\right] \right\rangle \mathrm{sign}(m_z\nu_z + m_r\nu_r)$$

$\Delta(x)$–функция из (37а).

При этом условие устойчивости имеет вид:

$$k - \frac{1 - \mathrm{sign}\, Z_{m_z m_r}}{4} < |m_r\nu_r + m_z\nu_z| < k + \frac{1 + \mathrm{sign}\, Z_{m_z m_r}}{4} \qquad (40)$$

Для суммового возбуждения ($m_r \cdot m_z > 0$) условие (40) определяет полосы, аналогичные определяемым условием (38). Для разностного возбуждения ($m_r \cdot m_z < 0$), положение полос устойчивости зависит от знака $Z_{m_z m_r}$. При этом в плоскости (ν_r, ν_z) на линии

$$\frac{\nu_r}{\nu_z} = \frac{\left\langle \left(\frac{a_r}{2}\right)^{2|m_r|-2} \left(\frac{a_z}{2}\right)^{2|m_z|} \right\rangle}{\left\langle \left(\frac{a_z}{2}\right)^{2|m_z|-2} \left(\frac{a_r}{2}\right)^{2|m_r|} \right\rangle} \qquad (41)$$

происходит переход полосы устойчивости из правильной области

$$k < |m_r\nu_r + m_z\nu_z| < k + 1/2$$

в область

$$k + 1/2 < |m_r\nu_r + m_z\nu_z| < k + 1$$

Отметим, что условия (38),(40) разбивают плоскость ν_r, ν_z на множество, вообще говоря, пересекающихся ячеек устойчивости и неустойчивости с размером порядка ячейки сетки машинных резонансов. Поэтому, при выборе рабочей точки по частотам бетатронных колебаний может оказаться необходимым учитывать несколько первых (по m_r и m_z) условий из (38), (40).

5. Суммы декрементов синхробетатронных колебаний

Как известно, необходимым условием устойчивости колебаний является требование положительности суммы декрементов колебаний. Свойства инвариантности полной суммы декрементов когерентных колебаний по отношению к внесению связей рассматривались ранее в работе /4/.

В линейном приближении по взаимодействию (т.е. с точностью до величин порядка $|\Delta\omega_m| / \min\{\omega_m\}$) инвариантами системы являются также парциальные суммы декрементов (просуммированные не по всем номерам мультипольности, а по какой-то группе m_z). Поэтому их положительная определенность также является необходимым условием устойчивости колебаний.

Рассмотрим в этой связи суммы декрементов синхробетатронных колебаний с заданной мультипольностью бетатронного движения (m_z и m_z). Сумма декрементов колебаний вблизи $m_z \omega_z$ определяется следом ядра интегрального уравнения(22а), суммируя затем эти суммы по мультипольности синхротронного движения m_c, получим суммы декрементов с заданной мультипольностью бетатронных колебаний.

В низкочастотной области (с точностью до величин порядка $l_1/l_0 \ll 1$) сумма декрементов синхробетатронных колебаний имеет вид:

$$\delta_{m_z, m_z} = \sum_{m_c=-\infty}^{\infty} \delta_{m_z, m_z', m_c} = \frac{N r_0 c R_0^2 \Phi^{(0)}_{m_z+m_z}}{8\pi \gamma \Gamma^2(|m_z|)\Gamma^2(|m_z|)} Z_{m_z m_z} \Delta(|m_z \nu_z + m_z \nu_z|) \tag{42}$$

Заметим, что сумма декрементов (42), в отличие от парциальных декрементов, не зависит от хроматизма машины $d\nu/d\ln\omega_s$. Выражение (42) совпадает с декрементом пучка нулевой длины, поэтому оно полностью определяется многооборотными эффектами.

Сумма декрементов δ_{m_z, m_z} положительна при выполнении условия (40):

$$k - \frac{1-\operatorname{sign} Z_{m_z m_z}}{4} < |m_z \nu_z + m_z \nu_z| < k + \frac{1+\operatorname{sign} Z_{m_z, m_z}}{4} \tag{40a}$$

Поэтому устойчивость пучка по отношению к многооборотному взаимодействию является во всяком случае необходимой.

