

17

3-58

**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР**

ПРЕПРИНТ И ЯФ 74 - 41

В.Е.Захаров, С.В.Манаков

**ТОЧНАЯ ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМО-
ДЕЙСТВИЯ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В
НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ**

Новосибирск

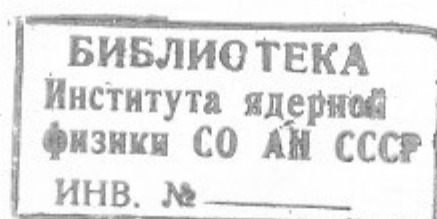
1974

ТОЧНАЯ ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

В.Е.Захаров, С.В.Мамаков

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что система нелинейных уравнений, описывающих резонансное взаимодействие трех одномерных волновых пакетов точно решается методом обратной задачи рассеяния. Найдены законы сохранения и доказана полная интегрируемость уравнений. Описано рассеяние волновых пакетов как для распадной, так и для взрывной неустойчивостей.



В различных физических ситуациях возникает задача о взаимодействии в нелинейной среде трех волновых пакетов с характерными частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и волновыми векторами k_1, k_2, k_3 , удовлетворяющими условиям резонанса (см., напр. [1]):

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 \quad (1.1)$$

$$k_1 = k_2 + k_3$$

Физическая природа пакетов может быть совершенно различной. Взаимодействие, характеризующееся условиями (1.1), представляет собой когерентный распад квантов волны 1 (мы будем называть ее накачкой) на кванты волн 2 и 3 (которые будем называть вторичными волнами) и обратный процесс слияния квантов 2 и 3 в квант 1 и играет основную роль в процессах вынужденного комбинационного и Мандельштам-Бриллюэновского рассеяния [2] (т.е. когерентного распада фотона на фотон и оптический или акустический фонон), в разнообразных процессах обмена энергии между волнами в плазме (распад электромагнитной или ленгмюровской волны на ленгмюровскую и ионозвуковую, распад электромагнитной волны на два ленгмюровских и т.д., см. [1]). Оно является также важным типом взаимодействия волн на поверхности жидкости [3], упругих волн в твердом теле [4], спиновых волн в ферромагнетиках [5].

Теория процессов типа (1.1) (мы будем называть их распадными) в настоящее время развита в основном в линейном по малости амплитуд вторичных волн приближения (см. обзор [1]) и описывает начальную стадию процесса - переход энергии от накачки к вторичным волнам, однако, условия линейного приближения не выполнены и существенную роль играет обратное влияние вторичных волн на накачку. Для учёта этого влияния необходимо строить последовательную нелинейную теорию. Такая теория развита в работе [6] для сильно идеализированного случая взаимодействия трех монохроматических волн. В [6] показано, что в отсутствие диссипации развитие распадного процесса (1.1) приводит к периодическому обмену энергией между накачкой и вторичными волнами; из результатов этой работы ясно, что вопрос о конечных интенсивностях и спектральных характеристиках ограниченных волновых пакетов, испытавших сильное распадное взаимодействие, является глубоко нетривиальным.

В устойчивых средах, допускающих распространение волн только с положительной энергией, распадные процессы типа (1.1) являются единственными трехволновыми резонансными процессами. В неустойчивых средах, допускающих распространение волн с отрицательной энергией (например, в плазме с током), возможно взаимодействие трех волновых пакетов, подчиняющихся условиям резонанса

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0 \quad (1.2)$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

Условия (1.2) могут быть выполнены лишь, если хотя бы одна из частот ω_i отрицательна, и описывают процесс "рождения трех квантов из вакуума" - взрывную неустойчивость среды.

Взрывная неустойчивость является процессом по существу своему нелинейным. Как и в распадной ситуации, её теория может быть построена для случая взаимо-

действия трех монохроматических волн [7]. В этом случае результатом развития взрывной неустойчивости является обращение амплитуд всех трех волн в бесконечность в некоторый конечный момент времени одновременно во всем пространстве. Очевидно, это лишь очень частный вариант поведения решений; при взаимодействии конечных волновых пакетов следует ожидать появления локализованных в пространстве особенностей их амплитуд.

В настоящей работе мы рассматриваем резонансное (как распадное так и взрывное) взаимодействие трех одномерных волновых пакетов в среде без диссипации. Мы применяем к этой задаче новую математическую технику — метод обратной задачи рассеяния.

Этот метод, впервые использованный в 1967 г. Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой [8] и впоследствии усовершенствованный Лаксом [9], Захаровым и Фаддеевым [10] и Шабатом [11], позволяет эффективно изучать некоторые нелинейные уравнения в частных производных без каких бы то ни было предположений об уровне нелинейности и виде начальных условий. Метод обратной задачи успешно применялся к уравнению Кортевега-де-Вриза [8-14] к нелинейному "параболическому" уравнению стационарной самофокусировки и дефокусировки [15-18], к "модифицированному" уравнению Кортевега-де-Вриза [19,20] к уравнению нелинейной струны [21], к задаче о распространении светового импульса в двухуровневой среде [22-25], к некоторым дискретным динамическим системам [26] (см. также статью [27], в которой кратко изложены результаты настоящей работы).

При использовании метода обратной задачи, решение начальной задачи для исследуемого уравнения сводится к решению прямой и обратной спектральных задач для некоторого линейного оператора. В принципе применение этого метода должно позволить найти решение при произвольных начальных условиях и для всех моментов времени. Реально, однако, приходится довольствоваться меньшим, прежде всего — изучением асимптотических при $t \rightarrow \pm \infty$ состояний, а также нахождением семейств отдельных точных решений. В настоящей работе использование метода обратной задачи позволит нам эффективно изучить рассеяние волновых пакетов за счет их распадного резонансного взаимодействия и в случае "длинных" (т.е. сильно нелинейных) пакетов найти явные формулы для конечных интенсивностей пакетов. При этом оказывается, что физическая картина взаимодействия пакетов фундаментальным образом зависит от соотношения скоростей накачки и вторичных волн: если скорость накачки является промежуточной между скоростями вторичных волн, то длинный пакет накачки практически полностью распадается при столкновении даже со сколь угодно малыми пакетами вторичных волн (отметим, что относящиеся к этому случаю утверждения нашей статьи [27] ошибочны). Если же скорость накачки является экстремальной, то разрушение волны накачки возможно лишь при столкновении её с достаточно интенсивными пакетами вторичных волн. Именно последний случай реализуется в большинстве экспериментальных ситуаций.

Для случая взрывной неустойчивости мы получим счетный набор точных решений, описывающих возникновение локальных особенностей в ограниченных волновых пакетах и приведем критерий образования таких особенностей для начальных условий произвольного вида.

Основные физические результаты содержатся в §§ 4,8-11. Для получения их, однако, необходимо развить формализм прямой и обратной спектральных задач для матричных дифференциальных операторов первого порядка — это сделано в §§ 5-7. §§ 2-3 посвящены физической и математической постановке задачи.

§ 2. Основные уравнения

Рассмотрим нелинейную среду, в которой существуют три волновых пакета (сообща говоря различной физической природы) с характерными волновыми числами k_1, k_2, k_3 . Обозначим соответствующие законы дисперсии через $\omega_i(k)$ и предположим, что для волновых чисел и частот выполняются условия резонанса (1.1). Пусть a_i — комплексные амплитуды волновых пакетов. Гамильтониан среды в присутствии волн можно записать в виде

$$H = \sum_{i=1}^3 \int \omega_i(k) a_i^*(k) a_i(k) dk + H_{int}. \quad (2.1)$$

Здесь H_{int} — гамильтониан взаимодействия волн. Условие резонанса (1.1) выделяет в H_{int} главный член:

$$H_{int} = \int \left\{ V_{k_1 k_2 k_3} a_1^*(k_1) a_2(k_2) a_3(k_3) + \text{к.с.} \right\} \delta_{k_1 - k_2 - k_3} dk_1 dk_2 dk_3 \quad (2.2)$$

с учетом которого уравнения движения среды

$$i \frac{\partial a_i}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta a_i^*} \quad (2.3)$$

приобретают вид:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial a_1}{\partial t} + \omega_1(k) a_1(k) &= \int V_{k k_1 k_2} a_2(k_1) a_3(k_2) \delta_{k - k_1 - k_2} dk_1 dk_2 \\ i \frac{\partial a_2}{\partial t} - \omega_2(k) a_2(k) &= \int V_{k_1 k_2 k}^* a_1(k_1) a_3^*(k_2) \delta_{k - k_1 + k_2} dk_1 dk_2 \\ i \frac{\partial a_3}{\partial t} - \omega_3(k) a_3(k) &= \int V_{k_1 k_2 k}^* a_1(k_1) a_2^*(k_2) \delta_{k - k_1 + k_2} dk_1 dk_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Эти уравнения сохраняют гамильтониан H , импульс среды

$$P = \sum_i \int k |a_i(k)|^2 dk \quad (2.5)$$

а также интегралы I_1 и I_2

$$I_1 = N_1 + N_2, \quad I_2 = N_1 + N_3, \quad N_i = \int |a_i(k)|^2 dk, \quad (2.6)$$

известные как соотношения Мэнли-Роу [2]. Эти интегралы имеют простой физический смысл сохранения суммарного числа квантов накачки и каждой из вторичных волн, соблюдающегося при процессах распада и слияния.

Уравнения (2.4) легко интегрируются для случая взаимодействия монохроматических волн, если $a_i(k) = a_i \delta(k - k_i)$. Если при этом $a_2, a_3 \ll a_1$, то имеет место экспоненциальный рост амплитуд a_2 и a_3 (распадная неустойчивость) с инкрементом $\gamma \sim |V| a_1$. При $a_2, a_3 \sim a_1$ решение выражается через эллиптические функции; происходит периодический обмен энергией между накачкой a_1 и вторичными волнами a_2, a_3 .

Для узких в k -пространстве (квазимонохроматических) волновых пакетов уравнения (2.4) могут быть упрощены. Переходя к огибающим пакетов в x -пространстве

$$u_i(x,t) = e^{i\omega_i(k_i)t - ik_i x} \int_{-\infty}^{\infty} a_i(k) e^{ikx} dk,$$

разлагая законы дисперсии по степеням отклонения от средних волновых чисел пакетов

$$\omega_i(k) = \omega_i(k_i) + V_i(k - k_i), \quad V_i = \left. \frac{\partial \omega_i}{\partial k} \right|_{k=k_i},$$

полагая $V_{kk'k''} = V_{k_1 k_2 k_3} = q$ и считая, что условие резонанса (1.1) выполнено точно, получим

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = iq u_2 u_3$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = iq^* u_1 u_3^*$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + V_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} = iq^* u_1 u_2^*.$$

(2.7)

Не ограничивая общности, можно полагать, что q - вещественно. Положим, что $V_1 \neq V_2 \neq V_3, V_1 \neq V_3$.

Уравнения (2.7) также являются гамильтоновскими

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = i \frac{\delta H}{\delta u_i^*}$$

с сохраняющимся гамильтонианом

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_k \frac{i}{2} V_k \left(u_k^* \frac{\partial u_k}{\partial x} - u_k \frac{\partial u_k^*}{\partial x} \right) + q \left(u_1^* u_2 u_3 + u_1 u_2^* u_3^* \right) \right\} dx, \quad (2.8)$$

импульсом

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k u_k \frac{\partial u_k^*}{\partial x} dx \quad (2.9)$$

и соотношениями Мэнли-Роу (2.6), где

$$N_i = \int_{-\infty}^{\infty} |u_i(x,t)|^2 dx.$$

В дальнейшем мы будем полагать, что $u_i(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$, т.е. будем рассматривать взаимодействие ограниченных волновых пакетов. При этом можно выделить три простых предельных случая. Если L - характерная длина накачки, u - её характерная амплитуда и V - наименьшая из величин $|V_1 - V_2|, |V_1 - V_3|$, то при выполнении неравенства

$$L \ll \frac{V}{qu} \quad (2.10)$$

имеет место случай "коротких" пакетов, когда изменение формы взаимодействующих пакетов является слабым. Если начальные амплитуды вторичных волн δu являются

малыми, то при выполнении неравенства

$$\frac{v}{qu} \ll L \ll \frac{v}{qu} \ln \frac{u}{\delta u} \quad (2.11)$$

за время взаимодействия происходит сильное изменение формы пакетов вторичных волн, но слабое изменение формы накачки. В этом случае уравнения (2.7) можно рассматривать в приближении "заданного поля накачки", считая $u_1(x - v_1 t)$ фиксированным.

Наиболее интересен, однако, случай "длинных" или "интенсивных пакетов

$$L \gg \frac{v}{qu} \ln \frac{u}{\delta u} \quad (2.12)$$

являющийся существенно нелинейным. В этом случае за время взаимодействия происходит многократный обмен энергией между накачкой и вторичными волнами. Вопрос об интенсивности и форме "длинных" пакетов, испытывающих распадное взаимодействие, является основным физическим вопросом, рассматриваемым в настоящей статье.

Отметим еще, что в случае (2.11) слабое изменение формы накачки имеет место только, если скорость накачки экстремальна, т.е. либо $v_1 < v_2, v_3$, либо $v_1 > v_2, v_3$. В противном случае, как уже отмечалось во введении, происходит практически полный распад волны накачки и приближение "заданного поля накачки" является неопределенным.

Пусть теперь в среде могут распространяться волны с отрицательной энергией и пусть волновые векторы и частоты волновых пакетов удовлетворяют соотношению (1.2). Очевидно, в этом случае главный член в гамильтониане взаимодействия волн имеет вид:

$$H_{int} = \int \left\{ u_{k_1 k_2 k_3} a_1^*(k_1) a_2^*(k_2) a_3^*(k_3) + \text{к.с.} \right\} \delta_{k_1 + k_2 + k_3} dk_1 dk_2 dk_3. \quad (2.13)$$

Рассуждая как и выше, получим в этом случае систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= iq u_2 u_3 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= iq u_1 u_3 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} &= iq u_1 u_2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

которая является гамильтоновской с гамильтонианом

$$H = \int \left\{ \frac{i}{2} \sum_k v_k \left(u_k^* \frac{\partial u_k}{\partial x} - u_k \frac{\partial u_k^*}{\partial x} \right) + q (u_1 u_2 u_3 + u_1^* u_2^* u_3^*) \right\} dx$$

сохраняет импульс P (2.9) и интегралы Мэнли-Роу, которые теперь имеют вид:

$$I_1 = N_1 - N_2, \quad I_2 = N_1 - N_3$$

Как и в распадном случае, система (2.14) решается, если все взаимодействующие волны являются строго монохроматическими. Однако, в этом случае любое начальное условие, содержащее хотя бы две волны, оканчивается особенностью в конечный момент времени. Простейшее решение такого рода имеет вид

$$u_1 = u_2 = u_3 = \frac{1}{q} \frac{e^{i\pi/6}}{t_0 - t} \quad (2.15)$$

Решение (2.15) обращается в бесконечность одновременно на всей прямой $-\infty < x < \infty$. Ясно, что при взаимодействии ограниченных волновых пакетов в некоторых областях пространства будет происходить опережающий рост амплитуды, что приведет к появлению локализованных (точечных) особенностей. Вопрос о поведении $u_i(x)$ вблизи такой особенности представляет большой физический интерес. Значительный интерес представляет также вопрос - Какие начальные условия могут привести к образованию особенностей. Этим вопросам посвящен § 9 настоящей статьи.

§ 3. L-A пары

Для того, чтобы к некоторому уравнению или системе уравнений мог быть применен метод обратной задачи необходимо, чтобы это уравнение было тождественно операторному соотношению

$$\frac{\partial L}{\partial t} = i [L, A], \quad (3.1)$$

где L, A - линейные операторы, устроенные некоторым образом из величин, входящих в рассматриваемое уравнение.

Рассмотрим следующую пару линейных дифференциальных операторов, определенных на функциях от x и зависящих от времени t как от параметра:

$$(L)_{ij} = i a_i \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x} + (a_i - a_j) Q_{ij}(x, t), \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

$$(A)_{ij} = i b_i \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x} + (b_i - b_j) Q_{ij}(x, t), \quad a_i \neq 0, a_{i+1} > a_i \quad (3.3)$$

Подставляя (3.2), (3.3) в (3.1), получим:

$$(a_i - a_j) \left(\frac{\partial Q_{ij}}{\partial t} + V_{ij} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial x} \right) = i \sum_{k \neq i, j} \epsilon_{ikj} Q_{ik} Q_{kj}. \quad (3.4)$$

Здесь $V_{ij} = S_{ij} / (a_j - a_i)$, $\epsilon_{ikj} = S_{ik} + S_{kj} + S_{ji}$, $S_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$.

Система (3.4) является нетривиальной, начиная с $N=3$; в этом случае сумма в правой части состоит из одного члена и $\epsilon_{ikj} = \epsilon_{ikj} \epsilon_{123}$, где ϵ_{ikj} - единичный полностью антисимметричный тензор.

Легко видеть, что подстановка

$$Q_{12} = -Q_{21}^* = \frac{q}{q_0 \sqrt{a_1 - a_2}} u_2, \quad Q_{13} = -Q_{31}^* = \frac{q}{q_0 \sqrt{a_1 - a_3}} u_1, \quad (3.5)$$

$$Q_{23} = -Q_{32}^* = \frac{q}{q_0 \sqrt{a_2 - a_3}} u_3,$$

$$V_1 = V_{13}, \quad V_2 = V_{12}, \quad V_3 = V_{23}$$

$$q_0 = \frac{\varepsilon_{123}}{\sqrt{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}}$$

переводит систему (3.4) в систему (2.7), а подстановка

$$Q_{12} = Q_{21}^* = \frac{q}{q_0 \sqrt{a_1 - a_2}} u_2, \quad Q_{23} = Q_{32}^* = \frac{q}{q_0 \sqrt{a_2 - a_3}} u_3, \quad (3.6)$$

$$Q_{13} = -Q_{31}^* = \frac{q}{q_0 \sqrt{a_1 - a_3}} u_1$$

переводит (3.4) в систему (2.14), что и позволяет применить к системам (2.7), (2.14) метод обратной задачи.

Рассмотрим уравнение

$$L\psi = \lambda\psi \quad (3.7)$$

то есть

$$ia_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \sum_k (a_i - a_k) Q_{ik}(x) \psi_k = \lambda \psi_i$$

где λ - вещественный параметр.

Рассмотрим два набора решений уравнения (3.7), определенных асимптотиками

$$\psi_{ij}^{\pm}(x, \lambda) \rightarrow \delta_{ij} e^{-i \frac{\lambda}{a_j} x}, \quad x \rightarrow \pm \infty \quad (3.8)$$

Здесь i - векторный индекс решения, j ($j=1, 2, \dots, N$) - его номер в наборе. Векторные функции $\psi_{ij}^{\pm}(x, \lambda)$ мы будем называть правыми и левыми функциями Йоста задачи (3.7). Каждый из наборов $\psi_{ij}^+(x, \lambda)$, $\psi_{ij}^-(x, \lambda)$ является полным, поэтому можно положить

$$\psi_{ij}^+(x, \lambda) = \sum_{\ell=1}^N \psi_{i\ell}^-(x, \lambda) S_{\ell j}(\lambda) \quad (3.9)$$

Определенную таким образом матрицу S мы будем называть матрицей перехода оператора L . Наряду с прямой матрицей перехода можно рассматривать обратную матрицу

$$\psi_{ij}^-(x, \lambda) = \sum_{\ell=1}^N \psi_{i\ell}^+(x, \lambda) S_{\ell j}^{-1}(\lambda). \quad (3.10)$$

Полагая, далее, что $L(t)$ подчиняется уравнению (3.1), продифференцируем уравнение (3.7) по времени при постоянном λ , в результате чего получим:

$$(L - \lambda) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + i A \Psi \right) = 0,$$

т.е. вектор $\frac{\partial \Psi}{\partial t} + i A \Psi$ также удовлетворяет уравнению (3.7) и, следовательно, может быть представлен в виде линейной комбинации правых функций Йоста. При этом коэффициенты разложения $\frac{\partial \Psi}{\partial t} + i A \Psi$ по $\psi_j^+(x, \lambda)$ должны быть определены из требования сохранения во времени определений функций Йоста (3.8), что даёт

$$\frac{\partial \psi_k^+}{\partial t} + i A \psi_k^+ = i \frac{b_k}{a_k} \lambda \psi_k^+. \quad (3.11)$$

Подставляя в (3.11) разложение (3.9) и устремляя $x \rightarrow -\infty$, получаем:

$$\frac{\partial S_{ik}}{\partial t} = i \left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_i}{a_i} \right) S_{ik},$$

откуда

$$S_{ik}(\lambda, t) = S_{ik}(\lambda, 0) \exp \left\{ i \left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_i}{a_i} \right) \lambda t \right\}. \quad (3.12)$$

Аналогично,

$$S_{ik}^{-1}(\lambda, t) = S_{ik}^{-1}(\lambda, 0) \exp \left\{ i \left(\frac{b_i}{a_i} - \frac{b_k}{a_k} \right) \lambda t \right\}. \quad (3.12a)$$

Диагональные элементы матрицы S не зависят от времени:

$$\frac{d}{dt} S_{ii} = 0, \quad \frac{d}{dt} S_{ii}^{-1} = 0. \quad (3.13)$$

Простая зависимость (3.12) матрицы S от времени позволяет решать задачу Коши для системы (3.4), в том числе и для интересующих нас систем (2.7), (2.14) по схеме метода обратной задачи:

$$Q_{ik}(x, 0) \rightarrow S_{ik}(\lambda, 0) \rightarrow S_{ik}(\lambda, t) \rightarrow Q_{ik}(x, t)$$

На первом этапе этой схемы необходимо по заданным в начальный момент времени $Q_{ik}(x)$ найти $S_{ik}(\lambda)$, т.е. решить прямую спектральную задачу для оператора L . На последнем этапе следует по заданным $S_{ik}(\lambda)$ восстановить $Q_{ik}(x, t)$, т.е. решить обратную задачу для оператора L . Исследованию этих двух задач посвящены § 5-7.

Пусть в матрице $Q_{ik}(x)$ отлична от нуля лишь одна пара сопряженных элементов $Q_{\alpha\beta}$, $Q_{\beta\alpha}$. Тогда матрица перехода имеет вид

$$\tilde{S}_{ik} = \delta_{ik} + \tilde{S}_{ik} \quad (3.14)$$

где \tilde{S} имеет лишь четыре ненулевых элемента - $\tilde{S}_{\alpha\alpha}$, $\tilde{S}_{\alpha\beta}$, $\tilde{S}_{\beta\alpha}$, $\tilde{S}_{\beta\beta}$. Матрицу перехода вида (3.14) мы будем называть частичной матрицей перехода. Восстановление величин $Q_{\alpha\beta}$, $Q_{\beta\alpha}$ по частичной матрице перехода сводится к решению обратной задачи для оператора L в случае $N=2$, что представляет собой принципиально более простую задачу чем общий случай $N \geq 3$.

Если в матрице Q_{ik} каждая пара недиагональных элементов отлична от нуля лишь на конечном интервале x и эти интервалы не пересекаются, то матрица перехода S представляет собой произведение частичных матриц перехода, взятых в определенном порядке.

Возвращаясь к системе (2.7), предположим, что при $t \rightarrow -\infty$ волновые пакеты u_1, u_2, u_3 пространственно разделены и, т.о. не взаимодействуют. Очевидно, порядок расположения этих пакетов определяется соотношением скоростей v_i . Пусть $v_1 > v_3 > v_2$. Тогда, при $t \rightarrow -\infty$ слева расположен пакет u_1 , далее u_3 и u_2 . При этом матрица перехода может быть представлена в виде

$$S = S_1^- S_3^- S_2^- \quad (3.15)$$

Здесь $S_i^-(t)$ - частичные матрицы перехода при $t \rightarrow -\infty$; можно предположить, что при $t \rightarrow +\infty$ волновые пакеты, испытавшие распадное взаимодействие, также окажутся пространственно разделенными. Очевидно, при этом их расположение будет обратным и матрица перехода может быть представлена в виде

$$S = S_2^+ S_3^+ S_1^+ \quad (3.16)$$

где $S_i^+(t)$ - частичные матрицы перехода. Из соотношения (3.12) следует, что формулы (3.15) и (3.16), полученные в предельных случаях $t \rightarrow \pm\infty$, справедливы тождественно во все моменты времени. Отсюда следует простой способ нахождения асимптотического при $t \rightarrow \pm\infty$ поведения произвольного начального условия системы (2.7). Для решения этой задачи достаточно найти при $t = 0$ матрицу перехода S и затем представить её в виде произведения частичных матриц перехода, взятых в определенном порядке. По частичным матрицам перехода $S_i^\pm(t)$, решая обратную задачу при $N=2$, можно найти асимптотические состояния волновых пакетов $u_i^\pm(x, t)$.

Из сказанного выше следует способ решения задачи о связи асимптотических при $t \rightarrow \pm\infty$ состояний волновых пакетов - задачи о рассеянии пакетов. Эта задача может быть решена по схеме

$$u^-(x, t) \rightarrow S_i^-(\lambda, t) \rightarrow S(\lambda, t) \rightarrow S_i^+(\lambda, t) \rightarrow u_i^+(x, t)$$

(Очевидно, что если $v_1 < v_3 < v_2$, то формулы (3.15) и (3.16) следует поменять местами).

Соотношения скоростей v_i зависят от знаков величин a_i . Для интересующего нас случая $N=3$, исключая из v_i числа b_i , получим

$$v_1 \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_1} \right) = v_2 \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) + v_3 \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} \right) \quad (3.17)$$

Не ограничивая общности, можно полагать, что $a_1 > a_2 > 0$. Из соотношения (3.17) следует, что рассмотренный выше случай экстремальной скорости накачки v_1 ($v_1 < v_2, v_3$ или $v_1 > v_2, v_3$) может осуществляться только если $a_3 < 0$. При $a_3 > 0$ скорость накачки является промежуточной между скоростями вторичных волн ($v_2 > v_1 > v_3$ либо $v_3 > v_1 > v_2$). В первом из этих случаев матрица представляется в виде

$$S = S_2^- S_1^- S_3^- = S_3^+ S_1^+ S_2^+,$$

во втором случае порядок в произведениях частичных матриц перехода противоположный. Как будет показано ниже, свойства оператора L и физическая картина рассеяния пакетов существенно зависит от знака a_3 , т.е. от соотношения скоростей накачки и вторичных волн.

Рассмотрим еще ряд вырожденных случаев. Если $a_3 = 0$, то $v_1 = v_3$ - скорость накачки совпадает со скоростью одной из вторичных волн. Если $a_3 < 0$, $a_2 = 0$, то совпадают скорости v_2 и v_3 . При этом можно положить $u_2 = u_3$ и система (2.7) переходит в известную систему уравнений, описывающую генерацию второй гармоники.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = iq u_2^2,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = iq u_1 u_2.$$

В частном случае точного резонанса, когда $\text{Re } u_1 = \text{Re } u_2 = 0$ эта система просто интегрируется.

В случае $a_2 = a_3$ скорость одной из вторичных волн обращается в бесконечность. Система (2.7) при этом приводится к виду

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = iq u_2 u_3, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = iq u_1 u_3^*,$$

$$v_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} = iq u_1 u_2^*.$$

Представляет интерес еще случай бесконечной групповой скорости накачки ($v_1 \rightarrow \infty$). Этого можно добиться, изменяя порядок следования Q_i и положив $a_1 = a_3$. Система (2.7) в этом случае приводится к виду

$$v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = iq u_2 u_3, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = iq u_1 u_3^*,$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} = iq u_1 u_2^*.$$

Этот случай реализуется в плазме при распаде электромагнитной волны на ленгмюровскую и ионозвуковую.

При $N=4$ система (3.4) описывает взаимодействие шести, а при совпадении двух из Q_i — пяти волновых пакетов. Вырожденные случаи в системе (2.4) при $N=4$ весьма разнообразны, приведем лишь один из них.

Если

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_3 = 0, \quad a_4 = -1, \\ b_1 = b_4 = v, \quad b_2 = b_3 = -v, \quad Q_{ik} = -Q_{ki}^*,$$

$$Q_{12} = -Q_{24}, \quad Q_{13} = Q_{34} = Q_{12}^{-1} = e^{-i\varphi/2},$$

, то система

(2.4) редуцируется до вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi = -16v Q_{14},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) Q_{14} = -4v \sin \varphi,$$

что эквивалентно уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \varphi = 64 \sin \varphi,$$

(3.18)

встречающемуся в теории нестационарного эффекта Джозефсона и, кроме того, интересного как нетривиальный пример релятивистски-инвариантного полевого уравнения, к которому применим метод обратной задачи. (Заметим, что родственное (3.18) уравнение $\partial^2 \psi / \partial x \partial t = \sin \psi$ рассматривали Лэмб [22], Абловин и др. [24] и Тахтаджян [23] при помощи совершенно других операторов L и A).

§ 4. Законы сохранения

Некоторая информация о свойствах решений рассматриваемых уравнений может быть получена уже на основании результатов предыдущего параграфа. Прежде всего это интегралы движения системы (3.4). Уравнение (3.13) означает, что рассматриваемые системы имеют континуальный набор законов сохранения - $S_{ij}(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$. Из этого набора можно выбрать счетную совокупность интегралов, в явном виде выражающихся через $Q_{ik}(x)$.

Для этого перепишем (3.7) в виде

$$i a_i \frac{\partial \psi_{ij}^-}{\partial x} - \lambda \psi_{ij}^- + \sum_k (a_i - a_k) Q_{ik}(x) \psi_{kj}^- = 0, \quad (4.1)$$

где ψ_{ij}^- - элементы j -той левой функции Йоста, и совершим в (4.1) подстановку

$$\psi_{ij}^-(x, \lambda) = \delta_{ij} \exp\left(-i \frac{\lambda}{a_j} x + \int_{-\infty}^x \chi_j(s) ds\right) + (1 - \delta_{ij}) A_{ij}(x, \lambda) \exp\left(-i \frac{\lambda}{a_j} x + \int_{-\infty}^x \chi_j(s) ds\right). \quad (4.2)$$

При $i=j$ из (4.1), (4.2) получаем

$$i a_j \chi_j(x, \lambda) + \sum_{k \neq j} (a_j - a_k) Q_{jk} A_{kj}(x, \lambda) = 0. \quad (4.3)$$

Остальные уравнения (4.1) ($i \neq j$) дают

$$i a_i \frac{\partial A_{ij}}{\partial x} - \lambda \left(1 - \frac{a_i}{a_j}\right) A_{ij} + i a_i A_{ij} \chi_j + \sum_{k \neq i, j} a_j (a_i - a_k) Q_{ik} A_{kj} + (a_j - a_j) Q_{ij}(x) = 0$$

Подставляя сюда χ_j из (4.3), получим

$$i a_i a_j \frac{\partial A_{ij}}{\partial x} - \lambda (a_j - a_i) A_{ij} - a_i A_{ij} \sum_{k \neq j} (a_j - a_k) Q_{jk} A_{kj} + \sum_{k \neq i, j} a_j (a_i - a_k) Q_{ik} A_{kj} + a_j (a_i - a_j) Q_{ij} = 0. \quad (4.4)$$

Из этого уравнения следует рекуррентное соотношение для коэффициентов асимптотического разложения $A_{ij}(x, \lambda)$ по степеням $1/\lambda$.

Полагая

$$A_{ij}(x, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{ij}^{(n)}(x)}{\lambda^n} \quad (4.5)$$

имеем из (4.4):

$$(a_j - a_i) A_{ij}^{(n+1)} = i a_i a_j \frac{\partial A_{ij}^{(n)}}{\partial x} - a_i \sum_{k \neq j} \sum_{n_1 + n_2 = n} (a_j - a_k) Q_{jk} A_{ij}^{(n_1)} A_{kj}^{(n_2)} + \quad (4.6)$$

$$+ \sum_{k \neq i, j} a_j (a_i - a_k) Q_{ik} A_{kj}^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$A_{ij}^{(1)} = -a_j Q_{ij}(x).$$

Из формулы (4.3) следует также разложение для величины

$$\chi_j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_j^{(n)}(x)}{\lambda^n} : \quad (4.7)$$

$$\chi_j^{(n)}(x) = i \sum_{k \neq j} \left(1 - \frac{a_k}{a_j}\right) Q_{jk}(x) A_{kj}^{(n)}(x).$$

Заметим, далее, что непосредственно из формулы (4.2) следует соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_j(x, \lambda) dx = \ln S_{jj}^{-1}(\lambda), \quad (4.8)$$

откуда, ввиду сохранения S_{jj}^{-1} следует, что величины

$$I_j^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_j^{(n)}(x) dx$$

являются интегралами системы (3.4). Формулы (4.6), (4.7) дают возможность вычисления всех $I_j^{(n)}$. Приведём первые три из них:

$$I_j^{(1)} = i \sum_{k \neq j} \int_{-\infty}^{\infty} (a_k - a_j) Q_{jk} Q_{kj} dx,$$

$$I_j^{(2)} = - \sum_{k \neq j} a_j a_k \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ Q_{jk} \frac{\partial Q_{kj}}{\partial x} + i a_j \sum_{i \neq j} (a_i - a_k) Q_{ji} Q_{ik} Q_{kj} \right\} dx,$$

$$I_j^{(3)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ i \sum_{i \neq j} a_i^2 a_j^2 Q_{ji} \frac{\partial^2 Q_{ij}}{\partial x^2} + a_j \sum_{i, k \neq j} \frac{a_i (a_i - a_k)}{a_j - a_i} Q_{ji} \frac{\partial}{\partial x} (Q_{ik} Q_{kj}) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i, k \neq j} \frac{a_k(a_i - a_k)}{a_k - a_j} Q_{ji} Q_{ik} \frac{\partial Q_{kj}}{\partial x} + i \sum_{\substack{i, k \neq j \\ \ell \neq k, j}} (a_i - a_k) Q_{ji} Q_{ik} Q_{k\ell} Q_{\ell j} - \\
 & - \sum_{i, k \neq j} a_i a_j Q_{ij} Q_{ji} Q_{jk} Q_{kj} \}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что если $Q_{ik}(x)$ — бесконечно дифференцируемые функции x , то асимптотически при $\lambda \rightarrow \infty$ матрица $S_{ik}(\lambda)$ является диагональной (недиагональные элементы S_{ik} убывают быстрее любой степени $1/\lambda$). Как показывается в следующем параграфе, матрица перехода S унимодулярна: $\det S = 1$, что означает, в пределе $\lambda \rightarrow \infty \prod_{i=1}^N S_{ii}(\lambda) = 1$, т.е.

$$\sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_j(x, \lambda) dx = 0$$

откуда следует соотношение

$$\sum_{j=1}^N I_j^{(n)} = 0.$$

Применительно к системам (2.7), (2.14) $I_j^{(n)}$ (4.9) дают соотношения Мэнли-Роу (2.6). Приведём ещё для системы (2.7) вторые интегралы

$$\begin{aligned}
 I_1^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ - \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} u_2 \frac{\partial u_2^*}{\partial x} - \frac{a_1 a_3}{a_1 - a_3} u_1 \frac{\partial u_1^*}{\partial x} + \right. \\
 \left. + i a_1 \sqrt{\frac{a_2 - a_3}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}} (u_1 u_2^* u_3^* + u_1^* u_2 u_3) \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ - \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} u_2^* \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{a_2 a_3}{a_2 - a_3} u_3 \frac{\partial u_3^*}{\partial x} - \right. \\
 \left. - i a_2 \sqrt{\frac{a_1 - a_3}{(a_2 - a_3)(a_1 - a_2)}} (u_1 u_2^* u_3^* + u_1^* u_2 u_3) \right\}
 \end{aligned}$$

Через эти интегралы выражается гамильтониан системы (2.7) и (2.9):

$$H = i \frac{a_1 - a_3}{a_1 a_3} v_1 I_1^{(2)} + i \frac{a_2 - a_3}{a_2 a_3} v_3 I_2^{(2)}$$

а также импульс P (2.9):

$$P = -\frac{i}{a_3} \left(\frac{a_1 - a_3}{a_1} I_1^{(2)} - \frac{a_2 - a_3}{a_2} I_2^{(2)} \right)$$

Остальные интегралы $I_j^{(n)}$ ($n \geq 3$) не допускают простой физической интерпретации.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что уравнения типа

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial t} = i \frac{\delta S}{\delta u_{ki}}, \quad \left(u_{ik} = \sqrt{|a_i - a_k|} \operatorname{sign}(a_i - a_k) Q_{ik} \right)$$

где

$$S = \sum_{n=1}^{n_1} \sum_{i=1}^N c_i^{(n)}(t) I_i^{(n)}, \quad n_1 = 2 \quad (4.10)$$

представляют собой системы, интегрируемые методом обратной задачи с очевидным образом устраиваемым оператором A . Для более простых операторов L - оператора Шредингера [10] и оператора (3.2) при $N=2$ [19] было показано, что произвольные суммы типа (4.10) (до $n_1 = \infty$) порождают системы (4.9), интегрируемые методом обратной задачи. По-видимому, этот факт верен и для оператора (3.2) при любом N . Не имея доказательства этого факта для произвольного n , мы произвели прямую проверку его для $n=3$ и убедились, что возникающие при этом уравнения (4.9) интегрируются. Найденные нами выражения для операторов A мы не приводим ввиду их громоздкости.

§ 5. Прямая спектральная задача для оператора L

Вместе с уравнением (3.7) рассмотрим сопряженное уравнение

$$-i a_i \frac{\partial \tilde{\Psi}_i}{\partial x} - \sum_k (a_i - a_k) Q_{ki} \tilde{\Psi}_k = \lambda \tilde{\Psi}_i. \quad (5.1)$$

Решения этого уравнения с асимптотиками

$$\tilde{\Psi}_{ik}^{\pm}(x, \lambda) \rightarrow e^{i \frac{\lambda}{a_k} x} \delta_{ik}, \quad x \rightarrow \pm \infty \quad (5.2)$$

(обозначения те же, что и в (3.8)) будем называть сопряженными правыми и левыми функциями Йоста. Коэффициенты разложения $\tilde{\Psi}_{ij}^+(x, \lambda)$ по $\tilde{\Psi}_{ij}^-(x, \lambda)$ назовём сопряженной матрицей перехода:

$$\tilde{\Psi}_{ij}^+(x, \lambda) = \sum_{\ell} \tilde{\Psi}_{i\ell}^-(x, \lambda) \tilde{S}_{\ell j}(\lambda). \quad (5.3)$$

Очевидно, что для любой пары решений (3.7) и (5.1) имеет место соотношение

$$\frac{d}{dx} \sum_k a_k \tilde{\Psi}_k \Psi_k = 0 \quad (5.4)$$

Здесь Ψ_k - произвольное решение (3.7), а $\tilde{\Psi}_k$ - решение (5.1) с тем же самым λ .

Используя (5.4), (3.8), (3.9), (5.2), (5.3), получаем выражения для матриц S , \tilde{S} через функции Йоста:

$$a_i S_{ij}(\lambda) = a_j \tilde{S}_{ji}^{-1}(\lambda) = \sum_k a_k \hat{\Psi}_{ki}^{-}(x, \lambda) \Psi_{kj}^{+}(x, \lambda), \quad (15.5)$$

$$a_j \tilde{S}_{ji}(\lambda) = a_i S_{ij}^{-1}(\lambda) = \sum_k a_k \hat{\Psi}_{ki}^{+}(x, \lambda) \Psi_{kj}^{-}(x, \lambda),$$

откуда следует, что

$$(\tilde{S}^T)^{-1} = A S A^{-1} \quad (5.6)$$

где матрица A имеет вид: $A_{ik} = a_i \delta_{ik}$.
 Определение матриц перехода S , \tilde{S} (3.9), (5.3) можно записать в виде

$$\Psi^{+}(x, \lambda) = \Psi^{-}(x, \lambda) S(\lambda) \quad (5.7)$$

$$\hat{\Psi}^{+}(x, \lambda) = \hat{\Psi}^{-}(x, \lambda) \tilde{S}(\lambda),$$

где Ψ - квадратные матрицы, устроенные из элементов функций Йоста:

$$(\Psi)_{ij} = \Psi_{ij}. \quad \text{Из (5.7) следует}$$

$$\det S(\lambda) = \frac{\det \Psi^{+}(x, \lambda)}{\det \Psi^{-}(x, \lambda)}, \quad \det \tilde{S}(\lambda) = \frac{\det \hat{\Psi}^{+}(x, \lambda)}{\det \hat{\Psi}^{-}(x, \lambda)}.$$

Но определители матриц Ψ представляют собой вронскианы систем (3.7), (5.1) и тривиально вычисляются:

$$\det \Psi^{+}(x, \lambda) = \det \Psi^{-}(x, \lambda) = \exp(-i\lambda x \sum \frac{1}{a_i}),$$

$$\det \hat{\Psi}^{+}(x, \lambda) = \det \hat{\Psi}^{-}(x, \lambda) = \exp(+i\lambda x \sum \frac{1}{a_i})$$

Т.о. матрицы S , \tilde{S} унимодулярны:

$$\det S(\lambda) = \det \tilde{S}(\lambda) = 1 \quad (5.8)$$

В дальнейшем мы ограничиваемся при рассмотрении оператора L (3.2) интересующим нас случаем $N=3$ и будем считать, что $a_1 > a_2 > 0$.

Если величины $|Q_{ik}(x)|$ убывают достаточно быстро при $|x| \rightarrow \infty$, то некоторые из функций Йоста могут быть аналитически продолжены в области комплексной плоскости $\text{Im } \lambda > 0$ или $\text{Im } \lambda < 0$. Проще всего в этом убедиться переходя от систем (3.7), (5.1) к соответствующим системам вольтерровских интегральных уравнений и применяя к последним обычную итерационную процедуру. При этом оказывается, что если $a_3 > 0$, то функции

$$\Psi_{i1}^{+}(x, \lambda), \Psi_{i3}^{-}(x, \lambda), \hat{\Psi}_{i1}^{-}(x, \lambda), \hat{\Psi}_{i3}^{+}(x, \lambda) \quad \text{аналитичны в верхней}$$

полуплоскости λ , а функции $\Psi_{i3}^{+}(x, \lambda), \Psi_{i1}^{-}(x, \lambda), \hat{\Psi}_{i3}^{-}(x, \lambda), \hat{\Psi}_{i1}^{+}(x, \lambda)$

аналитически продолжимы в нижнюю полуплоскость комплексной переменной λ . При этом, ввиду (5.5), $S_{11}(\lambda)$, $\tilde{S}_{33}(\lambda)$ аналитичны при $\text{Im} \lambda > 0$, а $S_{33}(\lambda)$, $\tilde{S}_{11}(\lambda)$ аналитичны в нижней полуплоскости λ . При этом в областях аналитичности функции Йоста имеют поведение

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(x, \lambda) &\approx e^{-i \frac{\lambda}{a_j} x} (\delta_{ij} + o(\frac{1}{\lambda})) \\ \tilde{\psi}_{ij}(x, \lambda) &\approx e^{i \frac{\lambda}{a_j} x} (\delta_{ij} + o(\frac{1}{\lambda})), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

так что

$$S_{11}(\lambda) = 1 + o(\frac{1}{\lambda}), \quad \text{Im} \lambda > 0, \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (5.9)$$

$$S_{33}(\lambda) = 1 + o(\frac{1}{\lambda}), \quad \text{Im} \lambda < 0, \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Если же $a_3 < 0$, то в верхней полуплоскости λ аналитичны функции $\psi_{i2}^-(x, \lambda)$, $\psi_{i3}^+(x, \lambda)$, $\tilde{\psi}_{i3}^-(x, \lambda)$, $\tilde{\psi}_{i2}^+(x, \lambda)$, а в нижней - $\psi_{i3}^-(x, \lambda)$, $\psi_{i2}^+(x, \lambda)$, $\tilde{\psi}_{i3}^+(x, \lambda)$, $\tilde{\psi}_{i2}^-(x, \lambda)$. Таким образом в этом случае аналитические элементы матриц перехода есть (в скобках указаны области аналитичности)

$$S_{22}(\lambda), \tilde{S}_{33}(\lambda) \quad (\text{Im} \lambda < 0)$$

$$S_{33}(\lambda), \tilde{S}_{22}(\lambda) \quad (\text{Im} \lambda > 0).$$

Остальные функции Йоста, вообще говоря, не допускают аналитического продолжения с вещественной оси. В этом и заключается принципиальное отличие рассматриваемой задачи от случая $N=2$, в котором все функции Йоста аналитичны в соответствующих областях комплексной плоскости (последнее обстоятельство существенно облегчает решение обратной задачи для оператора L).

Если аналитические элементы матриц перехода не имеют нулей (роль таких нулей выяснится в следующих двух параграфах), то задание матриц S , \tilde{S} с соблюдением условий аналитичности и соотношений (5.8), (5.6) полностью определяет "потенциал" $Q_{ik}(x)$ в операторе L (3.2). Это ясно уже из того, что совокупности величин $Q_{ik}(x)$ и S , \tilde{S} , удовлетворяющих указанным условиям, параметризуются одним и тем же числом вещественных функций одной переменной. При $N=3$ число таких функций равно двенадцати. В интересующих же нас случаях (3.5) и (3.6) набор $Q_{ik}(x)$ определяется всего тремя комплексными функциями. Для выяснения дальнейших ограничений, накладываемых на матрицы перехода S и \tilde{S} заметим, что при вложении (3.5) любое решение системы (5.1) получается из некоторого решения (3.7) комплексным сопряжением последнего. Это даёт связь между сопряженными функциями Йоста и функциями Йоста системы (3.7):

$$\tilde{\psi}_{ij}^\pm(x, \lambda) = \psi_{ij}^\pm(x, \lambda)^* \quad (5.10)$$

откуда, сравнивая определения матриц перехода S (3.9) и \tilde{S} (5.3), получаем:

$$\tilde{S}_{ik}(\lambda) = S_{ik}^*(\lambda) \quad (5.11)$$

Подставляя (5.11) в (5.6), находим:

$$S^+(\lambda) = A S^{-1}(\lambda) A^{-1}, \quad (5.12)$$

т.е. для вложения (3.5), описывающего распадное взаимодействие, S -матрица A -унитарна.