IУ. Синхротронные возбуждения ($\omega \simeq m_c \omega_c$)

Для оценки зависимости декрементов синхротронных возбуждений от параметров машины и пучка, рассмотрим случай, когда распределение частиц в стационарном состоянии по амплитудам синхротронных колебаний имеет вид "ступеньки"

$$F_{st} = \begin{cases} \dfrac{F_{st}(a_c^2)}{2\pi I_0} & I_c < I_0 \\ 0 & I_c > I_0 \end{cases} \tag{43}$$

где величина I_0 связана с длиной пучка l_0 по формуле

$$I_0 = \frac{\mu_c \omega_c \varphi_0^2 R_0}{2}\ ; \quad \varphi_0 = l_0/2R_0$$

Подставив распределение (43) в уравнение(22а) получаем дисперсионное уравнение для определения комплексного сдвига частоты :

$$\Delta\omega_m = -\frac{N e^2 m_c \omega_s}{8\pi \mu_c \omega_c \varphi_0^2 C} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J^2_{m_c}(n\varphi_0)}{\sqrt{-i(m_c \nu_c + n)}} \left[\Phi_0^{(0)} + \frac{2 m_c \mu_c \omega_c R_0}{n \rho_s} \overline{\psi} \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial r} \right] \tag{44}$$

Используя формулу суммирования (30) представим снова декременты синхротронных когерентных колебаний в виде суммы однооборотного и многооборотного слагаемых:

$$\delta = \delta_{st} + \delta_{mt}$$

I. Однооборотные эффекты

Для вычисления вклада от однооборотных эффектов в декремент необходимо просто проинтегрировать (44) по n. Учитывая малость синхротронной частоты мы можем записать δ_{st} в виде:

$$\delta_{st} = \frac{N r_0 c \ \pi^{1/2}}{8\pi \gamma R_0 \varphi_0^{3/2}} \frac{m_c^2 \Gamma(|m_c| - 1/4)}{(|m_c| + 1/4)\Gamma^2(1/4)\Gamma(|m_c| + 1/4)} (\Delta_1 + \Delta_2) \tag{45}$$

где

$$\Delta_1 = (\alpha - 1/\gamma^2)\Phi_0^{(0)}$$

α – коэффициент расширения орбиты,

$$\Delta_2 = 2 R_0 \overline{\psi} \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial r}$$

Величина Δ_1 пропорциональная полным потерям энергии, меняет знак при переходе через критическую энергию ($\gamma = \alpha^{-1/2}$). Этот член описывает добавку в "эффект отрицательной массы" за счет конечной проводимости стенок камеры.

Слагаемое с Δ_2 , пропорциональное градиенту полных потерь, появляется из-за присущей ускорителям связи радиального и продольного движения. Отметим, что знак Δ_2 противоположен знаку Δ_3 из (33), поскольку оба этих члена обязаны перераспределению декрементов между радиальными и фазовыми колебаниями.

2. Многооборотные эффекты

Учет взаимодействия сгустка с полями наведенными на предыдущих оборотах дает в декремент слагаемое:

$$\delta_{mt} = \frac{N r_0 c\, 2^{3/2}}{8\pi\gamma R_0 |m_c|^{1/2}} \left(\frac{\varphi_0}{4\pi}\right)^{2|m_c|-2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi \ell |m_c| \nu_c}{\ell^{2|m_c|+1/2}} \left(\overline{\Delta}_1 + \overline{\Delta}_2\right) \tag{46}$$

где

$$\overline{\Delta}_1 = \left(\frac{1}{\gamma^2} - \alpha\right) \frac{\Phi_0^{(0)}}{|m_c \nu_c|}$$

$$\overline{\Delta}_2 = \Delta_2$$

Из-за малости частоты синхротронных колебаний ν_c , сумму по ℓ в (3.4) можно считать положительной почти всегда (нарушения наступают при очень больших номерах мультипольности $|m_c| \sim \nu_c^{-1}$). Поэтому можно считать, что знак вклада многооборотных слагаемых в декременте определяется знаком массы синхротронного движения и знаком радиальной модуляции потерь.

То обстоятельство, что масса синхротронного движения μ_c входит в Δ_1 в (45) и в $\overline{\Delta}_1$, в (46) с разным знаком, связано с тем, что слагаемое Δ_1 описывает взаимодействие частиц на длине пучка; при положительной массе μ_c с увеличением импульса Δp фазовый набег на длине пучка ($\ell_b \omega_c / v_s$) увеличивается (частицы "хвоста" расходятся по фазе с полями, наведенными частицами "головы"), что приводит к увеличению инкремента неустойчивости. Слагаемое с $\overline{\Delta}_1$ описывает взаимодействие сгустка с полями наведенными на предыдущих оборотах. При этом изменение знака массы меняет знак фазового множителя $\exp(2\pi i m_c \nu_c)$.

В заключение работы приведем численные оценки пороговых токов:

$$N_{th} \simeq \frac{\overline{\Delta\omega}}{\delta_1}$$

где $\overline{\Delta\omega}$ – величина разброса в пучке по частотам, δ_1 – инкремент неустойчивости, рассчитанный на одну частицу.