Совершенно аналогично убеждаемся, что при вложении (3.6) связь между сопряженными функциями Йоста и решениями (3.7) имеет вид:

$$\tilde{\psi}_{1j}^{\pm} = \psi_{1j}^{\pm*}, \quad \tilde{\psi}_{2j}^{\pm} = -\psi_{2j}^{\pm*}, \quad \tilde{\psi}_{3j}^{\pm} = \psi_{3j}^{\pm*} \quad (j=1,3) \quad (5.13)$$

$$\tilde{\psi}_{12}^{\pm} = -\psi_{12}^{\pm*}, \quad \tilde{\psi}_{22}^{\pm} = \psi_{22}^{\pm*}, \quad \tilde{\psi}_{32}^{\pm} = -\psi_{32}^{\pm*},$$

откуда сразу имеем:

$$\tilde{S}(\lambda) = Q S^*(\lambda) Q \quad (5.14)$$

где матрица Q есть:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = Q^{-1} \quad (5.15)$$

Т.о. в случае взрывной неустойчивости (3.6) матрица перехода $Q A$ -унитарна:

$$S^+(\lambda) = Q A S^{-1}(\lambda) A^{-1} Q^{-1} \quad (5.16)$$

Унитарная унимодулярная матрица 3×3 $S(\lambda)$, два элемента которой имеют соответствующие аналитические свойства, параметризуется шестью вещественными функциями. Таким же количеством функций одной переменной параметризуется, в рассматриваемых случаях, и потенциал $Q_{ik}(x)$. Таким образом, дальнейшие ограничения на $S(\lambda)$ невозможны.

В заключение настоящего параграфа заметим еще, что для финитного потенциала $Q_{ik}(x)$ (т.е. обращающегося в нуль вне некоторого конечного интервала) вся матрица перехода $S(\lambda)$ аналитична во всей комплексной плоскости λ . (Заметим также, что решения систем (2.7), (2.14) с финитными начальными условиями финитны в любой момент времени).

Если $a_2 > 0$, то в нулях $S_{11}(\lambda)$, которые мы будем обозначать через λ_n , $n=1, \dots, N_1$, $\sum_n \lambda_n > 0$.

$$\psi_{i1}^+(x, \lambda_n) = S_{21}(\lambda_n) \psi_{i2}^-(x, \lambda_n) + S_{31}(\lambda_n) \psi_{i3}^-(x, \lambda_n), \quad (5.17)$$

а в нулях $S_{33}(\lambda) - \mu_n$, $n=1, \dots, N_3$, $\sum_n \mu_n < 0$

$$\psi_{i3}^+(x, \mu_n) = S_{13}(\mu_n) \psi_{i1}^-(x, \mu_n) + S_{23}(\mu_n) \psi_{i2}^-(x, \mu_n). \quad (5.18)$$

Аналогично, в нулях $S_{11}^{-1}(\lambda) (= S_{11}^*(\lambda^*))$, $S_{33}^{-1}(\lambda) (= S_{33}^*(\lambda^*))$,

$$\psi_{i1}^-(x, \lambda_n^*) = S_{21}^{-1}(\lambda_n^*) \psi_{i2}^+(x, \lambda_n^*) + S_{31}^{-1}(\lambda_n^*) \psi_{i3}^+(x, \lambda_n^*), \quad (5.19)$$

$$\psi_{i3}^-(x, \mu_n^*) = S_{13}^{-1}(\mu_n^*) \psi_{i1}^+(x, \mu_n^*) + S_{23}^{-1}(\mu_n^*) \psi_{i2}^+(x, \mu_n^*). \quad (5.20)$$

При этом зависимость $S_{ik}(\lambda_n)$, $S_{ik}(\mu_n)$ от времени получается из формул (3.12) продолжением последних в комплексную плоскость, что

даёт:

$$S_{ik}(\lambda_n, t) = S_{ik}(\lambda_n, 0) \exp \left\{ i \left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_i}{a_i} \right) \lambda_n t \right\}, \quad (5.21)$$

$$S_{ik}(\mu_n, t) = S_{ik}(\mu_n, 0) \exp \left\{ i \left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_i}{a_i} \right) \mu_n t \right\}.$$

§ 6. Обобщённые функции Йоста

Аналитические свойства некоторых функций Йоста позволяют представить их в виде, весьма удобном при построении уравнений обратной спектральной задачи. Если, например, $a_3 > 0$ то аналитическая в нижней полуплоскости λ функция $\Psi_{i3}^+(x, \lambda)$, имеющая на бесконечности асимптотическое поведение $\sim e^{-i \frac{\lambda}{a_3} x} (\delta_{i3} + o(\frac{1}{\lambda}))$ представляется в виде:

$$\Psi_{i3}^+(x, \lambda) = \delta_{i3} e^{-i \frac{\lambda}{a_3} x} + \int_x^\infty A_i(x, y) e^{-i \frac{\lambda}{a_3} y} dy. \quad (6.1)$$

Представление (6.1) (так называемое "треугольное представление") является следствием того факта, что Фурье - преобразование аналитической в нижней полуплоскости функции $\Psi_{i3}^+(x, \lambda)$ обрывается. Как уже упоминалось выше, в случае оператора L (3.2) с $N=2$ все функции Йоста аналитичны в какой-либо полуплоскости λ и, следовательно, все они имеют представление типа (6.1). Однако при $N=3$ некоторые из функций Йоста не могут быть продолжены с вещественной прямой λ (в случае $a_3 > 0$ это функции $\Psi_{i2}^+(x, \lambda)$).

Оказывается, однако, возможным указать полный набор решений системы (3.7), аналитичных в той или иной полуплоскости за исключением, быть может, конечного числа точек и представимых в виде некоторого обобщения (6.1). Имея ввиду аналитические свойства этих решений, мы будем называть их обобщёнными функциями Йоста.

Рассмотрим совокупность величин $\xi_{ij}(x, \lambda)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$i a_i \frac{\partial \xi_{ij}(x, \lambda)}{\partial x} + \sum_k (a_i - a_k) Q_{ik}(x) \xi_{kj}(x, \lambda) = \lambda \left(1 - \frac{a_i}{a_j} \right) \xi_{ij}(x, \lambda). \quad (6.2)$$

Очевидно, что всякое решение системы (6.2) получается из какого-либо решения системы (3.7) умножением последнего на $e^{i \frac{\lambda}{a_j} x}$. Решения системы (6.2) $\Phi_{ij}(x, \lambda)$ с асимптотикой

$$\Phi_{ij}(x, \lambda) \rightarrow \delta_{ij}, \quad x \rightarrow +\infty \quad (6.3)$$

Очевидным образом связаны с правыми функциями Йоста:

$$\Phi_{ij}(x, \lambda) = \Psi_{ij}^+(x, \lambda) e^{i \frac{\lambda}{a_j} x}. \quad (6.4)$$

Отметим еще одно обстоятельство. Если $\xi_{ij_1}(x, \lambda)$ - решение (6.2) с $j=j_1$,

$$\text{то } \xi_{ij_2}(x, \lambda) = \xi_{ij_1}(x, \lambda) \exp \left(i \lambda \left(\frac{1}{a_{j_2}} - \frac{1}{a_{j_1}} \right) x \right) \quad - \text{ решение}$$

(6.2) с $j=j_2$.

Рассмотрим теперь семейство решений (6.2) (обобщённые функции Йоста) представимых в виде

$$\begin{aligned} \zeta_{ij}(x, \lambda) = & \delta_{ij} + \alpha_j \int_x^\infty k_{ij}(x, y) e^{i \frac{\lambda}{a_j}(x-y)} dy - \\ & - (1 - \alpha_j) \int_{-\infty}^x k_{ij}(x, y) e^{i \frac{\lambda}{a_j}(x-y)} dy + \sum_n \frac{c_j^{(n)} \varphi_{ij}^{(n)}(x)}{\lambda - \gamma_j^{(n)}} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Функции $\zeta_{ij}(x, \lambda)$ - суть решения системы (6.2) если, во-первых, $k_{ij}(x, y)$ является решением задачи Кши-Гурса

$$i a_i \frac{\partial k_{ij}(x, y)}{\partial x} + i a_j \frac{\partial k_{ij}(x, y)}{\partial y} + \sum_k (a_i - a_k) Q_{ik}(x) k_{kj}(x, y) = 0 \quad (6.6)$$

с условием на характеристике

$$Q_{ij}(x) + \sum_n \frac{c_j^{(n)}}{a_j} \varphi_{ij}^{(n)}(x) - i k_{ij}(x, x) = 0, \quad i \neq j \quad (6.7)$$

и дополнительными условиями

$$k_{ij}(x, x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty, \quad k_{ij}(x, y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \pm\infty, \quad (6.8)$$

и, во-вторых, если $\varphi_{ij}^{(n)}(x)$ являются решениями задачи

$$i a_i \frac{\partial \varphi_{ij}^{(n)}}{\partial x} + \sum_k (a_i - a_k) Q_{ik}(x) \varphi_{kj}^{(n)}(x) = \gamma_j^{(n)} \left(1 - \frac{a_i}{a_j}\right) \varphi_{ij}^{(n)}(x), \quad (6.9)$$

$$\varphi_{ij}^{(n)}(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$\varphi_{ij}^{(n)}(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad i \neq j.$$

Условия (6.6) - (6.9) проверяются непосредственной подстановкой выражения (6.5) в систему (6.2).

Отметим, что если в (6.5) $\alpha_j = 1$ или $\alpha_j = 0$ и $a_j > 0$, то $\zeta_{ij}(x, \lambda)$ аналитичны, соответственно, при $\text{Im} \lambda < 0$ и $\text{Im} \lambda > 0$ за исключением тех точек этих областей, где $\lambda = \gamma_j^{(n)}$.

Решая задачу (6.6) - (6.8) методом Фурье

$$k_{ij}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{ij}(x, \lambda) e^{-i \frac{\lambda}{a_j} z} d\lambda, \quad z = x - y \quad (6.10)$$

получаем систему уравнений на $k_{ij}(x, \lambda)$:

$$i a_i \frac{\partial k_{ij}(x, \lambda)}{\partial x} + \sum_k (a_i - a_k) Q_{ik}(x) k_{kj}(x, \lambda) = \lambda \left(1 - \frac{a_i}{a_j}\right) k_{ij}(x, \lambda), \quad (6.11)$$

причём, ввиду (6.), (6.10)

$$k_{ij}(x, \lambda) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (6.12)$$

Сравнивая (6.11) с (6.2) убеждаемся, что решение задачи (6.11), (6.2) может быть представлено в виде

$$K_{ij}(x, \lambda) = \sum_{l \neq j} C_{je}(\lambda) \varphi_{ie}(x, \lambda) e^{i\lambda(\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_e})x} \quad (6.13)$$

В соответствии с общей схемой метода Фурье входящие сюда величины $C_{je}(\lambda)$ должны быть определены из "начального условия" (6.7).

Поясним теперь происхождение дискретной суммы в (6.5). В выражение (6.10), вообще говоря, должна быть добавлена сумма $\sum K_{ij}^{(n)}(x) e^{-i\frac{\gamma_j^{(n)}}{a_j}(x-y)}$; входящие сюда $K_{ij}^{(n)}(x)$ являются решениями задачи (6.9), которая имеет решения лишь при комплексных $\gamma_j^{(n)}$. При этом, однако, по крайней мере один из входящих в (6.5) интегралов от $K_{ij}(x, y)$ становится расходящимся, что немедленно лишило бы представление (6.5) какого-либо смысла, если соответствующий множитель перед этим интегралом (α_j или $1-\alpha_j$) не равен нулю. Добавление же дискретной суммы в (6.5) и, тем самым, в (6.7) позволяет исключить из "начального условия" (6.7) задачи (6.8) вклады, приводящие к экспоненциальному росту $K_{ij}(x, y)$ при $y \rightarrow \pm\infty$, после чего $K_{ij}(x, y)$ оказываются автоматически удовлетворяющими условию интегрируемости с мнимыми экспонентами (6.8). Если, однако, "собственные значения" задачи (6.9) $\gamma_j^{(n)}$ при данном j лежат в какой-либо одной полуплоскости λ (пусть, для определенности, $\text{Im } \gamma_j^{(n)} > 0$), полагая в (6.5) $\alpha_j = 1$, убеждаемся, что функция

$$\zeta_{ij}(x, \lambda) = \delta_{ij} + \int_x^\infty K_{ij}(x, y) e^{i\frac{\lambda}{a_j}(x-y)} dy + \sum_n \frac{C_j^{(n)} \varphi_{ij}^{(n)}(x)}{\lambda - \gamma_j^{(n)}}$$

аналитична в нижней полуплоскости λ и, следовательно, может быть представлена в виде

$$\zeta_{ij}(x, \lambda) = \delta_{ij} + \int_x^\infty K'_{ij}(x, y) e^{i\frac{\lambda}{a_j}(x-y)} dy$$

где величины $K'_{ij}(x, y)$ удовлетворяют уравнению (6.6) с условиями

$$Q_j(x) - i K'_{ij}(x, x) = 0, \quad i \neq j, \quad K'_{ij}(x, y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty. \quad (6.14)$$

При этом, вообще говоря, вместо (6.10) следует написать

$$K'_{ij}(x, y) = \int_{-\infty}^\infty K_{ij}(x, \lambda) e^{-i\frac{\lambda}{a_j}(x-y)} d\lambda + \sum_n C_j^{(n)} \varphi_{ij}^{(n)}(x) e^{-i\frac{\gamma_j^{(n)}}{a_j}(x-y)} \quad (6.15)$$

Нетрудно убедиться подставляя (6.15) в (6.14) и сравнивая с (6.7), что $C_j^{(n)} = -i C_j^{(n)} / a_j$.

Входящие в (6.13) величины $C_{je}(\lambda)$, определяющие решение задачи (6.6) - (6.8), могут быть выражены в общем случае через матрицу перехода оператора L (3.2). Предварительно, однако, опишем решение задачи (6.9). Используя формулы (5.17) - (5.20) легко видеть, что эти решения есть ($a_3 > 0$):

при $j = 1$

$$\varphi_{ii}^{(n)}(x) = \psi_{ii}^-(x, \gamma_i^{(n)}) e^{i\frac{\gamma_i^{(n)}}{a_1}x}, \quad \tilde{S}_{ii}(\gamma_i^{(n)}) = 0, \quad \text{Im } \gamma_i^{(n)} < 0, \quad (6.16)$$

$$n = 1, \dots, \tilde{N}_1$$

при $j = 2$

$$\varphi_{i2}^{(n)}(x) = \psi_{i1}^+(x, \lambda_n) e^{i \frac{\lambda_n}{a_2} x} \equiv \chi_{i2}^{(n)}(x), \quad S_{ii}(\lambda_n) = 0, \quad \forall_m \lambda_n > 0, \quad (6.17)$$

$$n = 1, \dots, N_1$$

и

$$\varphi_{i2}^{(n)}(x) = \psi_{i3}^+(x, \mu_n) e^{i \frac{\mu_n}{a_2} x} \equiv \theta_{i2}^{(n)}(x), \quad S_{33}(\mu_n) = 0, \quad \forall_m \mu_n < 0, \quad (6.18)$$

$$n = 1, \dots, N_3,$$

при $j = 3$

$$\varphi_{i3}^{(n)}(x) = \psi_{i3}^-(x, \gamma_n^{(n)}) e^{i \frac{\gamma_n^{(n)}}{a_3} x}, \quad \tilde{S}_{33}(\gamma_n^{(n)}) = 0, \quad \forall_m \gamma_n^{(n)} > 0 \quad (6.19)$$

$$n = 1, \dots, \tilde{N}_3$$

Можно, кроме того, показать, что если нули элементов матриц перехода $S_{ii}(\lambda)$, $\tilde{S}_{ii}(\lambda)$, $S_{33}(\lambda)$, $\tilde{S}_{33}(\lambda)$ — простые, что мы и будем предполагать в дальнейшем, то совокупность функций (6.16)–(6.19) исчерпывает множество решений задачи (6.9) при $a_3 > 0$.

Если же $a_3 < 0$, то при $j = 3$ рассматриваемая задача не имеет решений кроме тривиального, а решение с $j = 1, 2$ могут быть выбраны в виде:

При $j = 1$

$$\varphi_{i1}^{(n)}(x) = \psi_{i2}^+(x, \lambda_n) e^{i \frac{\lambda_n}{a_1} x}, \quad S_{22}(\lambda_n) = 0, \quad \forall_m \lambda_n < 0, \quad (6.20)$$

$$n = 1, \dots, N$$

При $j = 2$

$$\varphi_{i2}^{(n)}(x) = \psi_{i2}^-(x, \gamma_n) e^{i \frac{\gamma_n}{a_2} x}, \quad \tilde{S}_{22}(\gamma_n) = 0, \quad \forall_m \gamma_n > 0, \quad (6.21)$$

$$n = 1, \dots, \tilde{N}$$

Формулы (6.16) – (6.21) справедливы в общем случае оператора L (3.2). При вложениях же (3.5), (3.6) диагональные элементы матриц S , \tilde{S} связаны соотношениями (5.11), (5.14), т.е.

$$\tilde{S}_{ii}(\lambda) = S_{ii}^*(\lambda^*) \quad (6.22)$$

Из (6.22) немедленно следует, что в формулах (6.16) – (6.21) $N_i = \tilde{N}_i$, $\gamma_i^{(n)} = \lambda_n^*$, $\gamma_3^{(n)} = \mu_n^*$.

Для определения величин $c_{ij}(\lambda)$, $c_{ij}^{(n)}$ сравним асимптотики обобщенных функций Йоста (6.5) при $x \rightarrow \pm \infty$. Для этого заметим, во-первых, что решения задачи (6.6)–(6.9) при $x \rightarrow \pm \infty$ сосредоточены вблизи характеристик системы (6.6), т.е. при $|x| \rightarrow \infty$

$$k_{ij}(x, y) \rightarrow k_{ij}^{\pm} \left(\frac{x}{a_i} - \frac{y}{a_i} \right), \quad k_{ij}^{\pm}(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty$$

Имея также ввиду (6.8) находим, что при $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} z_{ij}(x, \lambda) &\approx \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \alpha_j \theta \left(\frac{a_j}{a_i} - 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} k_{ij}^+(x, y) e^{i \frac{\lambda}{a_j} (x-y)} dy \\ &- (1 - \alpha_j) (1 - \delta_{ij}) \theta \left(1 - \frac{a_j}{a_i} \right) \int_{-\infty}^{\infty} k_{ij}^+(x, y) e^{i \frac{\lambda}{a_j} (x-y)} dy = \end{aligned}$$

$$= \delta_{ij} + 2\pi a_j (1 - \delta_{ij}) k_{ij}^+(x, \lambda) \left\{ \alpha_j \theta\left(\frac{a_j}{a_i} - 1\right) - (1 - \alpha_j) \theta\left(1 - \frac{a_j}{a_i}\right) \right\}.$$

Подставляя сюда асимптотику $k_{ij}^+(x, \lambda)$ из (6.12):

$$k_{ij}^+(x, \lambda) = c_{ji}(\lambda) e^{i\lambda\left(\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_i}\right)x} (1 - \delta_{ij})$$

получим

$$\begin{aligned} \zeta_{ij}(x, \lambda) &= \delta_{ij} + 2\pi a_j (1 - \delta_{ij}) c_{ji}(\lambda) \exp\left[i\lambda\left(\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_i}\right)x\right] \times \\ &\times \left\{ \alpha_j \theta\left(\frac{a_j}{a_i} - 1\right) - (1 - \alpha_j) \theta\left(1 - \frac{a_j}{a_i}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Как и всякое решение системы (6.2), $\zeta_{ij}(x, \lambda)$ может быть единственным образом разложено по функциям $\Phi_{ij}(x, \lambda)$ (6.4). Коэффициенты такого разложения определяются асимптотикой $\zeta_{ij}(x, \lambda)$, т.е. (6.24). Т.о.

$$\begin{aligned} \zeta_{ij}(x, \lambda) &= \Phi_{ij}(x, \lambda) + 2\pi a_j \sum_{e \neq j} \left\{ \alpha_j \theta\left(\frac{a_j}{a_e} - 1\right) - (1 - \alpha_j) \theta\left(1 - \frac{a_j}{a_e}\right) \right\} \times \\ &\times c_{je}(\lambda) \Phi_{ie}(x, \lambda) \exp\left[i\lambda\left(\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_e}\right)x\right]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Асимптотика $\zeta_{ij}(x, \lambda)$ при $x \rightarrow -\infty$ может быть найдена непосредственно из (6.25) (см. (6.4), (3.9)):

$$\begin{aligned} \zeta_{ij}(x, \lambda) \Big|_{x \rightarrow -\infty} &= \left\{ S_{ij}(\lambda) + 2\pi a_j \sum_{e \neq j} \left\{ \alpha_j \theta\left(\frac{a_j}{a_e} - 1\right) - (1 - \alpha_j) \theta\left(1 - \frac{a_j}{a_e}\right) \right\} \times \right. \\ &\left. \times c_{je}(\lambda) S_{ie}(\lambda) \right\} \exp\left[i\lambda\left(\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_i}\right)x\right]. \end{aligned} \quad (6.26)$$

С другой стороны, эта же асимптотика может быть определена из (6.5), (6.10). При $x \rightarrow -\infty$ функции $\varphi_{ij}^{(n)}(x)$, ввиду (6.9), имеют своими пределами

$$\varphi_{ij}^{(n)}(x) \Big|_{x \rightarrow -\infty} = \delta_{ij} \eta_j^{(n)},$$

величины $\eta_j^{(n)}$ находятся из формул (6.16)–(6.21). Из (6.5) имеем:

$$\begin{aligned} \zeta_{ij}(x, \lambda) &= \delta_{ij} + \alpha_j \delta_{ij} \int_x^\infty k_{jj}^-(x, y) e^{i\frac{\lambda}{a_j}(x-y)} dy - (1 - \alpha_j) \delta_{ij} \int_{-\infty}^x k_{jj}^- e^{i\frac{\lambda}{a_j}(x-y)} dy \\ &+ \delta_{ij} \sum_n \frac{\varphi_j^{(n)} \eta_j^{(n)}}{\lambda - \gamma_j^{(n)}} + 2\pi a_j (1 - \delta_{ij}) \left\{ \alpha_j \theta\left(1 - \frac{a_j}{a_i}\right) - (1 - \alpha_j) \theta\left(\frac{a_j}{a_i} - 1\right) \right\} k_{ij}^-(x, \lambda) \end{aligned}$$

Подставляя сюда $K_{ij}^-(x, \lambda)$ из (6.13) и производя интегрирование, получим:

$$Z_{ij}(x, \lambda) = \delta_{ij} \left\{ 1 + \sum_n \frac{c_j^{(n)} \gamma_j^{(n)}}{\lambda - \gamma_j^{(n)}} + i a_j \alpha_j \int \frac{\sum_{e \neq j} S_{je}(\lambda') c_{je}(\lambda') d\lambda'}{\lambda' - \lambda + \text{sgn} a_j \cdot i0} + \right. \\ \left. + i a_j (1 - \alpha_j) \int \frac{\sum_{e \neq j} S_{je}(\lambda') c_{je}(\lambda') d\lambda'}{\lambda' - \lambda - \text{sgn} a_j \cdot i0} \right\} + \quad (6.27)$$

$$+ 2\pi a_j (1 - \delta_{ij}) \left\{ \alpha_j \theta\left(1 - \frac{a_j}{a_i}\right) - (1 - \alpha_j) \theta\left(\frac{a_j}{a_i} - 1\right) \right\} \sum_{e \neq j} c_{je}(\lambda) S_{ie}(\lambda) e^{i\lambda\left(\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_i}\right)x}$$

Сравнивая теперь (6.26) с (6.27) находим:

(6.28)

$$S_{ij} + 2\pi a_j \sum_{e \neq j} \theta\left(\frac{a_j}{a_e} - 1\right) c_{je}(\lambda) S_{ie} = 2\pi a_j \sum_{e \neq j} \theta\left(1 - \frac{a_j}{a_i}\right) c_{je}(\lambda) S_{ie}$$

при $i \neq j$ и

$$1 - S_{jj} + \sum_n \frac{S_j^{(n)} \gamma_j^{(n)}}{\lambda - \gamma_j^{(n)}} + \pi a_j \sum_{e \neq j} \left[\theta\left(1 - \frac{a_j}{a_e}\right) - \theta\left(\frac{a_j}{a_e} - 1\right) \right] c_{je} S_{je} \\ + i a_j \int \frac{d\lambda'}{\lambda' - \lambda} \sum_{e \neq j} S_{je}(\lambda') c_{je}(\lambda') = 0 \quad \text{при } i=j. \quad (6.29)$$

Система алгебраических уравнений (6.28) однозначно определяет $c_{je}(\lambda)$. Её решения имеют вид

$$c_{1e}(\lambda) = \frac{1}{2\pi a_e} \frac{\tilde{S}_{1e}(\lambda)}{\tilde{S}_{11}(\lambda)}, \quad c_{3e}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi a_e} \frac{\tilde{S}_{3e}(\lambda)}{\tilde{S}_{33}(\lambda)}, \quad (6.30)$$

$$c_{21}(\lambda) = \frac{1}{2\pi a_2} \frac{S_{12}(\lambda)}{S_{11}(\lambda)}, \quad c_{23}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi a_2} \frac{S_{32}(\lambda)}{S_{33}(\lambda)}$$

при $a_3 > 0$. Если же $a_3 < 0$, $a_{1,2} > 0$, то

(6.31)

$$c_{12}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi a_1} \frac{S_{21}(\lambda)}{S_{22}(\lambda)}, \quad c_{13}(\lambda) = \frac{1}{2\pi a_1} \frac{S_{31}(\lambda)}{S_{33}(\lambda)},$$

$$c_{2e}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi a_e} \frac{\tilde{S}_{2e}(\lambda)}{\tilde{S}_{22}(\lambda)}, \quad c_{3e}(\lambda) = \frac{1}{2\pi a_e} \frac{\tilde{S}_{3e}(\lambda)}{\tilde{S}_{33}(\lambda)}$$

Уравнения (6.29) позволяют, зная $c_{je}(\lambda)$, определить $c_j^{(n)}$. При $a_3 > 0$

$$c_1^{(n)} = \frac{1}{\tilde{S}'_{11}(\gamma_1^{(n)})} \quad (\tilde{S}_{11}(\gamma_1^{(n)}) = 0), \quad (6.32)$$

$$c_3^{(n)} = \frac{1}{\tilde{S}_{33}'(\chi_3^{(n)})}, \quad (\tilde{S}_{33}(\chi_3^{(n)}) = 0)$$

$$c_\chi^{(n)} = \frac{1}{S_{21}(\lambda_n)} \frac{\tilde{S}_{33}(\lambda_n)}{S_{11}'(\lambda_n)}, \quad (S_{11}(\lambda_n) = 0)$$

$$c_\theta^{(n)} = \frac{1}{S_{23}(\mu_n)} \frac{\tilde{S}_{11}(\mu_n)}{S_{33}'(\mu_n)}, \quad (S_{33}(\mu_n) = 0)$$

Здесь c_χ и c_θ — это, соответственно, коэффициенты в (6.5) при $\chi_{i2}^{(n)}(x)$ (6.17) и $\theta_{i2}^{(n)}(x)$ (6.18).
В случае $a_3 < 0$

$$c_1^{(n)} = \frac{1}{S_{12}(\lambda_n)} \frac{\tilde{S}_{33}(\lambda_n)}{S_{22}'(\lambda_n)}, \quad (S_{22}(\lambda_n) = 0) \quad (6.33)$$

$$c_2^{(n)} = \frac{1}{\tilde{S}_{22}'(\chi_2^{(n)})}, \quad (\tilde{S}_{22}(\chi_2^{(n)}) = 0).$$

§ 7. Уравнения обратной задачи

Результаты предыдущего параграфа позволяют перейти к изучению обратной спектральной задачи для оператора L (3.2), т.е. к задаче об определении $Q_{ik}(x)$ по данным S_{ik}, \tilde{S}_{ik} , а также наборам величин $c_j^{(n)}$. Ниже будут получены уравнения, позволяющие находить все функции Йоста по "данным рассеяния". Эти уравнения могут быть получены либо непосредственно на функции Йоста $\Phi_{ij}(x, \lambda)$, либо на функции $K_{ij}(x, y)$, определяющие обобщенные функции Йоста.

Рассмотрим сначала случай $a_3 > 0$. Положим, для удобства, в выражении (6.5) $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = 1$. (6.25) при этом показывает, что

$$Z_{i1}(x, \lambda) = \Phi_{i1}(x, \lambda), \quad Z_{i3}(x, \lambda) = \Phi_{i3}(x, \lambda) \quad (7.1)$$

Определенные таким образом $Z_{i1}(x, \lambda), Z_{i3}(x, \lambda)$, ввиду (6.5) аналитичны при $Y_m \lambda > 0$ и $Y_m \lambda < 0$ соответственно. Сравнивая (6.4) с (6.17) (6.18) находим

$$\chi_{i2}^{(n)}(x) = Z_{i1}(x, \lambda_n) e^{i\lambda_n \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)x} \quad (7.2)$$

$$\theta_{i2}^{(n)}(x) = Z_{i3}(x, \mu_n) e^{i\mu_n \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right)x} \quad (7.3)$$

где λ_n, μ_n — нули $S_{11}(\lambda), S_{33}(\lambda)$ соответственно. При $j=2$ рассмотрим две функции $Z_{i2}^{(1,0)}(x, \lambda)$ (6.5) с $\alpha_2 = 1$ и $\alpha_2 = 0$. Воспользовавшись (6.25), (6.30) находим:

$$Z_{i2}^{(n)}(x, \lambda) = \Phi_{i2}(x, \lambda) - \frac{S_{32}(\lambda)}{S_{33}(\lambda)} \Phi_{i3}(x, \lambda) e^{i\lambda \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right)x} \quad (7.4)$$

$$\zeta_{i2}^{(0)}(x, \lambda) = \Phi_{i2}(x, \lambda) - \frac{S_{i2}(\lambda)}{S_{ii}(\lambda)} \Phi_{i4}(x, \lambda) e^{i\lambda \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)x} \quad (7.5)$$

Как следует из (6.5), $\zeta_{i2}^{(1)}(x, \lambda)$ аналитична в нижней полуплоскости λ за исключением точек $\lambda = \mu_n$, где она имеет, вообще говоря, простые полюсы. При $\lambda \rightarrow -\infty$ $\zeta_{i2}^{(1)}(x, \lambda)$ имеет асимптотику

$$\zeta_{i2}^{(1)}(x, \lambda) \approx \frac{S_{i2}(\lambda)S_{33}(\lambda) - S_{i3}(\lambda)S_{32}(\lambda)}{S_{33}(\lambda)} e^{i\lambda \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)x}$$

Или, используя (5.6) и восстанавливая $\zeta_{i2}^{(1)}(x, \lambda)$ по её левой асимптотике,

$$\zeta_{i2}^{(1)}(x, \lambda) = -\frac{a_2}{a_1} \frac{\tilde{S}_{21}(\lambda)}{S_{33}(\lambda)} \psi_{i4}^-(x, \lambda) e^{i\frac{\lambda}{a_2}x} + \frac{\tilde{S}_{ii}(\lambda)}{S_{33}(\lambda)} \psi_{i2}^-(x, \lambda) e^{i\frac{\lambda}{a_2}x}$$

Т.о. в нулях $\tilde{S}_{ii}(\lambda)$

$$\varphi_{i1}^{(n)}(x) = -\frac{a_1}{a_2} \frac{S_{33}(\gamma_1^{(n)})}{\tilde{S}_{21}(\gamma_1^{(n)})} \zeta_{i2}^{(1)}(x, \gamma_1^{(n)}) e^{i\gamma_1^{(n)} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)x} \quad (7.6)$$

Совершенно аналогично находим, что

$$\zeta_{i2}^{(0)}(x, \lambda) = \frac{\tilde{S}_{33}(\lambda)}{S_{ii}(\lambda)} \psi_{i2}^-(x, \lambda) e^{i\frac{\lambda}{a_2}x} - \frac{a_2}{a_3} \frac{\tilde{S}_{23}(\lambda)}{S_{ii}(\lambda)} \psi_{i3}^-(x, \lambda) e^{i\frac{\lambda}{a_2}x}$$

и если $\tilde{S}_{33}(\lambda) = 0$, то

$$\varphi_{i3}^{(n)}(x) = -\frac{a_3}{a_2} \frac{S_{ii}(\gamma_3^{(n)})}{\tilde{S}_{23}(\gamma_3^{(n)})} \zeta_{i2}^{(0)}(x, \gamma_3^{(n)}) e^{i\gamma_3^{(n)} \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2}\right)x} \quad (7.7)$$

Подставляя теперь в $\zeta_{ii}(x, \lambda)$ (6.5) $K_{ii}(x, y) = \int k_{ii}(x, \lambda) e^{-i\frac{\lambda(x-y)}{a_1}} d\lambda$

и учитывая, что ввиду аналитичности $\zeta_{ii}(x, \lambda)$ при $\text{Im} \lambda > 0$, для вещественных λ $\zeta_{ii}(x, \lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta_{ii}(x, \lambda + i\varepsilon)$, находим

$$\zeta_{ii}(x, \lambda) = \delta_{ii} + ia_1 \int_{-\infty}^{\infty} K_{i4}(x, \lambda') \frac{d\lambda'}{\lambda' - \lambda - i0} + \sum_n \frac{c_i^{(n)} \varphi_{ii}^{(n)}(x)}{\lambda - \gamma_i^{(n)}}$$

Используя (6.13), получаем окончательно:

$$\zeta_{ii}(x, \lambda) = \Phi_{ii}(x, \lambda) = \delta_{ii} + ia_1 \sum_{\ell \neq i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' \frac{c_{i\ell}(\lambda') \Phi_{i\ell}(x, \lambda') e^{i\lambda' \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_\ell}\right)x}}{\lambda' - \lambda - i0} + \sum_n \frac{c_i^{(n)} \varphi_{ii}^{(n)}(x)}{\lambda - \gamma_i^{(n)}} \quad (7.8)$$

Точно также

$$\zeta_{i3}(x, \lambda) = \Phi_{i3}(x, \lambda) = \delta_{i3} + ia_3 \sum_{\ell \neq 3} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' \frac{c_{3\ell}(\lambda') \Phi_{i\ell}(x, \lambda') e^{i\lambda'(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_\ell})x}}{\lambda' - \lambda + i0} +$$

$$+ \sum_n \frac{c_3^{(n)} \varphi_{i3}^{(n)}(x)}{\lambda - \gamma_3^{(n)}} \quad (7.9)$$

Аналогичная процедура для $\zeta_{i2}^{(0)}(x, \lambda)$ даёт

$$\zeta_{i2}^{(0)}(x, \lambda) = \Phi_{i2}(x, \lambda) - \frac{S_{i2}(\lambda)}{S_{ii}(\lambda)} \Phi_{ii}(x, \lambda) e^{i\lambda(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_i})x} =$$

$$= \delta_{i2} + \sum_n \frac{c_x^{(n)} \chi_{i2}^{(n)}(x)}{\lambda - \lambda_n} + \sum_n \frac{c_0^{(n)} \theta_{i2}^{(n)}(x)}{\lambda - \mu_n} +$$

$$+ ia_2 \sum_{\ell \neq 2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' \frac{c_{2\ell}(\lambda') \Phi_{i\ell}(x, \lambda') e^{i\lambda'(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_\ell})x}}{\lambda' - \lambda - i0} \quad (7.10)$$

Подставляя в (7.8), (7.9) $\lambda = \lambda_n$, $\lambda = \mu_n$ получим

$$\zeta_{ii}(x, \lambda_n) = \delta_{ii} + \sum_m \frac{c_1^{(m)} \varphi_{ii}^{(m)}(x)}{\lambda_n - \gamma_1^{(m)}} +$$

$$+ ia_1 \sum_{\ell \neq 1} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{c_{i\ell}(\lambda) \Phi_{i\ell}(x, \lambda) e^{i\lambda(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_\ell})x}}{\lambda - \lambda_n} \quad (7.11)$$

$$\zeta_{i3}(x, \mu_n) = \delta_{i3} + \sum_m \frac{c_3^{(m)} \varphi_{i3}^{(m)}(x)}{\mu_n - \gamma_3^{(m)}} +$$

$$+ ia_3 \sum_{\ell \neq 3} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{c_{3\ell}(\lambda) \Phi_{i\ell}(x, \lambda) e^{i\lambda(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_\ell})x}}{\lambda - \mu_n} \quad (7.12)$$

Используя (7.10) и аналогичное выражение для $\zeta_{i2}^{(1,0)}(x, \lambda)$, находим:

$$\zeta_{i2}^{(0)}(x, \gamma_3^{(n)}) = \delta_{i2} + \sum_m \frac{c_x^{(m)} \chi_{i2}^{(m)}(x)}{\gamma_3^{(n)} - \lambda_m} + \sum_m \frac{c_0^{(m)} \theta_{i2}^{(m)}(x)}{\gamma_3^{(n)} - \mu_m} +$$

$$+ ia_2 \sum_{\ell \neq 2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{c_{2\ell}(\lambda) \Phi_{i\ell}(x, \lambda) e^{i\lambda(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_\ell})x}}{\lambda - \gamma_3^{(n)}} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{i2}^{(n)}(x, \gamma_1^{(n)}) &= \delta_{i2} + \sum_m \frac{c_{\chi}^{(m)} \chi_{i2}^{(m)}(x)}{\gamma_1^{(n)} - \lambda_m} + \sum_m \frac{c_{\theta}^{(m)} \theta_{i2}^{(m)}(x)}{\gamma_1^{(n)} - \mu_m} + \\ &+ i a_2 \sum_{e \neq 2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{c_{2e}(\lambda) \Phi_{ie}(x, \lambda) e^{i\lambda(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_e})x}}{\lambda - \gamma_1^{(n)}} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Соотношения (7.1)-(7.3), (7.6)-(7.14), Рассматриваемые как система уравнений на величины $\Phi_{ie}(x, \lambda)$, $\varphi_{ij}^{(n)}(x)$ позволяют однозначно определить последние по данным $c_j^{(n)}$, $c_{je}(\lambda)$, связь которых с матрицей перехода S следует из (6.30), (6.32), т.о. приведенные уравнения представляют собой полную систему уравнений обратной спектральной задачи для оператора L (3.2) в случае $a_3 > 0$. При этом, ввиду (6.7)

$$Q_{ij}(x) = i \sum_{e \neq j} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda c_{je}(\lambda) \Phi_{ie}(x, \lambda) e^{i\lambda(\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_e})x} - \sum \frac{c_j^{(n)}}{a_j} \varphi_{ij}^{(n)}(x) \quad (7.15)$$

При вложениях (3.5), (6.6) в уравнения обратной задачи следует положить $\gamma_1^{(n)} = \lambda_n^*$, $\gamma_3^{(n)} = \mu_n^*$, а в выражения (6.30), (6.32) подставить $\tilde{S}(\lambda)$ из (5.11) или (5.14).

При этом если среди величин λ_n , $n=1, \dots, N_1$, μ_n^* , $n=1, \dots, N_3$ есть равные, т.е. для некоторых $\lambda_n = \mu_n^*$, то уравнения обратной задачи должны быть переписаны в несколько ином виде. Прежде всего заметим, что ввиду соотношения (5.6), продолженного в комплексную плоскость,

$$\frac{\tilde{S}_{33}(\lambda_n)}{S_{21}(\lambda_n)} = -S_{12}(\lambda_n), \quad \frac{\tilde{S}_{11}(\mu_n)}{S_{23}(\mu_n)} = -S_{32}(\mu_n), \quad (7.16)$$

$$\frac{S_{33}(\gamma_1^{(n)})}{\tilde{S}_{21}(\gamma_1^{(n)})} = -\tilde{S}_{12}(\gamma_1^{(n)}), \quad \frac{S_{11}(\gamma_3^{(n)})}{\tilde{S}_{23}(\gamma_3^{(n)})} = -\tilde{S}_{32}(\gamma_3^{(n)})$$

Очевидно, далее, что случай совпадения некоторых из нулей S_{11} и $\tilde{S}_{33}(\lambda)$ может быть получен предельным переходом $\lambda_n \rightarrow \mu_n^*$. Перенумеруем нули $S_{11}(\lambda)$ и $\tilde{S}_{33}(\lambda)$ так, что $\mu_i^* = \lambda_i$, $i = 1, \dots, M$, $M \leq N_1, N_3$; при этом мы будем считать, что среди оставшихся λ_i , $i = M+1, \dots, N_1$ и μ_i^* , $i = M+1, \dots, N_3$ нет совпадающих. Заметим, еще, что если $S_{11}(\lambda_i) = \tilde{S}_{33}(\lambda_i) = 0$, то как следует из (5.6), $S_{21}(\lambda_i)S_{12}(\lambda_i) = 0$, $\tilde{S}_{23}(\lambda_i)\tilde{S}_{32}(\lambda_i) = 0$. При этом нетрудно убедиться, что если $S_{21}(\lambda_i) = 0$, то и $\tilde{S}_{32}(\lambda_i) = 0$ и если $\tilde{S}_{23}(\lambda_i) = 0$, то $S_{12}(\lambda_i) = 0$. Т.о. при совпадении нулей $S_{12}(\lambda_i)\tilde{S}_{32}(\lambda_i) = 0$. В наборе λ_i , $i = 1, \dots, M$ занумеруем λ_i таким образом, что для $i = 1, \dots, M_1$ $S_{12}(\lambda_i) = \tilde{S}_{32}(\lambda_i) = 0$, для $i = M_1+1, \dots, M_2$, $S_{12}(\lambda_i) = 0$, $\tilde{S}_{32}(\lambda_i) \neq 0$ и, наконец, для $i = M_2+1, \dots, M$ $S_{12}(\lambda_i) \neq 0$, $\tilde{S}_{32}(\lambda_i) = 0$.

Имея также ввиду соотношения

$$\tilde{S}_{12}(\lambda) S_{32}(\lambda) = -\frac{a_2}{a_1} \tilde{S}_{11}(\lambda) S_{31}(\lambda) - \frac{a_2}{a_3} \tilde{S}_{13}(\lambda) S_{33}(\lambda), \quad (7.17)$$

$$\tilde{S}_{32}(\lambda) S_{12}(\lambda) = -\frac{a_2}{a_1} \tilde{S}_{31}(\lambda) S_{11}(\lambda) - \frac{a_2}{a_3} \tilde{S}_{33}(\lambda) S_{13}(\lambda) \quad (7.18)$$

и воспользовавшись (7.16) нетрудно убедиться, что для $n = 1, \dots, M_2$

$$\varphi_{i1}^{(n)}(x) = \frac{a_1}{a_3} e^{i\lambda_n^* \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)x} \sim S_{i3}(\lambda_n^*) \theta_{i2}^{(n)}(x) \quad (7.19)$$

для $n = M_2 + 1, \dots, M$

$$\begin{aligned} \varphi_{i1}^{(n)}(x) &= \frac{a_1}{a_3} e^{i\lambda_n^* \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)x} \sim S_{i3}(\lambda_n^*) \theta_{i2}^{(n)}(x) + \\ &+ \frac{a_1}{a_2} \tilde{S}_{i2}(\lambda_n^*) e^{i\lambda_n^* \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)x} \left\{ \delta_{i2} - \sum_{m=M_2+1}^{N_1} \frac{S_{i2}(\lambda_m)}{S_{ii}'(\lambda_m)} \frac{\chi_{i2}^{(m)}(x)}{\lambda_n^* - \lambda_m} \right. \\ &- \sum_{m=M_1+1}^{M_2} \frac{S_{32}(\lambda_m^*)}{S_{33}'(\lambda_m^*)} \frac{\theta_{i2}^{(m)}(x)}{\lambda_n^* - \lambda_m} - \sum_{m=M+1}^{N_3} \frac{S_{32}(\mu_m)}{S_{33}'(\mu_m)} \frac{\theta_{i2}^{(m)}(x)}{\lambda_n^* - \mu_m} + \\ &\left. + i a_2 \sum_{\ell \neq 2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' \frac{c_{2\ell}(\lambda') \Phi_{i\ell}(x, \lambda') \exp(i\lambda' \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_\ell}\right)x)}{\lambda' - \lambda_n^*} \right\}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

и, наконец, для $n = M+1, \dots, N_1$

$$\begin{aligned} \varphi_{i1}^{(n)}(x) &= \frac{a_1}{a_2} \tilde{S}_{i2}(\lambda_n^*) e^{i\lambda_n^* \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)x} \left\{ \delta_{i2} - \sum_{m=M_2+1}^{N_1} \frac{S_{i2}(\lambda_m)}{S_{ii}'(\lambda_m)} \frac{\chi_{i2}^{(m)}(x)}{\lambda_n^* - \lambda_m} \right. \\ &- \sum_{m=M_1+1}^{M_2} \frac{S_{32}(\lambda_m^*)}{S_{33}'(\lambda_m^*)} \frac{\theta_{i2}^{(m)}(x)}{\lambda_n^* - \lambda_m} - \sum_{m=M+1}^{N_3} \frac{S_{32}(\mu_m)}{S_{33}'(\mu_m)} \frac{\theta_{i2}^{(m)}(x)}{\lambda_n^* - \mu_m} + \\ &\left. + i a_2 \sum_{\ell \neq 2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{c_{2\ell}(\lambda) \Phi_{i\ell}(x, \lambda) \exp[i\lambda \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_\ell}\right)x]}{\lambda - \lambda_n^*} \right\}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Аналогично для $n = 1, \dots, M_1$, $n = M_2 + 1, \dots, M$

$$\varphi_{i3}^{(n)}(x) = - \frac{\tilde{S}_{33}'(\lambda_n)}{S_{ii}'(\lambda_n)} S_{i3}(\lambda_n) e^{i\lambda_n \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2}\right)x} \chi_{i2}^{(n)}(x); \quad (7.22)$$