Для накопителя ВЭПП-3 с параметрами: R_0 =I,I8 .I0^{3}см; ν =5.2; ℓ_b = 30 см; γ = 6.I0^3; $d\nu/dR_0$ = I.6 .I0^{-2}см $d\nu/da^2$ =3 .I0^{-3} I/см^2; H = 2.7 см; W = 5.5см, пороговый ток N_{th} в основном определяется вкладом многооборотных эффектов (37). По порядку величины

$$N_{th} \simeq \overline{\Delta\omega}\, \frac{8\pi\gamma\, \nu (HW)^2}{r_0 c R_0^2} \left(\frac{4\pi R_0 \sigma}{c}\right)^{1/2} \simeq 6 \cdot 10^{12}$$

Для накопителя ВЭПП-2М R_0 = 284 см, $\nu \simeq$ 3.05; $\ell_b \simeq$ 2.2см; γ = I0^3; $d\nu/dR_0$ = 0.I7 I/см; H = 2,4 см; W = 8 см. N_{th} определяется однооборотным слагаемым декремента (32)

$$N_{th} \simeq \overline{\Delta\omega}\, \frac{8\pi\gamma (HW)^2}{r_0 c R_0 \nu_c^{1/2} \left|\frac{d\ln \nu}{d\ln \omega}\right|} \left(\frac{2\pi\sigma \ell_b}{c}\right)^{1/2} \simeq 5.5\ 10^{10}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислим добавку к функции Грина за счет конечной проводимости стенок для камеры прямоугольного сечения с высотой H и шириной W. Функция Грина камеры с идеальнопроводящими стенками имеет вид:

$$G^{\infty}_{\alpha\beta} = -\frac{2\delta_{\alpha\beta}}{HW}\int_{-\infty}^{\infty} dk_{\parallel} \sum_{k_\perp} \frac{g^{\infty}_{\alpha\alpha}(\vec{z}_\perp, \vec{z}'_\perp)\, e^{ik_{\parallel}(y-y')}}{(\omega+i\varepsilon)^2 - k^2} \tag{47}$$

$$g^{\infty}_{xx} = C_x S_z C_{x'} S_{z'}, \quad g^{\infty}_{yy} = S_x S_z S_{x'} S_{z'}, \quad g_{zz} = S_x C_z S_{x'} C_{z'}$$

Здесь введены обозначения:

$$C_x = \cos k_x x, \quad S_x = \sin k_x x, \quad k_x = m\pi/W; \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$C_z = \cos k_z z, \quad S_z = \sin k_z z, \quad k_z = n\pi/H; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$k^2 = k_x^2 + k_z^2 + k_{\parallel}^2$$

Чтобы избежать громоздких вычислений получим сначала $G^{\sigma}_{y\lambda}$. Используя

$$[\vec{z}\vec{\nabla}]_{\mu} = ik_{\parallel} n_{\mu} - e_{\mu}\frac{\partial}{\partial n}$$

перепишем формулу (21а) в виде:

$$G^{\sigma}_{y\lambda} = \frac{1}{4\pi}\oint \frac{ds}{\sqrt{-4\pi i\sigma\omega}}\Big[\delta_{y\lambda}\frac{\partial G^{\infty}_{yy}(\vec{z},\vec{z})}{\partial n}\frac{\partial G^{\infty}_{yy}(\vec{z},\vec{z}')}{\partial n} - ik_{\parallel} n_{\lambda}\, G^{\infty}_{\lambda\lambda}(\vec{z}_\perp,\vec{z}'_\perp)\frac{\partial G^{\infty}_{yy}(\vec{z},\vec{z})}{\partial n}\Big] \tag{48}$$

С учетом того, что на горизонтальных стенках камеры $n_\lambda = \pm\delta_{z\lambda}$ (знак + относится к верхней стенке), а на вертикальной $n_\lambda = \pm\delta_{x\lambda}$ (знак + относится к стенке, на которой $x = W$), выражение (48) можно переписать:

$$G^{\sigma}_{y\lambda} = -\frac{2}{WH}\int_{-\infty}^{\infty} dk_{\parallel}\sum_{k_\perp}\frac{g^{\sigma}_{y\lambda}(\vec{z}_\perp,\vec{z}'_\perp)\, e^{ik_{\parallel}(y-y')}}{(\omega+i\varepsilon)^2 - k^2}$$