для $n = M_1 + 1, \dots, M_2$

$$\begin{aligned} \varphi_{i3}^{(n)}(x) &= - \frac{\tilde{S}_{33}'(\lambda_n)}{S_{ii}'(\lambda_n)} S_{i3}(\lambda_n) e^{i\lambda_n \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2}\right)x} \chi_{i2}^{(n)}(x) + \\ &+ \frac{a_3}{a_2} \tilde{S}_{32}(\lambda_n) e^{i\lambda_n \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2}\right)x} \left\{ \delta_{i2} - \sum_{m=M_2+1}^{N_1} \frac{S_{i2}(\lambda_m)}{S_{ii}'(\lambda_m)} \frac{\chi_{i2}^{(m)}(x)}{\lambda_n - \lambda_m} - \right. \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=M_1+1}^{M_2} \frac{S_{32}(\lambda_m^*)}{S_{33}'(\lambda_m^*)} \frac{\Theta_{i2}^{(n)}(x)}{\lambda_n - \lambda_m^*} - \sum_{n=M+1}^{N_3} \frac{S_{32}(\mu_n)}{S_{33}'(\mu_n)} \frac{\Theta_{i2}^{(n)}(x)}{\lambda_n - \mu_n} + \\
& + i a_2 \sum_{\ell \neq 2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{c_{2e}(\lambda) \Phi_{ie}(x, \lambda) \exp[i\lambda(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_e})x]}{\lambda - \lambda_n} \Bigg\};
\end{aligned}$$

Наконец при $n = M+1, \dots, N_3$

$$\begin{aligned}
\varphi_{i3}^{(n)}(x) = & \frac{a_3}{a_2} \tilde{S}_{32}(\mu_n^*) e^{i\mu_n^*(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2})x} \left\{ \delta_{i2} + \sum_{m=M_2+1}^{N_1} \frac{S_{i2}(\lambda_m)}{S_{i1}'(\lambda_m)} \frac{\chi_{i2}^{(m)}(x)}{\lambda_m - \mu_n^*} \right. \\
& - \sum_{m=M_1+1}^{M_2} \frac{S_{32}(\lambda_m^*)}{S_{33}'(\lambda_m^*)} \frac{\Theta_{i2}^{(m)}(x)}{\mu_n^* - \lambda_m^*} - \sum_{m=M+1}^{N_3} \frac{S_{32}(\mu_m)}{S_{33}'(\mu_m)} \frac{\Theta_{i2}^{(m)}(x)}{\mu_n^* - \mu_m} + \\
& \left. + i a_2 \sum_{\ell \neq 2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{c_{2e}(\lambda) \Phi_{ie}(\lambda) \exp[i\lambda(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_e})x]}{\lambda - \mu_n^*} \right\}.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Уравнения же на $\chi_{i2}^{(n)}(x)$ и $\Theta_{i2}^{(n)}(x)$ одни и те же при всех n :

$$\begin{aligned}
\chi_{i2}^{(n)}(x) = & e^{i\lambda_n(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1})x} \left\{ \delta_{i3} + \sum_{m=1}^{N_1} \frac{1}{\tilde{S}_{i1}'(\lambda_m^*)} \frac{\varphi_{i1}^{(m)}(x)}{\lambda_n - \lambda_m^*} + \right. \\
& \left. + i a_1 \sum_{\ell \neq 1} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{c_{1e}(\lambda) \Phi_{ie}(x, \lambda) \exp[i\lambda(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_e})x]}{\lambda - \lambda_n} \right\},
\end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_{i2}^{(n)}(x) = & e^{i\mu_n(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3})x} \left\{ \delta_{i3} + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{1}{\tilde{S}_{33}'(\mu_m^*)} \frac{\varphi_{i3}^{(m)}(x)}{\mu_n - \mu_m^*} + \right. \\
& \left. + i a_3 \sum_{\ell \neq 3} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{c_{3e}(\lambda) \Phi_{ie}(x, \lambda) \exp[i\lambda(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_e})x]}{\lambda - \mu_n} \right\}.
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Система уравнений (7.19) - (7.26) позволяет выразить функции "дискретного спектра" $\varphi_{ij}^{(n)}(x)$ через "данные рассеяния" и собственные функции непрерывного спектра $\Phi_{ij}(x, \lambda)$. В случае "безотражательного" потенциала $Q_{ij}(x)$, когда $S_{ij}(\lambda) = 0, i \neq j$ при вещественных λ , эта система представляет собой полную систему уравнений обратной задачи, являясь при этом, системой алгебраических уравнений.

Перейдём теперь к случаю $a_3 < 0$. Так же как и выше мы могли бы написать уравнение обратной задачи в форме системы сингулярных интегральных уравнений непосредственно на функции Йоста $\Phi_{ij}(x, \lambda)$. Однако в рассматриваемом случае более удобны уравнения на функции $k_{ij}(x, y)$, определяющие обобщенные функции Йоста (6.5). Выражения (6.20), (6.21) показывают, что

"собственные значения" $\gamma_j^{(n)}$ задачи (6.9) при каждом j сосредоточены в этом случае в какой-либо полуплоскости λ . При этом при $j=1$ они расположены в нижней полуплоскости λ (нули $S_{22}(\lambda)$), а при $j=2$ - в верхней полуплоскости (нули $\tilde{S}_{22}(\lambda)$), т.е. нули $S_{22}^*(\lambda^*)$. При $j=3$ решения задачи (6.9) вообще отсутствуют. Пользуясь отмеченным в § 6 обстоятельством мы можем в (6.5) положить $\alpha_1=0, \alpha_2=\alpha_3=1$ и не писать дискретной суммы:

$$\zeta_{i1}(x, \lambda) = \delta_{i1} - \int_{-\infty}^x k_{i1}(x, y) e^{i \frac{\lambda}{a_1} (x-y)} dy, \quad (7.27)$$

$$\zeta_{i2}(x, \lambda) = \delta_{i2} + \int_x^{\infty} k_{i2}(x, y) e^{i \frac{\lambda}{a_2} (x-y)} dy,$$

$$\zeta_{i3}(x, \lambda) = \delta_{i3} + \int_x^{\infty} k_{i3}(x, y) e^{i \frac{\lambda}{a_3} (x-y)} dy.$$

При этом функции $\zeta_{i1}(x, \lambda)$, $\zeta_{i3}(x, \lambda)$ аналитичны в области $\text{Im} \lambda > 0$, а функция $\zeta_{i2}(x, \lambda)$ аналитична при $\text{Im} \lambda < 0$ и, согласно (6.15)

$$k_{i1}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{i1}(x, \lambda) e^{-i \frac{\lambda}{a_1} (x-y)} d\lambda - i \sum_n \frac{c_1^{(n)}}{a_1} \varphi_{i1}^{(n)}(x) e^{-i \frac{\lambda_n}{a_1} (x-y)} \quad (7.28)$$

$$k_{i2}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{i2}(x, \lambda) e^{-i \frac{\lambda}{a_2} (x-y)} d\lambda - i \sum_n \frac{c_2^{(n)}}{a_2} \varphi_{i2}^{(n)}(x) e^{-i \frac{\lambda_n^*}{a_2} (x-y)} \quad (7.29)$$

$$k_{i3}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{i3}(x, \lambda) e^{-i \frac{\lambda}{a_3} (x-y)} d\lambda, \quad (7.30)$$

а $k_{ij}(x, \lambda)$ связаны с функциями Йоста $\varphi_{ij}(x, \lambda)$ (см. (5.13)), причем $c_{je}(\lambda)$, $c_j^{(n)}$, по-прежнему даются формулами (6.31), (6.33). Используя (6.13), (6.31), (7.28) - (7.30) находим, что

$$\zeta_{i1}(x, \lambda) = \varphi_{i1}(x, \lambda) - \frac{S_{21}(\lambda)}{S_{33}(\lambda)} \varphi_{i3}(x, \lambda) e^{i \lambda (\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}) x}, \quad (7.31)$$

$$\zeta_{i2}(x, \lambda) = \varphi_{i2}(x, \lambda),$$

$$\zeta_{i3}(x, \lambda) = \varphi_{i3}(x, \lambda).$$

В точках верхней полуплоскости, где $\tilde{S}_{22}(\lambda) = 0$

$$\zeta_{i1}(x, \lambda_n^*) = - \frac{a_1}{a_2} \frac{\tilde{S}_{12}(\lambda_n^*)}{S_{33}(\lambda_n^*)} \varphi_{i2}^-(x, \lambda_n^*) e^{i \frac{\lambda_n^*}{a_1} x};$$

сравнивая это соотношение с (6.21) получаем:

$$\varphi_{i2}^{(n)}(x) = - \frac{a_2}{a_1} \frac{S_{33}(\lambda_n^*)}{\tilde{S}_{12}(\lambda_n^*)} e^{i \lambda_n^* (\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}) x} \left\{ \delta_{i1} - \int_{-\infty}^x k_{i1}(x, y) e^{i \frac{\lambda_n^*}{a_1} (x-y)} dy \right\}. \quad (7.32)$$

Сравнивая также вторую из формул (7.31) с (6.20) видим, что

$$\varphi_{ii}^{(n)}(x) = e^{i\lambda_n \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)x} \left\{ \delta_{i2} + \int_x^\infty k_{ie}(x,y) e^{i\frac{\lambda_n}{a_2}(x-y)} dy \right\} \quad (7.33)$$

Объединяя (6.13) и (7.31) мы можем написать

$$K_{ij}(x,\lambda) = \sum_e F_{je}(\lambda) \tilde{S}_{ie}(x,\lambda) e^{i\lambda \left(\frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_e}\right)x}, \quad (7.34)$$

где матрица F_{je} имеет вид:

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 0, & -\frac{1}{a_1} \frac{S_{21}}{S_{22}}, & \frac{1}{a_1} \frac{S_{31}}{S_{33}} \\ -\frac{1}{a_1} \frac{\tilde{S}_{21}}{\tilde{S}_{22}}, & 0, & \frac{1}{a_2} \frac{S_{32}}{\tilde{S}_{33}} \\ \frac{1}{a_1} \frac{\tilde{S}_{31}}{\tilde{S}_{33}}, & \frac{1}{a_2} \frac{\tilde{S}_{32}}{\tilde{S}_{33}}, & \frac{1}{a_1} \frac{S_{31} \tilde{S}_{31}}{S_{33} \tilde{S}_{33}} \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

(Заметим, что при вложении (3.5) матрица F , ввиду (5.11) эрмитова).

Совершая теперь в (7.34) преобразование Фурье и используя (7.28)-(7.30), (7.27) и (7.32), (7.33) получаем уравнение на $K_{ij}(x,y)$:

$$K_{i1}(x,y) = F_{i1}(x,y) + \sum_{e \neq 1} \int_x^\infty k_{ie}(x,z) F_{e1}(z,y) dz, \quad (7.36)$$

$$K_{i2}(x,y) = F_{i2}(x,y) - \int_{-\infty}^x k_{i1}(x,z) F_{12}(z,y) dz + \int_x^\infty k_{i3}(x,z) F_{32}(z,y) dz,$$

$$K_{i3}(x,y) = F_{i3}(x,y) - \int_{-\infty}^x k_{i1}(x,z) F_{13}(z,y) dz + \sum_{e \neq 1} \int_x^\infty k_{ie}(x,z) F_{e3}(z,y) dz,$$

где $F_{ij}(x,y) = \tilde{F}_{ij}\left(\frac{x}{a_i} - \frac{y}{a_j}\right)$, а $\tilde{F}_{ij}(\xi)$ представляется в виде

$$\tilde{F}_{e1} = -\frac{i}{a_1} \delta_{e2} \sum_n \frac{\tilde{S}_{33}(\lambda_n)}{S_{12}(\lambda_n) \tilde{S}_{22}'(\lambda_n)} e^{-i\lambda_n \xi} + \int_{-\infty}^\infty F_{1e}(\lambda) e^{-i\lambda \xi} d\lambda,$$

$$\tilde{F}_{e2} = \frac{i}{a_1} \delta_{e1} \sum_n \frac{\tilde{S}_{33}(\lambda_n^*)}{\tilde{S}_{12}(\lambda_n^*) \tilde{S}_{22}'(\lambda_n^*)} e^{-i\lambda_n^* \xi} + \int_{-\infty}^\infty F_{2e}(\lambda) e^{-i\lambda \xi} d\lambda, \quad (7.37)$$

$$\tilde{F}_{3e} = \int_{-\infty}^\infty F_{3e}(\lambda) e^{-i\lambda \xi} d\lambda.$$

Система уравнений обратной задачи (7.36) имеет вид, аналогичный известному уравнению Марченко, возникающему при рассмотрении обратной спектральной задачи для

оператора Шредингера. Решения (7.36) определяют потенциал $Q_{ij}(x)$ согласно (6.14):

$$Q_{ij}(x) = i K_{ij}(x, x), \quad i \neq j \quad (7.38)$$

§ 8. Распадное взаимодействие. Точные решения

При вложении (3.5), соответствующему распадному взаимодействию, в уравнениях обратной задачи (7.19) - (7.26), (7.8) - (7.10) мы должны положить $\tilde{S}_{ik}(\lambda) = S_{ik}^*(\lambda)$ (см. (5.11)). Продолжая это соотношение в комплексную плоскость, получим $\tilde{S}_{ik}(\lambda_n^*) = S_{ik}^*(\lambda_n)$, что сразу даёт $\tilde{S}_{13}(\lambda_n^*) = S_{13}^*(\lambda_n)$ и т.д.

Уравнения обратной задачи вместе с соотношениями (3.12), (5.21), определяющими зависимость "данных рассеяния" от времени позволяют, в принципе, решать задачу Коши для системы (2.7). Однако уравнения обратной задачи могут быть использованы и как средство получения некоторых точных решений этой системы по данной матрице перехода. Рассмотрение таких решений даёт поучительные примеры поведения решений системы (2.7) и позволяет составить представление о характере решений этой системы вообще.

Рассмотрим случай $a_3 > 0$, т.е. случай "промежуточной" скорости накачки. Простейшая ситуация, в которой уравнения (7.8) - (7.10), (7.19) - (7.26) решаются точно, соответствует, как упоминалось выше, случаю безотражательных потенциалов, когда $S_{je}(\lambda)$ (6.30) тождественно равны нулю при всех λ . При этом решения системы (2.7) полностью определяются положениями нулей функций $S_{11}(\lambda)$ и $S_{33}(\lambda)$, λ_n, μ_n (которые очевидным образом не зависят от времени) и соответствующими величинами $S_{ik}(\lambda_n), S_{ik}(\mu_n)$. Заметим, что условие A -унитарности матрицы перехода (5.12) позволяет в этом случае однозначно восстановить S_{11}, S_{33} по их нулям:

$$S_{11}(\lambda) = \prod_{n=1}^{N_1} \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \lambda_n^*}, \quad S_{33}(\lambda) = \prod_{n=1}^{N_3} \frac{\lambda - \mu_n}{\lambda - \mu_n^*} \quad (8.1)$$

При этом система алгебраических уравнений (7.19)-(7.21) всегда легко решается. Простейшее из всех возможных решений получаются в случаях, когда $S_{11}(\lambda)$ имеет всего один нуль λ , а $S_{33} = 1$ или наоборот. В первом случае уравнения обратной задачи сводятся к системе

$$\begin{aligned} \psi_{i1}(x) &= \frac{a_1}{a_2} S_{12}^*(\lambda_1) e^{i\lambda_1^* (\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2})x} \left\{ \delta_{i2} - \frac{S_{12}(\lambda_1)}{S_{11}'(\lambda_1)} \frac{\chi_{i2}(x)}{\lambda_1^* - \lambda_1} \right\}, \\ \chi_{i2}(x) &= e^{i\lambda_1 (\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1})x} \left\{ \delta_{i1} + \frac{1}{S_{11}'(\lambda_1^*)} \frac{\psi_{i1}(x)}{\lambda_1 - \lambda_1^*} \right\}, \end{aligned}$$

решение которой тривиально находится. Используя (7.15) и подставляя $S_{12}(\lambda, t)$ из (5.21), получаем $Q_{13} = Q_{23} = 0$,

$$Q_{12} = \frac{\lambda_1 - \lambda_1^*}{2\sqrt{a_1 a_2}} \frac{e^{i\frac{\lambda_1 + \lambda_1^*}{2}(x - v_2 t) + i\psi_2}}{\operatorname{ch} \left[i\frac{\lambda_1 - \lambda_1^*}{2} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) (x - v_2 t - x_2^0) \right]} \quad (8.2)$$

$$\text{где } \varphi_2 = \arg S_{12}(\lambda, 0) \quad x_2^0 = \frac{2}{i(\lambda_1 - \lambda_1^*)} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right)^{-1} \ln \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \frac{1}{|S_{12}(\lambda, 0)|} \quad (8.3)$$

Решение (8.2) мы будем называть солитон волны 2.

Аналогично, если $S_{11}(\lambda) \equiv 1$, $S_{33}(\mu) = 0$, то $Q_{12} = Q_{13} = 0$,

$$Q_{23} = \frac{\mu - \mu^*}{2\sqrt{a_2 a_3}} \frac{e^{i \frac{\mu + \mu^*}{2} \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} \right) (x - v_3 t) + i \varphi_3}}{\operatorname{ch} \left[i \frac{\mu - \mu^*}{2} \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} \right) (x - v_3 t - x_3^0) \right]} \quad (8.4)$$

$$\varphi_3 = -\arg S_{32}(\mu, 0), \quad x_3^0 = \frac{2}{i(\mu^* - \mu)} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right)^{-1} \ln \sqrt{\frac{a_2}{a_3}} \frac{1}{|S_{32}(\mu, 0)|}$$

- солитон волны 3.

Решение типа (8.2) или (8.4), но относящееся к волне 1 - накачке, которое мы будем называть солитон накачки, может быть получено из системы (7.19) - (7.21) если положить $S_{11}(\lambda_1) = S_{33}(\lambda_1^*) = 0$, $S_{12}(\lambda_1) = \tilde{S}_{32}(\lambda_1) = 0$:

$$Q_{12} = Q_{23} = 0,$$

$$Q_{13} = \frac{\lambda - \lambda^*}{2\sqrt{a_1 a_3}} \frac{e^{i \frac{\lambda + \lambda^*}{2} \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_1} \right) (x - v_1 t) + i \varphi_1}}{\operatorname{ch} \left[i \frac{\lambda - \lambda^*}{2} \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_1} \right) (x - v_1 t - x_1^0) \right]} \quad (8.5)$$

$$\varphi_1 = \arg S_{13}(\lambda, 0), \quad x_1^0 = \frac{2}{i(\lambda - \lambda^*)} \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_1} \right)^{-1} \ln \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} \frac{1}{|S_{13}(\lambda, 0)|}$$

С точки зрения системы (2.7) эти решения, сами по себе, не представляют интереса ввиду их тривиальности (амплитуда лишь одного из пакетов отлична от нуля). Мы, однако, привели явный вид этих решений, поскольку картина рассеяния этих пакетов друг на друге выглядит наиболее просто. Решение, описывающее столкновение солитонов вторичных волн друг с другом получается из безотражательной матрицы перехода, в которой элементы $S_{11}(\lambda)$ и $S_{33}(\lambda)$ имеют по одному нулю: $S_{11}(\lambda_1) = 0$, $S_{33}(\mu) = 0$. Решая соответствующую систему линейных уравнений, находим:

$$Q_{13}(x, t) = \frac{(\lambda - \lambda^*)(\mu - \mu^*)}{a_2(\lambda - \mu^*)} \frac{S_{12}^*(\lambda, 0) S_{32}(\mu, 0) e^{i \lambda \gamma_{12}(x - v_2 t)} e^{i \mu \gamma_{23}(x - v_3 t)}}{\Delta(x, t)} \quad (8.6)$$

$$Q_{12}(x, t) = \frac{\lambda - \lambda^*}{a_2} \frac{S_{12} e^{i \lambda \gamma_{21}(x - v_2 t)}}{\Delta(x, t)} \left\{ 1 + \frac{a_3}{a_2} \frac{\mu - \lambda}{\mu^* - \lambda} |S_{32}|^2 e^{i(\mu^* - \mu) \gamma_{32}(x - v_3 t)} \right\} \quad (8.7)$$

$$Q_{23}(x, t) = -\frac{\mu^* - \mu}{a_2} \frac{S_{32}^* e^{i \mu^* \gamma_{32}(x - v_3 t)}}{\Delta(x, t)} \left\{ 1 + \frac{a_1}{a_2} \frac{\lambda - \mu}{\lambda^* - \mu} |S_{12}|^2 e^{i(\lambda - \lambda^*) \gamma_{21}(x - v_2 t)} \right\} \quad (8.8)$$

где $\gamma_{ik} = \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_k}$,

$$\Delta(x,t) = \left[1 + \frac{a_1}{a_2} |S_{12}|^2 e^{i(\lambda-\lambda^*)\gamma_{21}(x-v_2t)} \right] \left[1 + \frac{a_3}{a_2} |S_{32}|^2 e^{i(\mu^*-\mu)\gamma_{32}(x-v_3t)} \right] + \frac{a_1 a_3}{a_2^2} \frac{(\lambda-\lambda^*)(\mu^*-\mu)}{|\lambda-\mu^*|^2} |S_{12}|^2 |S_{32}|^2 \exp \left[i(\lambda-\lambda^*)\gamma_{21}(x-v_2t) + i(\mu^*-\mu)\gamma_{32}(x-v_3t) \right]. \quad (8.9)$$

Положим, для определенности, $v_2 > v_3$. Тогда, как нетрудно видеть, при $t \rightarrow -\infty$ (8.8) даёт

$$Q_{23} \rightarrow \frac{\mu-\mu^*}{a_2} \frac{S_{32}^* e^{i\mu^*\gamma_{32}(x-v_3t)}}{1 + \frac{a_3}{a_2} |S_{32}|^2 e^{i(\mu^*-\mu)\gamma_{32}(x-v_3t)}}, \quad (8.10)$$

а из (8.7), (8.9) следует, что

$$Q_{12} \rightarrow \frac{\lambda-\lambda^*}{a_2} \frac{S_{12} \frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu^*} e^{i\lambda\gamma_{21}(x-v_2t)}}{1 + \frac{a_1}{a_2} |S_{12}|^2 \left| \frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu^*} \right|^2 e^{i(\lambda-\lambda^*)\gamma_{21}(x-v_2t)}}, \quad (8.11)$$

При этом $Q_{12}(x,t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow -\infty$ для всех x . Сравнивая (8.11), (8.10) с (8.2) убеждаемся, что полученное решение при $t \rightarrow -\infty$ состоит из двух солитонов вторичных волн.

Аналогично, при $t \rightarrow +\infty$, (8.6) дают $Q_{12} \rightarrow 0$,

$$Q_{23} \rightarrow \frac{\mu-\mu^*}{a_2} \frac{S_{32}^* \frac{\mu^*-\lambda^*}{\mu^*-\lambda} e^{i\mu^*\gamma_{32}(x-v_3t)}}{1 + \frac{a_3}{a_2} \left| \frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu^*} \right|^2 |S_{32}|^2 e^{i(\mu^*-\mu)\gamma_{32}(x-v_3t)}}, \quad (8.12)$$

$$Q_{12} \rightarrow \frac{\lambda-\lambda^*}{a_2} \frac{S_{12} e^{i\lambda\gamma_{21}(x-v_2t)}}{1 + \frac{a_1}{a_2} |S_{12}|^2 e^{i(\lambda-\lambda^*)\gamma_{21}(x-v_2t)}}, \quad (8.13)$$

т.е. решение опять-таки состоит из двух солитонов вторичных волн с теми же самыми амплитудами, что и при $t \rightarrow -\infty$. При этом, однако, величины φ_i и x_i^0 , определяющие соответственно фазу решения и положения солитона при $t=0$, претерпевают изменение;

$$\Delta\varphi_2 = \varphi_2(+\infty) - \varphi_2(-\infty) = \arg \frac{\lambda-\mu^*}{\lambda-\mu}, \quad \Delta\varphi_3 = \arg \frac{\lambda^*-\mu^*}{\lambda-\mu^*}, \quad (8.14)$$

$$\Delta x_2^0 = \frac{2}{i(\lambda-\lambda^*)} \gamma_{21}^{-1} \ln \left| \frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu^*} \right|, \quad \Delta x_3^0 = \frac{2}{i(\mu^*-\mu)} \gamma_{32}^{-1} \ln \left| \frac{\lambda-\mu^*}{\lambda-\mu} \right|. \quad (8.15)$$

В этом, собственно, и состоит весь эффект рассеяния солитонов вторичных волн друг на друга. Заметим, еще, что величины Δx_2^0 , Δx_3^0 удовлетворяют соотношению

$$i(\lambda-\lambda^*)\gamma_{21} \Delta x_2^0 + i(\mu^*-\mu)\gamma_{32} \Delta x_3^0 = 0$$

которое, очевидно, является следствием галилеевской инвариантности системы (2.7).

Отметим, что указанное решение описывает взаимодействие пакетов вторичных волн, вообще не приводящее к перераспределению энергии между волнами. Легко понять, что тем же свойством будет обладать любое решение, описываемое с помощью безотражательной матрицы перехода, если только ни для каких k, μ не выполняется соотношение $\lambda_n = \mu_n^*$, где λ_n и μ_n - нули S_{11} и S_{33} соответственно. Мы не будем останавливаться здесь на доказательстве этого утверждения, отсылая читателя к § 10, где будет рассмотрена гораздо более общая ситуация.

Аналогичным образом может быть построено решение, описывающее взаимодействие солитона накачки и солитона вторичной волны. Пусть, например, $S_{11}(\lambda)$ имеет нули в точках верхней полуплоскости λ_1, λ_2 , а $S_{33}(\lambda)$ имеет один нуль в точке λ_1^* и пусть, далее, $S_{12}(\lambda_1) = \tilde{S}_{32}(\lambda_1) = 0$. Непосредственные вычисления показывают, что данные рассеяния указанного вида приводят к потенциалу

$$Q_{12} = \frac{\lambda_2 - \lambda_2^*}{a_2} \frac{S_{12} e^{i\lambda_2 \gamma_{21}(x-v_2 t)}}{\Delta(x,t)} \left\{ \frac{\lambda_1^* - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{a_3}{a_2} \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2^*}{\lambda_1 - \lambda_2} \right|^2 |S_{12}|^2 e^{i(\lambda_1 - \lambda_2^*) \gamma_{31}(x-v_1 t)} \right\}, \quad (8.16)$$

$$Q_{13} = \frac{\lambda_1 - \lambda_1^*}{a_2} \frac{S_{13} e^{i\lambda_1 \gamma_{31}(x-v_1 t)}}{\Delta(x,t)} \left\{ \frac{\lambda_1 - \lambda_2^*}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{a_1}{a_2} \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2^*}{\lambda_1 - \lambda_2} \right|^2 |S_{12}|^2 e^{i(\lambda_2 - \lambda_2^*) \gamma_{21}(x-v_2 t)} \right\},$$

где

$$\Delta(x,t) = 1 + \frac{a_1}{a_3} \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2^*}{\lambda_1 - \lambda_2} \right|^2 |S_{12}|^2 e^{i(\lambda_1 - \lambda_2^*) \gamma_{31}(x-v_1 t)} + \frac{a_1}{a_2} \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2^*}{\lambda_1 - \lambda_2} \right|^2 |S_{12}|^2 e^{i(\lambda_2 - \lambda_2^*) \gamma_{21}(x-v_2 t)} + \frac{a_1^2}{a_2 a_3} \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2^*}{\lambda_1 - \lambda_2} \right|^2 |S_{12}|^2 |S_{13}|^2 e^{i(\lambda_1 - \lambda_1^*) \gamma_{31}(x-v_1 t)} e^{i(\lambda_2 - \lambda_2^*) \gamma_{21}(x-v_2 t)},$$

причем $Q_{23}(x,t)$ обращается в нуль при $t \rightarrow \pm \infty$ на всей оси x . Нетрудно убедиться, что формулы (8.16) описывают столкновение солитона накачки с солитоном волны 1. При этом, как и в случае столкновения солитонов вторичных волн, весь эффект столкновения сводится к изменению фаз пакетов и величин χ_i^0 , которые легко находятся из (8.16). Подчеркнем, что в найденном решении пакет накачки не распадается.

Укажем, ещё, что легко может быть построено точное решение системы (2.7) описывающее рассеяние всех трёх солитонов (8.2) - (8.5) и не приводящее к перераспределению энергии между волнами. Мы не приводим его здесь ввиду его громоздкости.

Рассмотрим теперь решение системы (7.19) - (7.26) в случае, когда $S_{11}(\lambda)$ и $S_{33}(\lambda)$ имеют по одному нулю, причём нули эти расположены в сопряжённых точках. Случай, когда обе величины $S_{12}(\lambda)$ и $\tilde{S}_{32}(\lambda)$, где λ - нуль S_{11} , обращаются одновременно в нуль, приводит, как мы выяснили выше, к солитону накачки. Посмотрим теперь, какому решению системы (2.7) соответствует ситуация, когда только одна из этих величин равна нулю. Пусть, например, $S_{12} = 0$, $\tilde{S}_{32} \neq 0$. Тогда, как легко видеть,

$$Q_{12}(x,t) = -\frac{\lambda - \lambda^*}{a_2} \frac{S_{13} S_{32} e^{i\frac{\lambda + \lambda^*}{2} \gamma_{21}(x-v_2 t)}}{\frac{a_3}{a_2} |S_{32}|^2 e^{-i\frac{\lambda - \lambda^*}{2} \gamma_{21}(x-v_2 t)} + \frac{a_1}{a_3} |S_{12}|^2 e^{i\frac{\lambda - \lambda^*}{2} (\gamma_{21}(x-v_2 t) + \gamma_{32}(x-v_3 t))}} \quad (8.17)$$

$$Q_{13}(x,t) = \frac{\lambda - \lambda^*}{a_3} \frac{S_{13} e^{i\lambda\gamma_{31}(x-v_1t)}}{1 + \frac{a_3}{a_2} |S_{32}|^2 e^{i(\lambda - \lambda^*)\gamma_{22}(x-v_3t)} + \frac{a_1}{a_3} |S_{13}|^2 e^{i(\lambda - \lambda^*)\gamma_{31}(x-v_1t)}} \quad (8.18)$$

$$Q_{23}(x,t) = -\frac{\lambda - \lambda^*}{a_2} \frac{S_{32}^* e^{i\lambda\gamma_{32}(x-v_3t)}}{1 + \frac{a_3}{a_2} |S_{32}|^2 e^{i(\lambda - \lambda^*)\gamma_{22}(x-v_3t)} + \frac{a_1}{a_3} |S_{13}|^2 e^{i(\lambda - \lambda^*)\gamma_{31}(x-v_1t)}} \quad (8.19)$$

Положим, для определенности, $v_3 > v_1 > v_2$. Тогда, как нетрудно усмотреть из (8.17)–(8.19), найденное решение при $t \rightarrow -\infty$ – суть солитон накачки:

$$Q_{12}(x,t), Q_{23}(x,t) \rightarrow 0,$$

$$Q_{13} \rightarrow \frac{\lambda - \lambda^*}{a_3} \frac{S_{13} e^{i\lambda\gamma_{31}(x-v_1t)}}{1 + \frac{a_1}{a_3} |S_{13}|^2 e^{i(\lambda - \lambda^*)\gamma_{31}(x-v_1t)}}.$$

Однако при $t \rightarrow +\infty$ (8.18) показывает, что $Q_{12}(x,t) \rightarrow 0$, а (8.17)–(8.19) дают

$$Q_{12}(x,t) \rightarrow -\frac{\lambda - \lambda^*}{a_2} \frac{S_{13} S_{32} e^{i\lambda\gamma_{21}(x-v_2t)}}{\frac{a_3}{a_2} |S_{32}|^2 + \frac{a_1}{a_3} |S_{13}|^2 e^{i(\lambda - \lambda^*)\gamma_{21}(x-v_2t)}} \quad (8.20)$$

$$Q_{23}(x,t) \rightarrow -\frac{\lambda - \lambda^*}{a_2} \frac{S_{32}^* e^{i\lambda\gamma_{32}(x-v_3t)}}{1 + \frac{a_3}{a_2} |S_{32}|^2 e^{i(\lambda - \lambda^*)\gamma_{32}(x-v_3t)}}.$$

Таким образом (8.17)–(8.19) описывает распад солитона накачки на солитоны вторичных волн, приём амплитуды возникающих солитонов в точности равны амплитуде солитона накачки. Координаты центров рождающихся солитонов и их фазы легко находятся из сравнения (8.20) с (8.2), (8.4):

$$\varphi_2 = \pi + \arg S_{13} + \arg S_{32}, \quad \varphi_3 = -\arg S_{32},$$

$$x_2^0 = \frac{2}{i(\lambda - \lambda^*)} \gamma_{21}^{-1} \ln \frac{a_3}{\sqrt{a_1 a_2}} \frac{|S_{32}|}{|S_{13}|}, \quad x_3^0 = \frac{2}{i(\lambda - \lambda^*)} \gamma_{32}^{-1} \ln \sqrt{\frac{a_1}{a_3}} \frac{1}{|S_{32}|}.$$

Вычисления также показывают, что случай $S_{12}(\lambda) \neq 0$, $\hat{S}(\lambda) = 0$ описывает слияние солитонов вторичных волн с одинаковой амплитудой в солитон накачки.

Отметим, что при $t \rightarrow -\infty$ асимптотика решения (8.17)–(8.19) отличается от решения (8.5), описывающего "Чистый" солитон накачки, лишь экспоненциально малыми членами. Поэтому существование решения (8.17)–(8.19) означает неустойчивость солитона накачки, что само по себе неудивительно. Однако совершенно неожиданным является наличие решения (8.16), описывающего столкновение вторичной волны с солитонов накачки без распада последнего. Нетрудно, однако, понять, что это решение также неустойчиво. Для этого достаточно построить решение, объединяющее (8.16) и (8.17)–(8.19). Такое решение, как легко убедиться, следует из системы уравнений обратной задачи (7.19)–(7.26) если положить

$$S_{11} = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_1^*} \frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda - \lambda_2^*}, \quad S_{33} = \frac{\lambda - \lambda_1^*}{\lambda - \lambda_1}, \quad S_{12}(\lambda_1) = 0, \quad \hat{S}_{32}(\lambda_1) \neq 0.$$

Можно провести определенную аналогию с решениями обыкновенных дифференциальных уравнений. Хорошо известно, что если данное семейство функций удовлетворяет некоторому уравнению, то этому же уравнению удовлетворяют и огибающие или сепаратрисы этого семейства (если таковые существуют). Поэтому можно ска-

азть, что, например, солитон накачки (8.5) представляет собой "оггибающую" семейства решений (8.17)-(8.19).

Полное исследование задачи о связи асимптотических при $t \rightarrow \pm \infty$ решений системы (2.7) будет проведено в § 10; именно эта задача представляет наибольший физический интерес. Поэтому мы ограничиваемся при рассмотрении точных решений системы (2.7) полученными выше простыми, но весьма поучительными примерами.

Отметим, еще, что уравнения обратной задачи (7.19)-(7.26) или (7.36) могут быть решены не только для безотражательных матриц перехода, но и в гораздо более общем случае, когда $C_{je}(\lambda)$ имеют вид $R_{je}(\lambda) e^{i\lambda F_{je}}$, где $R_{je}(\lambda)$ - рациональные функции λ . В отличие от других уравнений, интегрируемых методом обратной задачи (за исключением уравнения (3.18), система (2.7) (так же как и система (2.14) сохраняет, ввиду (3.12), такой вид $C_{je}(\lambda)$. При этом, например, уравнения (7.36) превращаются в систему интегральных уравнений с вырожденными ядрами и легко решаются. Поскольку, далее, любые функции $C_{je}(\lambda)$ могут быть с любой наперед заданной точностью аппроксимированы функциями указанного вида, то возникает возможность построения точных решений систем (2.7) или (2.14), приближающихся, с любой степенью точности, решения этих систем с данными начальными условиями. Однако это уже выходит за рамки настоящей работы.

§ 9. Взрывная неустойчивость. Точные решения

В случае взрывной неустойчивости, т.е. при вложении (3.6), в соответствии с (5.14) мы должны положить $\tilde{S}_{ik}(\lambda) = S_{ik}^*(\lambda^*)$ при $i, k \neq 2$, $\tilde{S}_{22}(\lambda) = S_{22}^*(\lambda^*)$ и $\tilde{S}_{i2}(\lambda) = -S_{i2}^*(\lambda^*)$, $\tilde{S}_{2i}(\lambda) = -S_{2i}^*(\lambda^*)$, $i \neq 2$.

Рассмотрим теперь вопрос о развитии взрывной неустойчивости при столкновении первоначального пространственно разделенных пакетов волн. Не ограничивая общности, мы можем ограничиться случаем $a_3 > 0$. При этом скорость пакета волн 1 (Q_{13}) является промежуточной между скоростями пакетов 2 и 3. Положим, для определенности, $v_2 < v_1 < v_3$. Поскольку, далее, мы рассматриваем сейчас процесс столкновения пакетов, то при $t \rightarrow -\infty$ матрица перехода представляется в виде

$$S(\lambda) = S_3(\lambda) S_1(\lambda) S_2(\lambda) \quad (9.1)$$

где частичные матрицы перехода, очевидно, имеют вид:

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_{11}^{(1)} & 0 & S_{13}^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 \\ S_{31}^{(1)} & 0 & S_{33}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & 0 \\ S_{21}^{(2)} & S_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_{22}^{(3)} & S_{23}^{(3)} \\ 0 & S_{32}^{(3)} & S_{33}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

При этом, ввиду (5.16) элементы этих матриц удовлетворяют соотношениям:

$$|S_{11}^{(1)}|^2 - \frac{a_1}{a_2} |S_{13}^{(1)}|^2 = 1, \quad |S_{11}^{(1)}|^2 + \frac{a_1}{a_3} |S_{13}^{(1)}|^2 = 1, \quad |S_{22}^{(2)}|^2 - \frac{a_2}{a_3} |S_{23}^{(2)}|^2 = 1, \quad (9.3)$$

и

$$S_{22}^{(2)} = S_{11}^{(2)*}(\lambda^*), \quad S_{33}^{(1)}(\lambda) = S_{11}^{(1)*}(\lambda^*), \quad S_{33}^{(3)}(\lambda) = S_{22}^{(3)*}(\lambda^*). \quad (9.4)$$

Функции $S_{11}^{(1)}(\lambda)$, $S_{22}^{(2)}(\lambda)$, $S_{33}^{(3)}(\lambda)$ аналитичны в верхней полуплоскости λ и, как следует из (9.3), $S_{22}^{(2)}(\lambda)$ и $S_{33}^{(3)}(\lambda)$ не имеют там нулей. Нули же $S_{11}^{(1)}$ и $S_{33}^{(1)}$ лежат, ввиду (9.4) в сопряженных точках. Подставляя теперь (9.2) в (9.1) убеждаемся, что в рассматриваемом случае нули $S_{11}(\lambda)$ и $S_{33}(\lambda)$ расположены в сопряженных точках и совпадают с нулями частичной матрицы перехода $S_1(\lambda)$.

Рассмотрим теперь совокупность решений рассматриваемой задачи, описываемых безотражательными матрицами перехода. Ввиду отмеченного обстоятельства "слипания" нулей $S_{11}(\lambda)$ и $S_{33}^*(\lambda^*)$ и учитывая (8.1) имеем $S_{11}(\lambda) = S_{33}^*(\lambda^*)$.

Заметим еще, что любое решение системы (2.14) с безотражательной матрицей перехода может быть получено, как это следует непосредственно из структуры уравнений обратной задачи (7.19)-(7.26) из некоторого решения системы (2.7), также обладающего безотражательной матрицей перехода, простой заменой $S_{i2}^*(\lambda) \rightarrow -S_{i2}^*(\lambda)$, $S_{2i}^*(\lambda) \rightarrow -S_{2i}^*(\lambda)$, $i \neq 2$. Простейшим решением системы (2.14) такого типа является солитон волны 1, аналитическое выражение для которого в точности совпадает с (8.5). Производя указанную замену в формулах (8.17)-(8.19) получаем решение системы (2.14), которое при $t \rightarrow -\infty$ также есть солитон волны 1:

$$Q_{13} = \frac{\lambda - \lambda^*}{a_3} \frac{S_{13} e^{i\lambda \gamma_{31}(x-v_1 t)}}{\Delta(x,t)}, \quad Q_{23} = \frac{\lambda - \lambda^*}{a_2} \frac{S_{32} e^{i\lambda \gamma_{32}(x-v_3 t)}}{\Delta(x,t)} \quad (9.5)$$

$$Q_{12} = -\frac{\lambda - \lambda^*}{a_2} \frac{S_{13} S_{32}}{\Delta(x,t)} e^{i \frac{\lambda + \lambda^*}{2} \gamma_{21}(x-v_2 t)} e^{i \frac{\lambda - \lambda^*}{2} [\gamma_{31}(x-v_1 t) + \gamma_{22}(x-v_3 t)]},$$

где

$$\Delta(x,t) = 1 + \frac{a_1}{a_3} |S_{31}|^2 e^{i(\lambda - \lambda^*) \gamma_{31}(x-v_1 t)} - \frac{a_3}{a_2} |S_{32}|^2 e^{i(\lambda - \lambda^*) \gamma_{32}(x-v_3 t)} \quad (9.6)$$

Однако из (9.6) нетрудно видеть, что $\Delta(x,t)$ начиная с некоторого конечного момента времени $t \geq t^*$ обращается при некоторых x в нуль. При этом при $t = t^*$ кривая $y = \Delta(x, t^*)$ касается прямой $y = 0$. Простые вычисления дают

$$t^* = \frac{i}{(\lambda - \lambda^*)(v_3 - v_1)} \left\{ \gamma_{32}^{-1} \ln \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_2} \frac{a_2^2 a_3^{-2}}{|S_{32}|^2} - \gamma_{31}^{-1} \ln \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_2} \frac{1}{|S_{31}|^2} \right\}. \quad (9.7)$$

Т.о. при $t = t^*$ в решении (9.5) возникает особенность в точке

$$x^* = \frac{i}{(\lambda - \lambda^*)(v_3 - v_1)} \left\{ v_1 \gamma_{32}^{-1} \ln \frac{a_2^2}{a_3^2} \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_2} \frac{1}{|S_{32}|^2} - v_3 \gamma_{31}^{-1} \ln \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_2} \frac{1}{|S_{31}|^2} \right\}; \quad (9.8)$$

при этом амплитуды пакетов ведут себя как $(x - x^*)^{-2}$. Итак, полученное решение описывает "взрыв" солитона волны 1. Соображения, аналогичные приведенным в предыдущем параграфе, показывают, что солитон накачки неустойчив; развитие взрывной неустойчивости приводит к образованию особенности в решении.

В общем случае при столкновении пакетов волн также можно было бы ожидать возникновения особенностей. Однако, как мы сейчас увидим, такие решения приводят к особенности лишь если пакет волны с промежуточной скоростью (волны) является достаточно мощным. Точнее, говоря, необходимым условием появления особенности в решении является наличие нулей у элемента частичной матрицы перехода $S_{ii}^{(n)}(\lambda)$ в верхней полуплоскости λ . Пусть $S_{ii}^{(n)}(\lambda)$ не имеет нулей. Тогда, в силу (9.1) $S_{11}(\lambda)$ и $S_{33}(\lambda)$ также не имеют нулей. При этом уравнение обратной задачи сводится к системе сингулярных интегральных уравнений (7.8)-(7.10), которая всегда имеет решения если матрица перехода удовлетворяет установленным в § 5 условиям, которые, очевидно, сохраняются во времени, что и означает отсутствие особенности в решении системы (2.14) в любой момент времени. Если же $S_{ii}^{(n)}(\lambda)$ имеет нули, то, рассматривая уравнения (7.19)-(7.26) как систему уравнений на функции дискретного спектра $\varphi_{ij}^{(n)}(x)$ можно убедиться, что если хотя бы одна из величин $S_{12}(\lambda_i)$ или $S_{32}(\lambda_i)$ отлична от нуля, то определитель этой системы при некотором t обращается в нуль. Т.о. $\varphi_{ij}^{(n)}(x)$ начиная с некоторого момента времени обращаются в бесконечность в каких-то точках x , что ввиду (7.15) приводит к появлению особенностей в $Q_{ij}(x)$, т.е. в решении системы (2.14).

Отметим, что критерий возникновения особенности при столкновении пакетов - наличие нулей у $S_{ii}^{(n)}(\lambda)$ - не зависит от характеристик пакетов волн, имеющих эк-

стремальные скорости. Отсюда, в частности, следует, что при столкновении сколь угодно "больших" пакетов волн 2 и 3 особенностей в амплитудах пакетов не возникает. Если, например, при $t \rightarrow \infty$ пакет волны 1 имеет форму прямоугольного цуга волн с длиной L_1 и амплитудой $|u_1|$, то, как легко проверить непосредственным вычислением, условие существования нуля у $S_{11}^{(1)}(\lambda)$ имеет вид $\frac{|u_1|L_1 v_1}{\sqrt{|v_1 - v_2||v_1 - v_3|}} > \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, такой же вид имеет и критерий возникновения особенности при столкновении такого пакета с произвольными пакетами волн 2 и 3. В общем случае, если пакет волны 1 имеет достаточно гладкую форму с характерной амплитудой u_1 и характерной длиной L_1 , условие возникновения особенности в решении системы (2.14) есть

$$\frac{|u_1|L_1 v_1}{\sqrt{|v_1 - v_2||v_1 - v_3|}} \geq c$$

где $c \sim 1$ и, разумеется, не может быть вычислено в общем виде.

Аналогичные соображения показывают, что в случае произвольных начальных условий для системы (2.14) особенность в решении образуется, если $S_{11}(\lambda)$ или $S_{33}(\lambda)$ имеют нули. При этом, однако, если нули S_{11} и S_{33}^* не совпадают, то в решении возникают особенности как при достаточно больших положительных t , так и при отрицательных, т.е. данное начальное условие, как и следовало ожидать, не могло возникнуть в результате столкновения пакетов. Простейшее решение такого вида может быть получено непосредственно из (8.6)–(8.9) указанной выше заменой соответствующим выбором величин $|S_{12}|, |S_{32}|$ в (8.9) можно добиться, чтобы при $t=0$ $\Delta(x,t)$ (8.9) не обращалось в нуль ни при каких x . При этом легко видеть, что у $\Delta(x,t)$ появляются нули при смещении по t в любом направлении.

§ 10. Распадное взаимодействие. Рассеяние пакетов.

Случай промежуточной скорости накачки

В настоящем параграфе мы рассмотрим задачу о связи асимптотических при $t \rightarrow \pm\infty$ состояний волновых пакетов – т.е. задачу о рассеянии пакетов в случае когда скорость накачки не является экстремальной. Будем считать, что $v_2 < v_1 < v_3$.