где ядро $g^{\sigma}_{y\lambda}(\vec{z}_\perp,\vec{z}'_\perp)$ получается в результате подстановки (47) в (48):

$$g^{\sigma}_{y\lambda}(x,z\,|\,x',z') =$$

$$= \frac{1}{2\pi HW}\sum_{k'_\perp}\frac{1}{k'^2-\omega^2}\Big\{\frac{\delta_{y\lambda}\delta_{k_x k'_x} H}{2\sqrt{-4\pi i\sigma_x\omega}}\big[1-(-1)^{n+n'}\big]k_z k_{z'} S_x S_{x'} S_z S_{z'} +$$

$$+ \frac{\delta_{y\lambda}\delta_{k_z k'_z} W}{2\sqrt{-4\pi i\sigma_z\omega}}\big[1-(-1)^{m+m'}\big]k_x k'_x S_x S_{x'} S_z S_{z'} -$$

$$- ik_{\parallel}\frac{\delta_{x\lambda}\delta_{k_z k'_z} H k_x}{2\sqrt{-4\pi i\sigma_z\omega}}\big[1-(-1)^{n+n'}\big] S_x S_z C_{x'} S_{z'} -$$

$$- ik_{\parallel}\frac{\delta_{z\lambda}\delta_{k_x k'_x} W k_z}{2\sqrt{-4\pi i\sigma_z\omega}}\big[1-(-1)^{m+m'}\big] S_x C_z S_{x'} S_{z'}$$

Выполняя суммирование по $k'_\perp$, с использованием формул /3/, получаем:

$$g^{\sigma}_{y\lambda} = \frac{1}{8\pi}\left(S_x B^s_z Q_z + S_z B^s_x Q_x\right)$$

где

$$Q_z = \frac{-1}{\sqrt{-4\pi i\sigma\omega}}\left[\delta_{y\lambda} k_z S_{x'} S_{z'} - i\delta_{z\lambda} k_{\parallel} S_{x'} C_{z'}\right]$$

а

$$B^s_z = \frac{\sin q_z(z-H) + (-1)^n \sin q_z z}{\sin q_z H}, \quad q_z^2 = \omega^2 - k_{\parallel}^2 - k_x^2$$

Выполнив аналогичные вычисления, можно восстановить остальные компоненты $G^{\sigma}_{\alpha\beta}$ из формулы (21б). Опуская выкладки, приведем результат:

$$G^{\sigma}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{HW}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_{\parallel}}{4\pi}\sum_{k_\perp}\frac{g^{\sigma}_{\alpha\beta}(\vec{z}_\perp,\vec{z}'_\perp)\, e^{ik_{\parallel}(y-y')}}{(\omega+i\varepsilon)^2 - k^2}$$

$$g^{\sigma}_{y\beta} = S_x B^s_z Q_z + S_z B^s_x Q_x$$

$$g^{\sigma}_{x\beta} = C_x B^s_z P_z + S_z B^c_x R_x \tag{49}$$

$$g^{\sigma}_{z\beta} = C_z B^s_x P_x + S_x B^c_z R_z$$

где были введены обозначения:

$$P_z = -\frac{1}{\sqrt{-4\pi i \sigma \omega}} \left[\delta_{x\beta} \kappa_z C_{x'} S_{z'} - \delta_{z\beta} \kappa_x S_{x'} C_{z'} \right]$$

$$R_z = -\frac{q_z^{-1}}{\sqrt{-4\pi i \sigma \omega}} \left[(\kappa_z^2 + \kappa_{\shortparallel}^2) \delta_{z\beta} S_{x'} C_{z'} - \kappa_x \kappa_z \delta_{x\beta} C_{x'} S_{z'} + i \kappa_{\shortparallel} \kappa_z S_{x'} S_{z'} \right]$$

$$B_z^c = \frac{1}{q_z} \frac{d}{dz} B_z^s$$

остальные выражения получаются соответствующей заменой индексов $x \to z$, $z \to x$; σ_x, σ_z – проводимости горизонтальных и вертикальных стенок, соответственно.

Как видно, выражения (49), с точностью до численного множителя $1/4\pi$, совпадают с найденной ранее в /5/ добавкой к функции Грина за счет конечной проводимости стенок для камеры с прямоугольным контуром.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский, Препринт № 315, ИЯФ СО АН СССР, 1969.
2. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков. Препринт ИЯФ 7-72 (1972).
3. Н.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва, Физматгиз, 1962.
4. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков. Препринт ИЯФ 34-70 (1970).
5. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский. Препринт № 45, ИЯФ СО АН СССР (1966).

Ответственный за выпуск Г.А.СПИРИДОНОВ
Подписано к печати I4.XI-I974г. МН 08565
усл. I,7 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно
Заказ №94
Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, мп