Естественно предположить, что $t \rightarrow +\infty$ всякое решение системы (2.7) распадается на невзаимодействующие пакеты. (Это предположение может быть обосновано с помощью уравнений обратной задачи, чего, мы, однако, делать не будем ввиду его достаточной очевидности). При этом при $t \rightarrow -\infty$ пакеты расположены на оси x в порядке 3, 1, 2. При $t \rightarrow +\infty$ порядок следования пакетов обратный. Матрица перехода может быть представлена в виде

$$S(t) = S_3^- S_1^- S_2^- , \quad t \rightarrow -\infty \quad (10.1)$$

$$S(t) = S_2^+ S_1^+ S_3^+ , \quad t \rightarrow +\infty ,$$

где S_i – частичные матрицы перехода, описанные в § 3. Очевидно, что асимптотические представления (10.1) справедливы, ввиду (3.12), в любой момент времени; относя оба представления (10.1) к моменту $t=0$ получаем

$$S_2^+ S_1^+ S_3^+ = S_3^- S_1^- S_2^- . \quad (10.2)$$

Соотношение (10.2) и аналитические свойства диагональных элементов S_i позволяют, как будет показано ниже, однозначно определить S_i^+ по данным S_i^- . Восстанавливая, далее, амплитуды пакетов $u_i(x)$ по S_i^+ мы полностью определим характеристики возникающих в процессе рассеяния волновых пакетов.

Прежде всего изучим подробнее свойства частичных матриц перехода. Полагая в операторе L (3.2) все $Q_{ik} = 0$ за исключением $Q_{\alpha\beta}, Q_{\beta\alpha} = -Q_{\alpha\beta}^*$ получим вместо (3.7):

$$i a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \lambda \psi_i , \quad i \neq \alpha, \beta \quad (10.3)$$

$$i a_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} + (a_\alpha - a_\beta) Q_{\alpha\beta} \psi_\beta = \lambda \psi_\alpha$$

$$i a_\beta \frac{\partial \psi_\beta}{\partial x} + (a_\alpha - a_\beta) Q_{\alpha\beta}^* \psi_\alpha = \lambda \psi_\beta.$$

Система (10.3) является частным случаем (3.7). Очевидно, что $S_{ik} = \delta_{ik}$ если $i, k \neq \alpha, \beta$. Т.о. в этом случае в матрице перехода имеется только четыре нетривиальных элемента: $S_{\alpha\alpha}, S_{\alpha\beta}, S_{\beta\alpha}, S_{\beta\beta}$. Положим $\alpha < \beta$. Тогда, поскольку $a_\alpha > 0$, $S_{\alpha\alpha}(\lambda)$ аналитичны в верхней полуплоскости λ , $S_{\beta\beta}$ - в нижней. При этом ввиду (5.8), (5.12)

$$S_{\beta\beta}(\lambda) = S_{\alpha\alpha}^*(\lambda^*), \quad S_{\beta\alpha}(\lambda) = -\frac{a_\alpha}{a_\beta} S_{\alpha\beta}^*(\lambda). \quad (10.4)$$

В дальнейшем вместо матрицы перехода S нам будет удобнее использовать матрицу \mathcal{S} с элементами

$$\mathcal{S}_{ik} = \sqrt{\frac{a_i}{a_k}} S_{ik} \quad (10.5)$$

которая, очевидно, является унитарной, унимодулярной. Для \mathcal{S} (10.4) переписывается в виде

$$\mathcal{S}_{\alpha\alpha} = \mathcal{S}_{\beta\beta}^*(\lambda^*), \quad \mathcal{S}_{\beta\alpha} = -\mathcal{S}_{\alpha\beta}^* \quad (10.6)$$

(Отметим, что диагональные элементы матриц S и \mathcal{S} совпадают). Для полного определения потенциала $Q_{\alpha\beta}$ необходимо также знать значения $\mathcal{S}_{\beta\alpha}(\lambda_n)$ в нулях $\mathcal{S}_{\alpha\alpha}(\lambda)$.

Введём теперь следующие обозначения:

$$S_1^\pm = \begin{pmatrix} \sigma_1^\pm & 0 & \eta_1^\pm \\ 0 & 1 & 0 \\ -\eta_1^{\pm*} & 0 & \sigma_1^{\pm*} \end{pmatrix}, \quad S_2^\pm = \begin{pmatrix} \sigma_2^\pm & \eta_2^\pm & 0 \\ -\eta_2^{\pm*} & \sigma_2^{\pm*} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3^\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3^\pm & \eta_3^\pm \\ 0 & -\eta_3^{\pm*} & \sigma_3^{\pm*} \end{pmatrix}, \quad (10.7)$$

где S_i^\pm - матрицы, связанные с частичными матрицами перехода S_i^\pm соотношением (10.5). При этом $\sigma_i^\pm(\lambda)$ аналитичны в верхней полуплоскости λ и

$$|\sigma_i(\lambda)|^2 + |\eta_i(\lambda)|^2 = 1. \quad (10.8)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только рассеяние финитных волновых пакетов. Напомним, что в этом случае все элементы матрицы перехода аналогичны во всей плоскости λ .

Соотношение (10.2), которое для матриц \mathcal{S}_i , по-прежнему, имеет вид

$$S_2^+ S_1^+ S_3^+ = S_3^- S_1^- S_2^- = S(0) \quad (10.9)$$

позволяет немедленно найти $|\sigma_i^+(\lambda)|, \eta_i^+(\lambda)$ по данным $\mathcal{S}_i^-(\lambda)$. С учётом (10.8) имеем:

$$|\sigma_1^+|^2 = 1 - |S_{31}|^2, \quad |\sigma_2^+|^2 = \frac{|S_{11}|^2}{1 - |S_{31}|^2}, \quad |\sigma_3^+| = \frac{|S_{33}|^2}{1 - |S_{31}|^2}, \quad (10.10)$$

$$\eta_1^+ = -S_{31}^*, \quad \eta_2^+ = -\frac{S_{21}^*}{\sigma_1^+}, \quad \eta_3^+ = -\frac{S_{32}^*}{\sigma_1^+}. \quad (10.11)$$

Выражая элементы матрицы $S(0)$ через σ_i^-, η_i^- получаем:

$$S_{31} = -\sigma_2^- \sigma_3^- \eta_1^- + \eta_2^- \eta_3^-, \quad S_{11} = \sigma_1^- \sigma_2^-, \quad S_{33} = \sigma_1^- \sigma_3^-, \quad (10.12)$$

$$S_{21} = -\sigma_3^- \eta_2^- - \sigma_2^- \eta_1^- \eta_3^-, \quad S_{32} = -\sigma_2^- \eta_3^- - \sigma_3^- \eta_1^- \eta_2^-$$

Для полного определения матрицы S_i^+ необходимо знать еще, как видно из (10.10),

(10.11), аргументы σ_i^+ . Ввиду аналитических свойств σ_i для этого достаточно определить положение нулей $\sigma_i^+(\lambda)$ при $\text{Im } \lambda > 0$. Сравнивая элементы матриц $(s_3^- s_1^- s_2^-)_{11}$, $(s_3^- s_1^- s_2^-)_{33}$ и $(s_2^+ s_1^+ s_3^+)_{11}$, $(s_2^+ s_1^+ s_3^+)_{33}$ находим:

$$\sigma_1^+ \sigma_2^+ = \sigma_1^- \sigma_2^- , \quad \sigma_1^+ \sigma_3^+ = \sigma_1^- \sigma_3^- ; \quad (10.12)$$

отсюда сразу следует, что если $\sigma_2^-(\lambda) = 0$, $\sigma_{1,3}^-(\lambda) \neq 0$, то и $\sigma_2^+(\lambda) = 0$, $\sigma_{1,3}^+(\lambda) \neq 0$ и если $\sigma_3^-(\lambda) = 0$, $\sigma_{1,2}^-(\lambda) \neq 0$, то $\sigma_3^+(\lambda) = 0$, $\sigma_{1,2}^+(\lambda) \neq 0$. Мы ограничимся здесь, как и при построении уравнений обратной задачи случаем, когда $s_{11}(\lambda)$ и $s_{33}(\lambda)$ имеют лишь простые нули, т.е. случаем когда нули σ_3^- и σ_2^- или σ_3^+ не совпадают. Общий случай, как всегда, может быть получен предельным переходом. Имея ввиду это ограничение видим, что если $\sigma_1^-(\lambda) = 0$, то, как следует из (10.13), либо $\sigma_1^+(\lambda) = 0$, либо $\sigma_2^+(\lambda) = \sigma_3^+(\lambda) = 0$. Сравнивая элементы $(s_2^+ s_1^+ s_3^+)_{21}$ и $(s_3^- s_1^- s_2^-)_{21}$, $(s_2^+ s_1^+ s_3^+)_{21} = -\sigma_1^+ \eta_2^{+*} = -\sigma_3^- \eta_2^{-*} - \sigma_2^- \eta_1^- \eta_3^- =$

$$= (s_3^- s_1^- s_2^-)_{21} \text{ видим, что если } (s_3^- s_1^- s_2^-)_{21} \neq 0, \text{ то } \sigma_1^+(\lambda) \neq 0, \sigma_2^+(\lambda) = \sigma_3^+(\lambda) = 0. \text{ Аналогично, если } \sigma_1^-(\lambda) \neq 0, \sigma_2^+(\lambda) = \sigma_3^+(\lambda) = 0, \text{ то из соотношения } (s_2^+ s_1^+ s_3^+)_{32}(\lambda) = \sigma_3^+ \eta_2^+ - \sigma_2^+ \eta_1^+ \eta_3^{+*} = \sigma_1^- \eta_2^- = (s_3^- s_1^- s_2^-)_{12}(\lambda)$$

следует, поскольку $\eta_2^- \neq 0$, ввиду (10.13), $\sigma_1^+(\lambda) = 0$, $\sigma_2^+(\lambda), \sigma_3^+(\lambda) \neq 0$. Если же $\sigma_1^-(\lambda) = 0$ и $(\sigma_3^- \eta_2^{-*} + \sigma_2^- \eta_1^- \eta_3^-)(\lambda) = 0$, то и $\sigma_1^+(\lambda) = 0$, $\sigma_{2,3}^+ \neq 0$. При этом как легко убедиться,

$$\eta_1^{+*}(\lambda^*) = \frac{\sigma_2^-(\lambda)}{\sigma_3^+(\lambda)} \eta_1^{-*}(\lambda^*). \quad (10.14)$$

Нетрудно найти также, что, если $\sigma_3^-(\lambda) = 0$, $\sigma_2^-(\lambda) \neq 0$, то

$$\eta_3^{+*}(\lambda^*) = \frac{\sigma_2^{-*}(\lambda^*)}{\sigma_1^{+*}(\lambda^*)} \eta_3^{-*}(\lambda^*), \quad (10.15)$$

если $\sigma_2^-(\lambda) = 0$, $\sigma_3^-(\lambda) \neq 0$, то

$$\eta_2^{+*}(\lambda^*) = \frac{\sigma_3^-(\lambda)}{\sigma_1^+(\lambda)} \eta_2^{-*}(\lambda^*), \quad (10.16)$$

если $\sigma_2^-(\lambda) = \sigma_3^-(\lambda) = 0$, то

$$\eta_1^{+*}(\lambda^*) = -\eta_2^{-*}(\lambda^*) \eta_3^{-*}(\lambda^*) \quad (10.17)$$

(При этом $\sigma_1^+(\lambda) = 0$, $\sigma_2^+(\lambda), \sigma_3^+(\lambda) \neq 0$).

Если же $\sigma_1^-(\lambda) = 0$, $\sigma_{2,3}^-(\lambda) \neq 0$ и $(s_3^- s_1^- s_2^-)_{21} \neq 0$, то

$$\eta_2^{+*}(\lambda^*) = \frac{\sigma_3^-(\lambda)}{\sigma_1^+(\lambda)} \eta_2^{-*}(\lambda^*) + \frac{\sigma_2^-(\lambda)}{\sigma_1^+(\lambda)} \eta_1^{-*}(\lambda^*) \eta_3^-(\lambda), \quad (10.18)$$

$$\eta_3^{+*}(\lambda^*) = \frac{\sigma_2^{-*}(\lambda^*)}{\sigma_1^{+*}(\lambda^*)} \eta_3^{-*}(\lambda^*) + \frac{\sigma_3^{-*}(\lambda^*)}{\sigma_1^{+*}(\lambda^*)} \eta_1^{-*}(\lambda^*) \eta_2^-(\lambda).$$

Правые части формул (10.14)-(10.18) следует понимать как результат продолжения их с вещественной оси. В случае, когда сталкивающиеся пакеты финитны, такая процедура всегда возможна. При этом соотношения (10.14)-(10.17) имеют смысл и для любых достаточно быстро убывающих при $|\lambda| \rightarrow \infty$ пакетов. В этом случае величины $\eta_i^{+*}(\lambda^*)$ уже не могут быть получены аналитическим продолжением. Их следует понимать как характеристики асимптотик решений задачи (6.9), т.е. как некоторые спектральные характеристики оператора L , знание которых необходимо для однозначного определения последнего. Величины же $\eta_i^{-*}(\lambda^*)$, фигурирующие в правых частях (10.18) не имеют смысла, если только амплитуды сталкивающихся пакетов не убывают быстрее любой экспоненты (в противном случае $\eta_i(\lambda)$ также как и в случае финитного потенциала аналитичны во всей плоскости). Это означает, что в общем случае столкновения неограниченных пакетов асимптотическая задача Коши для системы (2.7), т.е. задача о восстановлении решения по данной его асимптоти-

ке при $t \rightarrow -\infty$, некорректна. Некорректность этой задачи мы наблюдали уже в § 8: вся совокупность решений (8.17)-(8.19) при всех значениях $|S_{32}|$ имеет асимптотику при $t \rightarrow -\infty$ совпадающую с (8.5). Однако, как следует из результатов настоящего параграфа, асимптотическая задача корректна, если $\sigma_i^-(\lambda)$ не имеет нулей при $\text{Im} \lambda > 0$ или же если амплитуды сталкивающихся пакетов убывают быстрее любой экспоненты по x . (Напомним, что все это относится к случаю промежуточной скорости накачки).

Вернёмся, однако, к случаю финитных пакетов. Итак, мы видим, что положение нулей $\sigma_i^+(\lambda)$ однозначно определяется частичными матрицами рассеяния σ_i^- . Мы нашли, что нули $\sigma_i^-(\lambda)$ либо порождают нули в $\sigma_2^+(\lambda), \sigma_3^+(\lambda)$, (лежащие в тех же самых точках, что и у $\sigma_i^-(\lambda)$) либо остаются у $\sigma_i^+(\lambda)$. Последнее имеет место лишь в случае, когда $\sigma_3^-(\lambda) \gamma_2^+(\lambda) + \sigma_2^-(\lambda) \gamma_1^+(\lambda) = 0$. Ясно однако, что сколь угодно малое изменение амплитуд сталкивающихся пакетов смещает, вообще говоря, нуль последнего выражения из точки λ в близкую к ней точку. При этом, однако, мы уже должны отнести этот нуль в $\sigma_i^-(\lambda)$ к нулям σ_2^+, σ_3^+ , а не к $\sigma_i^+(\lambda)$. В общем случае обращение в нуль указанной комбинации крайне маловероятно (строго говоря, вероятность такого события есть просто нуль). Поэтому мы впредь будем исключать подобную ситуацию. (Ниже мы, однако, опишем поведение решения в этом случае). Т.о. нули в $\sigma_i^+(\lambda)$ возникают только при совпадении нулей σ_2^- и σ_3^- . Обозначим нули $\sigma_i^-(\lambda)$ через $\lambda_i^{(n)}$, при этом совпадающие нули $\sigma_2^-(\lambda)$ и $\sigma_3^-(\lambda)$ (пусть их полное число есть M) занумеруем числами от 1 до M и будем считать, что $\lambda_2^{(n)} = \lambda_3^{(n)}$, $n \leq M$. При этом нули $\sigma_2^+(\lambda)$ есть $\lambda_2^{(n)}$, $n=1, \dots, M$. Нули $\sigma_2^+(\lambda)$ лежат в точках $\lambda_2^{(n)}$, $n=M+1, \dots, N_2$, $\lambda_1^{(n)}$, $n=1, \dots, N_1$, а нули $\sigma_3^+(\lambda)$ - в точках $\lambda_3^{(n)}$, $n=M+1, \dots, N_3$, $\lambda_1^{(n)}$, $n=1, \dots, N_1$. Для определения $\arg \sigma_i^+(\lambda)$ рассмотрим функцию
$$\ln \left(\sigma_i^+(\lambda) \prod_n \frac{\lambda - \lambda_i^{(n)*}}{\lambda - \lambda_i^{(n)}} \right),$$

где $\lambda_i^{(n)}$ - все нули $\sigma_i^+(\lambda)$. Очевидно, что рассматриваемая функция аналитична в верхней полуплоскости и стремится к нулю при $|\lambda| \rightarrow \infty, \text{Im} \lambda \geq 0$. Т.о. имеем:

$$\arg \sigma_i^+(\lambda) = \frac{1}{i} \ln \prod_n \frac{\lambda - \lambda_i^{(n)*}}{\lambda - \lambda_i^{(n)}} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\sigma_i^+(x)| dx}{x' - \lambda} \quad (10.19)$$

Итак, мы полностью определили частичные матрицы перехода S_i^+ . Используя уравнения обратной задачи мы можем теперь, в принципе, полностью определить асимптотику решения при $t \rightarrow \infty$. Однако на наиболее интересные физические вопросы можно ответить и не решая уравнений обратной задачи. Непосредственно из (4.7), (4.8) находим, вычисляя первый член разложения $\ln \sigma_i^+(\lambda)$ по степеням $1/\lambda$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_i^+(x, t)|^2 dx = \frac{q_0^2}{q^2} \left(2 \sum \gamma_m \lambda_i^{(n)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{|\sigma_i^+(\lambda)|^2} d\lambda \right), \quad (10.20)$$

где $u_i^+(x, t)$ - асимптотики $u_i(x, t)$ при $t \rightarrow \pm \infty$, а $\lambda_i^{(n)}$ - нули $\sigma_i^+(\lambda)$. Из (10.19), (10.10) получаем выражения для интегральных интенсивностей возникающих при $t \rightarrow +\infty$ пакетов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_1^+(x, t)|^2 dx = \frac{q_0^2}{q^2} \left(2 \sum_{n=1}^M \gamma_m \lambda_2^{(n)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{|\sigma_1^+(\lambda)|^2} d\lambda \right), \quad (10.21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_2^+(x, t)|^2 dx = \frac{q_0^2}{q^2} \left(2 \sum_{n=1}^{N_1} \gamma_m \lambda_1^{(n)} + 2 \sum_{n=M+1}^{N_2} \gamma_m \lambda_2^{(n)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{|\sigma_2^+(\lambda)|^2} d\lambda \right), \quad (10.22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_3^+(x, t)|^2 dx = \frac{q_0^2}{q^2} \left(2 \sum_{n=1}^{N_1} \gamma_m \lambda_1^{(n)} + 2 \sum_{n=M+1}^{N_3} \gamma_m \lambda_3^{(n)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{|\sigma_3^+(\lambda)|^2} d\lambda \right) \quad (10.23)$$

Рассмотрим наиболее интересные частные случаи. При столкновении интенсивного ($q_{L,1} \gg 1$) пакета накачки с малыми пакетами вторичных волн ($q_{L,2,3} \ll 1$)

для которых $\sigma_{2,3}^-(\lambda)$ не имеют нулей, в формулах (10.22) можно пренебречь интегральными членами. В результате получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_1^+(x,t)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{q_0^2}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} h_n \frac{1}{1 - |\sigma_2^-(\lambda)\sigma_3^-(\lambda)\gamma_1^-(\lambda) + \gamma_2^-(\lambda)\gamma_3^-(\lambda)|^2} d\lambda, \quad (10.24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_2^+(x,t)|^2 dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} |u_3^+(x,t)|^2 dx \approx \frac{2q_0^2}{q^2} \sum_{n=1}^{N_1} \gamma_{n,1}^{(+)}$$

Первоначальная же интенсивность волны накачки есть (см. (10.20))

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_1^-(x,t)|^2 dx \approx \frac{2q_0^2}{q^2} \sum_{n=1}^{N_1} \gamma_{n,1}^{(+)} \quad (10.25)$$

Т.о. мы видим, что в рассматриваемом случае происходит практически полный распад первоначально интенсивной волны накачки.

Вообще для интенсивных пакетов частичные задачи (10.3) существенно упрощаются. Действительно, полагая в (10.3)

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{V_{a\alpha}}} \exp\left(-i \frac{q_a + q_\beta}{2q_a q_\beta} \lambda x\right) \varphi_a, \quad \psi_\beta = \frac{1}{\sqrt{V_{\beta\beta}}} \exp\left(-i \frac{q_a + q_\beta}{2q_a q_\beta} \lambda x\right) \varphi_\beta$$

и пренебрегая членами $\frac{\partial \varphi_{a\beta}}{\partial x}$ получаем для φ_a :

$$-\frac{\partial^2 \varphi_a}{\partial x^2} - V_{a\beta}(x) \varphi_a = \xi^2 \varphi_a \quad (10.26)$$

где $V_{a\beta} = \frac{(q_a - q_\beta)^2}{4q_a q_\beta} |Q_{a\beta}|^2$, $\xi = \frac{\lambda}{2} \gamma_{a\beta}$. При этом потенциал в одномерном уравнении Шредингера (10.26) в случае интенсивных пакетов удовлетворяет условию квазиклассичности $\sqrt{V_{a\beta}} L \gg 1$ и величины $\gamma_i(\lambda)$ оказываются экспоненциально малыми по параметру $\sqrt{V} L$. С точки зрения метода обратной задачи такие потенциалы полностью определяются нулями $\sigma_i(\lambda)$ λ_n и соответствующими величинами $\gamma_i(\lambda_n)$. При этом нули σ_i лежат в точках $\lambda = i\lambda_n$, где $-\lambda_n^2$ - собственные значения (10.26), которые определяются квазиклассическим правилом квантования:

$$\oint \sqrt{V_{a\beta}(x) - \lambda_n^2} dx = 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (10.27)$$

Их полное число $N \sim \sqrt{V} L$ велико.

Поэтому в общем случае столкновения больших пакетов интенсивности возникающих волн описываются формулами (10.21)-(10.23), в которых следует пренебречь вкладами непрерывного спектра.

Заметим, что в случае столкновения интенсивных пакетов вторичных волн появление в асимптотике $t \rightarrow +\infty$ накачки, как правило, не происходит, поскольку совпадение нулей $\sigma_2^-(\lambda)$ и $\sigma_3^-(\lambda)$ - событие весьма маловероятное. Можно, однако, специальным "приготовлением" пакетов 2 и 3 добиться совпадения нулей σ_2^- и $\sigma_3^-(\lambda)$. Если, в частности, $\frac{u_2^-(x)}{\sqrt{|V_2 - V_1|}} = \frac{u_3^-(x)}{\sqrt{|V_3 - V_1|}}$, то, как легко видеть, частичные матрицы перехода S_2^- и S_3^- полностью совпадают. При этом, если пакеты u_2 и u_3 удовлетворяют условию квазиклассичности, произойдет практически полное слияние вторичных волн в волну накачки. Однако, поскольку условие квантования (10.27) весьма чувствительно к малым изменениям $V_{a\beta}(x)$, то очевидно, возникновение интенсивной волны накачки происходит лишь на промежуточной стадии; асимптотически же, при $t \rightarrow +\infty$, она распадается. Аналогичная ситуация имеет место если какие-либо нули σ_2^- и $\sigma_3^-(\lambda)$ очень близки друг к другу. В этом случае можно утверждать, что процесс рассеяния пакетов вторичных волн происходит поэтапно. В результате взаимодействия на первом этапе возникают все три пакета, расстояние между которыми может быть велико. При этом интенсивность волны накачки есть

$$\int |u_1(x,t)|^2 dx = \frac{2q_0^2}{q^2} \sum \gamma_{n,1}^{(+)}$$

где суммирование ведется по нулям $\sigma_2^-(\lambda)$, близким к нулям $\sigma_3^-(\lambda)$, а амплитуды пакетов 2 и 3 в области локализации пакета накачки малы, но всё же отличны от нуля. Время существования такого промежуточного состояния может быть очень велико.

Наконец, на последнем этапе происходит практически полный распад накачки. Простые оценки показывают, что время жизни промежуточного состояния зависит от расстояния $\Delta\lambda$ между близкими нулями σ_2^- и σ_3^- как $\ln 1/|\Delta\lambda|$.

Аналогичное явление образования "промежуточной асимптотики" имеет место и в случае столкновения пакета накачки с пакетами вторичных волн, если величина $\varepsilon(\lambda) = \sigma_3^-(\lambda)\eta_2^*(\lambda) + \sigma_2^-(\lambda)\eta_1^*(\lambda)\eta_3^-(\lambda)$ в нуле $\sigma_1^-(\lambda)$ мала. Если $\varepsilon = 0$, то как было показано выше, нуль $\sigma_1^-(\lambda)$ приводит не к нулям $\sigma_2^+(\lambda)$, $\sigma_3^+(\lambda)$, а к нулю $\sigma_1^+(\lambda)$, что, согласно (10.20) означает сохранение соответствующего вклада в интегральной интенсивности накачки при $t \rightarrow +\infty$. Случай же малого ε , означает, как легко понять, возникновение промежуточного состояния описанного выше типа. Время жизни такого состояния зависит от ε логарифмическим образом.

Формулы (10.20), (10.10) показывают также, что при рассеянии "малых" пакетов, для которых $\sigma_1^-(\lambda)$ не имеют нулей, интегральные интенсивности волн при $t \rightarrow \pm\infty$ одного порядка. При столкновении малых пакетов вторичных волн, например, происходит рождение накачки, интенсивность которой есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_1^+(x,t)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{q_0^2}{q_2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{1 - |\eta_2^-\eta_3^-|^2} d\lambda$$

Подчеркнем, однако, что отсутствие нулей $\sigma_1^-(\lambda)$ вовсе не означает малости $u_1(x)$. Амплитуда пакета (и его интегральная интенсивность) может быть при этом сколь угодно большой, если только спектральная ширина пакета достаточно велика. Однако в этом случае мощный (но достаточно широкий в k -пространстве) пакет накачки при столкновении с малыми (уже в смысле малости амплитуд) пакетами вторичных волн практически не распадается и даже мало меняет свою форму. Только такая ситуация и может рассматриваться в приближении заданного поля накачки. Действительно, частичная матрица перехода $S_1^+(\lambda)$ близка к $S_1^-(\lambda)$, как видно из (10.10), если только $\sigma_1^-(\lambda)$ не имеет нулей и $|\eta_2^-(\lambda)\eta_3^-(\lambda)| \ll |\eta_1^-(\lambda)|$. В этом, собственно, и состоит критерий применимости приближения заданного поля накачки в случае, когда скорость накачки не является экстремальной.

Сформулируем основной результат настоящего параграфа. Достаточно интенсивная волна накачки, удовлетворяющая условию квазиклассичности, при столкновении с любыми пакетами вторичных волн полностью распадается. При этом процесс взаимодействия может сопровождаться появлением "промежуточных асимптотик", а остаточная интенсивность накачки уменьшится с увеличением её амплитуды на "входе".

§ 11. Распадное взаимодействие. Рассеяние пакетов.

Случай экстремальной скорости накачки

В большинстве физических ситуаций групповая скорость волны накачки больше (по модулю) скоростей возникающих при её распаде вторичных волн. Как видно из соотношения (3.17) это возможно лишь при $q_3 < 0$ (если $q_1, q_2 > 0$). Положим, для определенности, $v_1 > v_3 > v_2$. Так же как и в случае $q_3 > 0$, из системы уравнений обратной задачи (7.36) следует, что при $t \rightarrow \pm\infty$ решение системы (2.7) для произвольного достаточно быстро убывающего при $|x| \rightarrow \infty$ начального условия распадается на отдельные невзаимодействующие пакеты. Т.о. матрица перехода может быть представлена в виде произведения частичных матриц перехода

$$S(t) = S_1^-(t) S_3^-(t) S_2^-(t), \quad t \rightarrow -\infty \quad (11.1)$$

или

$$S(t) = S_2^+(t) S_3^+(t) S_1^+(t), \quad t \rightarrow +\infty \quad (11.2)$$

Взяв (11.1), (11.2) при $t=0$ получаем

$$S_2^+ S_3^+ S_1^+ = S_1^- S_3^- S_2^- \quad (11.3)$$

Так же как и в предыдущем параграфе, мы прежде всего найдем S_1^+ по данным S_1^- .

Частичные матрицы перехода S_1^+ , по-прежнему, определяется из системы (10.3), а их элементы удовлетворяют соотношению (10.4). Вместо матрицы S рассмотрим матрицу S с элементами

$$S_{ik} = \sqrt{\frac{|a_{i1}|}{|a_{k1}|}} S_{ik} \quad (11.4)$$

Ввиду (5.12)

$$S^+ = \Gamma S^{-1} \Gamma \quad (11.5)$$

где Γ - диагональная матрица с элементами $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = -\Gamma_{33} = 1$. Обозначим, далее, элементы частичных матриц S_i^\pm следующим образом:

$$S_1^\pm = \begin{pmatrix} \sigma_1^{\pm*} & 0 & \eta_1^{\pm*} \\ 0 & 1 & 0 \\ \eta_1^\pm & 0 & \sigma_1^\pm \end{pmatrix}, \quad S_2^\pm = \begin{pmatrix} \sigma_2^\pm & \eta_2^\pm & 0 \\ -\eta_2^{\pm*} & \sigma_2^{\pm*} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3^\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3^{\pm*} & \eta_3^{\pm*} \\ 0 & \eta_3^\pm & \sigma_3^\pm \end{pmatrix}. \quad (11.6)$$

(Введённые обозначения учитывают свойства (10.4) элементов частичных матриц).

Унимодулярность матриц S_i^\pm означает, что

$$|\sigma_1|^2 - |\eta_1|^2 = 1, \quad |\sigma_3|^2 - |\eta_3|^2 = 1, \quad |\sigma_2|^2 + |\eta_2|^2 = 1 \quad (11.7)$$

при вещественных λ . Заметим, что $\sigma_i(\lambda)$ аналитичны в верхней полуплоскости λ , причём функции $\sigma_1(\lambda)$, $\sigma_3(\lambda)$ не могут там обращаться в нуль, что следует непосредственно из (11.7). Функции же $\sigma_2^\pm(\lambda)$, вообще говоря, могут иметь нули в верхней полуплоскости.

Задание функций $\sigma_i^\pm(\lambda)$, $\eta_i^\pm(\lambda)$ и $\sigma_3^\pm(\lambda)$, $\eta_3^\pm(\lambda)$ при вещественных λ , как видно из системы уравнений обратной задачи (7.36) полностью определяет амплитуды пакетов $u_1^\pm(x,t)$, $u_3^\pm(x,t)$. Для однозначного определения $u_2^\pm(x,t)$, кроме σ_2^\pm , η_2^\pm необходимо также задать значения $\eta_2^\pm(\lambda)$ в нулях $\sigma_2^\pm(\lambda)$. Все эти величины при $t \rightarrow \pm\infty$ легко находятся по данным при $t \rightarrow -\infty$ непосредственно из (11.3):

$$|\sigma_1^+|^2 = \frac{|\sigma_1^-|^2 |\sigma_3^-|^2}{1 + |S_{32}|^2}, \quad |\sigma_2^+|^2 = \frac{|\sigma_2^-|^2 |\sigma_3^-|^2}{1 + |S_{32}|^2}, \quad |\sigma_3^+|^2 = 1 + |S_{32}|^2 \quad (11.8)$$

$$\eta_1^+ = \frac{S_{31}}{\sigma_3^+}, \quad \eta_2^+ = \frac{S_{12}}{\sigma_3^{\pm*}}, \quad \eta_3^+ = S_{32}, \quad (11.9)$$

где

$$S_{32} = \sigma_1^- \sigma_2^{\pm*} \eta_3^- + \eta_1^- \eta_2^-, \quad S_{12} = \sigma_1^- \eta_2^- - \sigma_2^{\pm*} \eta_1^- \eta_3^-, \quad (11.10)$$

$$S_{31} = \sigma_2^- \eta_1^- - \sigma_1^- \eta_2^{\pm*} \eta_3^-.$$

Нетрудно также видеть, что все нули $\sigma_2^\pm(\lambda)$ совпадают с нулями $\sigma_2^-(\lambda)$. В них

$$\eta_2^+(\lambda) = \frac{\sigma_1^{\pm*}(\lambda^*)}{\sigma_3^{\pm*}(\lambda^*)} \eta_2^-(\lambda). \quad (11.11)$$

Восстанавливая аргументы $\sigma_i^\pm(\lambda)$, получаем:

$$\arg \sigma_1^+(\lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\sigma_1^+(\lambda')|^2}{\lambda' - \lambda} d\lambda', \quad \arg \sigma_3^+(\lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\sigma_3^+(\lambda')|^2}{\lambda' - \lambda} d\lambda', \quad (11.12)$$

$$\arg \sigma_2^+(\lambda) = \frac{1}{i} \ln \prod \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \lambda_n^*} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\sigma_3^+(\lambda')|^2}{\lambda' - \lambda} d\lambda'.$$

Формулы (11.8)-(11.12) полностью определяют частичные матрицы перехода $S_i^\pm(\lambda)$.

Интегральные интенсивности возникающих при $t \rightarrow \pm\infty$ пакетов могут быть выражены непосредственно через $\sigma_i^\pm(\lambda)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_i^\pm(x,t)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{q_0^2}{q_2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |\sigma_i^\pm(\lambda)|^2 d\lambda \quad (11.13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_2^{\pm}(x,t)|^2 dx = \frac{q_0^2}{q^2} \left(2 \sum Y_m \lambda_m + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{|\sigma_2^{\pm}(\lambda)|^2} d\lambda \right), \quad (11.14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_3^{\pm}(x,t)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{q_0^2}{q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |\sigma_3^{\pm}(\lambda)|^2 d\lambda. \quad (11.15)$$

Перейдём теперь к рассмотрению конкретных ситуаций. Прежде всего заметим, что если на "входе" имелся интенсивный пакет волны 2, то $\psi_2^{\pm}(\lambda)$ - экспоненциально малые величины и при $t \rightarrow -\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_2^{\pm}(x,t)|^2 dx \approx 2 \frac{q_0^2}{q^2} \sum Y_m \lambda_m.$$

Ввиду того, что $\sigma_2^{\pm}(\lambda)$ наследует нули $\sigma_2^{\pm}(\lambda)$ этот (большой) вклад от дискретной части спектра сохраняется и в интенсивности второй волны при $t \rightarrow \infty$. Если, при этом, амплитуда накачки была мала, то, как легко видеть из (11.10), (11.8), (11.13), даже при наличии интенсивного пакета $u_2^{\pm}(x)$, рождения накачки при $t \rightarrow +\infty$ не происходит. Нетрудно также видеть, что при столкновении мощных пакетов накачки и волны 2 относительное изменение интенсивности накачки экспоненциально мало по параметру $\frac{qL_2 u_2}{v} \gg 1$, где u_2 и L_2 - характерные амплитуда и длина пакета 2.

Малое изменение интенсивности накачки (и её формы) происходит и при столкновении накачки с малыми пакетами вторичных волн. При этом выражение для амплитуд этих пакетов могут быть получены в приближении заданного поля накачки, критерий применимости которого в случае экстремальной скорости накачки имеет вид (2.11).

Нетривиальная динамика имеет место при столкновении интенсивных пакетов волны накачки и волны 3^{x)}. Предполагая выполненными условия $\frac{q u_1 L_1}{v} \gg 1$ и совершая в уравнениях (10.3) замену $\frac{q u_3 L_3}{v} \gg 1$

$$\psi_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|a_{\alpha}|}} \exp\left(-i \frac{a_{\alpha} + q_{\beta}}{2a_{\alpha} q_{\beta}} \lambda x\right) \varphi_{\alpha}$$

$$\psi_{\beta} = \frac{1}{\sqrt{|a_{\beta}|}} \exp\left(-i \frac{a_{\alpha} + q_{\beta}}{2a_{\alpha} q_{\beta}} \lambda x\right) \varphi_{\beta}$$

получаем уравнение на $\varphi_{\alpha, \beta}$:

$$-\frac{\partial^2 \varphi_{\alpha, \beta}}{\partial x^2} + V_{\alpha \beta}(x) \varphi_{\alpha, \beta} = \xi^2 \varphi_{\alpha, \beta} \quad \text{если } a_{\beta} < 0. \quad (11.16)$$

Здесь $V_{\alpha \beta} = \frac{(a_{\alpha} - q_{\beta})^2}{|a_{\alpha} q_{\beta}|} |Q_{\alpha \beta}(x)|^2$, $\xi = \frac{a_{\alpha} - q_{\beta}}{2a_{\alpha} q_{\beta}} \lambda$.

Уравнение (11.6) имеет вид уравнения Шредингера для частицы в положительном потенциале (потенциальный барьер). Для достаточно гладких пакетов движение частицы в таком потенциале почти при всех значениях импульса (ξ) является квазиклассическим. Поэтому для вычисления $|\sigma_3^{\pm}(\lambda)|$ можно воспользоваться хорошо известными формулами квазиклассического приближения. Предполагая, что амплитуды пакетов $|u_1^{\pm}(x,t)|$ и $|u_3^{\pm}(x,t)|$ имеют всего один максимум, получаем:

$$|\sigma_3^{\pm}(\lambda)| = \begin{cases} 1, & \lambda^2 > \frac{q^2}{q_0^2} \frac{4a_1 |a_3|}{a_2 + |a_3|} \max |u_1^{\pm}(x)|^2 = \lambda_1^2 \\ \exp \int \sqrt{\frac{a_1 + |a_3|}{a_1 |a_3|} |u_1^{\pm}(x)|^2 \frac{q^2}{q_0^2} - \frac{(a_1 + |a_3|)^2}{4a_1^2 a_3^2}} \lambda^2 dx, & \lambda^2 < \lambda_1^2 \end{cases} \quad (11.17)$$

^{x)} Отметим, что номера вторичных волн фиксируются их скоростями. Волна 3 имеет промежуточную скорость, а волна 2 - экстремальную. Если бы нам потребовалось сделать соотношение скоростей волн обратным, нам пришлось бы положить в операторе L $a_2 < 0$.

$$|\sigma_3^-(\lambda)| = \begin{cases} 1, & \lambda^2 > \frac{q^2}{q_0^2} \frac{4a_2|a_3|}{a_2+|a_3|} \max |u_3^-(x)|^2 = \lambda_3^2 \\ \sqrt{\frac{a_2+|a_3|}{a_2|a_3|} |u_3^-(x)|^2 \frac{q^2}{q_0^2} - \frac{(a_2+|a_3|)^2}{4a_2^2 a_3^2} \lambda^2}, & \lambda^2 < \lambda_3^2. \end{cases} \quad (11.18)$$

Формулы (11.17), (11.18) справедливы при всех λ за исключением узкой области вблизи $\xi^2 \approx \max V_{\text{пр}}(x)$, которая даёт малый вклад в выражения (11.13)–(11.15).

В частности случае, когда при $t \rightarrow -\infty$ пакет волны 2 отсутствует, из (11.13)–(11.15), (11.8), (11.10) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_1^+(x,t)|^2 dx = \frac{q_0^2}{2\pi q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{|\sigma_1^-(\lambda)|^2 |\sigma_3^-(\lambda)|^2}{1 - |\sigma_1^-|^2 + |\sigma_1^-|^2 |\sigma_3^-|^2} d\lambda, \quad (11.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_2^+(x,t)|^2 dx = \frac{q_0^2}{2\pi q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1 - |\sigma_1^-|^2 + |\sigma_1^-|^2 |\sigma_3^-|^2}{|\sigma_3^-|^2} d\lambda \quad (11.20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_3^+(x,t)|^2 dx = \frac{q_0^2}{2\pi q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln (1 - |\sigma_1^-|^2 + |\sigma_1^-|^2 |\sigma_3^-|^2) d\lambda \quad (11.21)$$

Из (11.17), (11.18), (11.19) видно, что если $\lambda_1^2 < \lambda_3^2$, т.е. если

$$\max |u_3^-(x)|^2 > \frac{a_1(a_2+|a_3|)}{a_2(a_1+|a_3|)} \max |u_1^-(x)|^2, \quad (11.22)$$

то интеграл в правой части (11.19) экспоненциально мал, т.е. накачка почти полностью распадается. Т.о. (11.22) представляет собой условие уничтожения накачки при столкновении интенсивных пакетов волн 1 и 3. Исключая из (11.22) величины q_i с помощью соотношения (3.17), находим, что условие полного распада накачки есть

$$\max |u_3^-(x)|^2 > \frac{|V_1 - V_2|}{|V_3 - V_2|} \max |u_1^-(x)|^2. \quad (11.23)$$

Важно отметить, что для квазиклассических пакетов условие распада накачки определяется только максимальными амплитудами пакетов. При этом остаточная интенсивность накачки тем меньше, чем больше интенсивности сталкивающихся пакетов. Если же $\lambda_1^2 > \lambda_3^2$, то

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u_1^+(x,t)|^2 dx &= \frac{q_0^2}{\pi q^2} \int_{\lambda_3}^{\lambda_1} \ln |\sigma_1^-(\lambda)|^2 d\lambda = \\ &= \frac{q_0^2}{\pi q^2} \int_{\lambda_3}^{\lambda_1} d\lambda \int dx \sqrt{\frac{a_1+|a_3|}{a_1|a_3|} \frac{q^2}{q_0^2} |u_1^-(x)|^2 - \frac{(a_1+|a_3|)^2}{4a_1^2 a_3^2} \lambda^2}. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования и производя простые вычисления, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u_1^+(x,t)|^2 dx &= \int \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \gamma \frac{\max |u_3^-(x)|}{|u_1^-(x)|} \right\} |u_1^-(x)|^2 dx - \\ &- \frac{2}{\pi} \gamma \max |u_3^-(x)| \int \sqrt{|u_1^-(x)|^2 - \gamma^2 \max |u_3^-(x)|^2} dx, \quad \gamma = \sqrt{\frac{|V_3 - V_2|}{|V_1 - V_2|}} \end{aligned} \quad (11.24)$$

Интегрирование в (11.24) ведётся по области, где

$$|u_1(x)| > \gamma \max |u_3(x)|.$$

Полученное выражение справедливо и в случае, когда пакеты 1 и 3 имеют несколько максимумов. Необходимо, лишь, чтобы только один максимум $|u_3(x)|$ был больше $\gamma \max |u_3(x)|$. Интенсивности вторичных волн, образующихся в результате столкновения получаются из (11.24) и соотношений Мэнли-Роу (2.6).

Отметим следующие замечательные обстоятельства. Как следует из (11.24) интегральные интенсивности возникающих волн не зависят от формы пакета волны 3 и определяются только максимальным значением его амплитуды. Результат взаимодействия не зависит также от величины константы взаимодействия q . Однако критерий квазиклассичности пакетов ($q|u|L/v \gg 1$) выполняется и для пакетов со сколь угодно малой амплитудой, если $q \rightarrow \infty$. Таким образом, в пределе больших q результат столкновения пакетов (точнее говоря интегральные интенсивности образующихся пакетов) не зависит от q — эффективная константа взаимодействия "перенормируется" и становится конечной.

Заметим, наконец, что (11.24) не содержит фазы сталкивающихся пакетов, что является результатом предположения о "гладкости" функций $Q_{\alpha\beta}(x)$, сделанного при выводе уравнения (11.16), для чего необходимо, чтобы фазы пакетов достаточно медленно менялись по x .

Л и т е р а т у р а

1. Б.Б.Кадоццев, В.И.Карпман. УФН 103, 193 (1971).
2. Н.Бломберген. Нелинейная оптика "Мир". М. (1966).
3. В.Е.Захаров. ПМТФ 6, вып.2, стр.86 (1968).
4. Ф.Пайерлс. Квантовая теория твёрдых тел. М. (1956).
5. А.И.Ахиезер, В.Г.Барьяхтар. Спиновые волны, "Наука", М. (1967).
6. J.A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, P.S. Pershan
Phys. Rev. 127, 1918 (1962) (см. /1/).
7. M. Rosenbluth, B. Coppi, R. Sudan, Proc. 3rd Intern. Conf. Plasma
Phys. and Controlled Nuclear Research, Novosibirsk, 1968.
8. C. Gardner, G. Been, M. Kruskal, R. Miura.
Phys. Rev. Lett. 19 1095 (1967).
9. P.D. Lax. Comm. Pure and Appl. Math. 21 467 (1968)
21 467 (1968).
10. В.Е.Захаров, Л.Д.Фаддеев. "Функциональный анализ", 5, вып.4, стр.18 (1971).
11. А.Б.Шабат. ДАН, 211 1310 (1973).
12. В.Е.Захаров. ЖЭТФ 60 993 (1971).
13. А.Б.Шабат. "Динамика сплошной среды". Вып. 5, 130 (1970).
14. M. Wadati, M. Toda. J. Phys. Soc. Japan . 32 1403 (1972).
15. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. ЖЭТФ 61, 118 (1971).
16. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. ЖЭТФ 64 1627 (1973).
17. С.В.Манаков. ЖЭТФ 65, 505 (1973).
18. С.В.Манаков. ЖЭТФ 65 1392 (1973).
19. В.Е.Захаров, С.В.Манаков. Препринт ИЯФ 68-73. ТМФ (в печати).
20. M. Wadati. J. Phys. Soc. Japan . 34 1280 (1973).
21. В.Е.Захаров. ЖЭТФ 65 219 (1973).
22. G.L. Lamb. Jr. IEEE, J. of Quant. Elect. QE-8,
569 (1972).
23. Л.А.Тахтаджян. ЖЭТФ 66 476 (1974).
24. M.Y. Ablowitz, P.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur
Phys. Rev. Lett. 30, 1262 (1973).
25. В.Е.Захаров, Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. ДАН (в печати).
26. С.В.Манаков. Препринт ИЯФ - 74, ЖЭТФ (в печати).
27. В.Е.Захаров, С.В.Манаков. Письма в ЖЭТФ, 18 413 (1973).

Ответственный за выпуск С.Н.РОДИОНОВ
Подписано к печати I.УП.74г., МН 09379
Усл.печ.л. 3 , тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 41

Отпечатано на ротапинтере в ИЯФ СО АН СССР