14

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 74 - 32

С.В.Манаков

О ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ И СТОХАСТИЗАЦИИ В ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Новосибирск

1974

О ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ И СТОХАСТИЗАЦИИ В ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

С.В.Манаков

АННОТАЦИЯ

С помощью метода обратной задачи рассеяния исследуются система частиц с экспоненциальным взаимодействием между ними (цепочка Тода) и система уравнений, описывающая индуцированное рассеяние плазменных колебаний на ионах.

Вопрос о возможности статистического описания некоторой консервативной динамической системы приводит к проблеме определения времени стохастизации этой системы. Уже первые экспериментальные исследования в этом направлении (Ферми, Паста и Улам [1]), имевшие целью выяснить поведение цепочки связанных осцилляторов с квадратичной нелинейностью,

$$\ddot{x}_n = (x_{n+1}-x_n)-(x_n-x_{n-1})+\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)^2-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})^2 \quad (1)$$

показали, что время стохастизации в этой системе оказывается аномально большим, а движение системы (1) на протяжении достаточно большого времени имеет ярко выраженный квазипериодический характер. Позже аналогичное поведение обнаружили и некоторые континуальные системы (например, система, описываемая известным уравнением Кортевега-де-Вриза [2]). Однако в последнем случае ситуация оказалась в известном смысле проще: как показали Захаров и Фаддеев [3] уравнение КДВ представляет собой полностью интегрируемую гамильтоновскую систему, в которой стохастизация вообще невозможна, тогда как в последующих численных экспериментах [4], по-видимому, было показано, что стохастичность в системе (1) все-таки развивается, хотя и за очень большие времена. Неожиданное объяснение столь странного поведения цепочки Ферми-Паста-Улама было предложено Захаровым в работе [5], где была убедительно обоснована гипотеза о полной интегрируемости континуального предела системы (1) - уравнения нелинейной струны

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^2)_{xx} + \frac{1}{4}u_{xxxx} \quad (2)$$

Немедленным следствием полной интегрируемости (2) является то, необъяснимое ранее обстоятельство, что время стохастизации цепочки (1) не имеет никакого отношения к характерному времени, определяемому нелинейным членом в (1). Время стохастизации, т.о. определяется "отклонением" системы (1) от ее континуального аналога (2), которое в типичных экспериментах было мало.

Однако цепочка (1) демонстрирует все то же странное поведение даже если начальные данные для нее существенно зависят от номера n и, тем самым, не обеспечивают возможности замены ее континуальным аналогом. Еще более интересным поведением обладает дискретная цепочка с экспоненциальным взаимодействием между частицами, введенная в рассмотрение Тодой [6]:

$$\ddot{x}_n = e^{x_{n+1}-x_n} - e^{x_n-x_{n-1}} \quad (3)$$

которая при малых смещениях частиц переходит в (1) с точностью до членов $\sim (\Delta x)^3$. Было замечено, что система (3) имеет решение типа уединенных волн-солитонов, распространяющихся без искажения формы. Более того, были найдены [7] точные решения (3), описывающие столкновения солитонов, причем оказалось, что солитоны практически не взаимодействуют между собой – в результате столкновения образуются те же солитоны, что и до столкновения. Совершенно аналогичная ситуация имеет место в полностью интегрируемых континуальных системах - КДВ [8,9], уравнении нелинейной струны [10], нелинейном уравнении Шредингера [11], т.е. системах, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния (см.напр. [12]). В связи с этим была высказана гипотеза, что система (3) также может быть рассмотрена в рамках этого метода и является полностью интегрируемой, что и доказывается в настоящей работе.

Для произвольной цепочки нелинейных осцилляторов типа (1) с квадратичной и кубичной нелинейностью факт интегрируемости цепочки Тода означает, что время стохастизации цепочки осцилляторов определяется ее отклонением от системы (3) и для определенных классов начальных условий может быть очень велико.

Другим физически важным примером интегрируемой дискретной системы является совокупность уравнений

$$\dot{N}_k = N_k (N_{k+1} - N_{k-1}) \qquad (4)$$

Эта система возникает при изучении тонкой структуры спектров ленгмюровских колебаний в плазме [13]. Поясним ее происхождение. Как показано в [14], при практически любом способе возбуждения ленгмюровских колебаний стационарный спектр ленгмюровской турбулентности оказывается сильно анизотропным – колебания сосредоточены на линиях ("струях") в k – пространстве. Перенос энергии ленгмюровских колебаний по спектру происходит за счет индуцированного рассеяния колебаний на ионах и описывается кинетическим уравнением для числа плазмонов:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = n_k \int T_{kk'} \, n_{k'} \, dk' \qquad (5)$$

где ядро $T_{kk'}$ антисимметрично по своим аргументам. В силу упомянутого "струйного" характера спектра это уравнение является одномерным. В плазме с холодными ионами основным механизмом индуцированного рассеяния является возбуждение ионного звука и ядро $T_{kk'}$ принимает δ –образный вид: $T_{kk'} = T(\delta_{k-k'+\varkappa} - \delta_{k-k'-\varkappa})$. При этом уравнение (5) превращается в

набор систем типа (4). Естественными граничными условиями для уравнения (4) являются $N_k \to const$, $k \to \pm\infty$. Система (4) описывает при этом распространение спектрального пакета ленгмюровских колебаний на фоне теплового шума. Уравнение (4) также имеет решение солитонного типа, которое было получено в [13]. Как показано ниже это уравнение также может быть исследовано с помощью метода обратной задачи. При этом оказывается, что формализмы обратных задач, связанных с системами (3), (4), по сути дела совпадают, что и оправдывает их изложение в рамках одной работы. Рассмотрение этих систем ведется всюду параллельно.

Перечислим основные результаты настоящей работы.

Показана полная интегрируемость системы (3) с периодическими граничными условиями, т.е. интегрируемость цепочки Тода на кольце. Указан весьма обширный класс полностью интегрируемых систем, являющихся, в некотором смысле, обобщениями уравнения (3). Для бесконечных дискретных цепочек (3), (4) развит формализм обратной задачи, позволяющий сводить решение задачи Коши для этих уравнений к изучению некоторых систем линейных уравнений. Рассматривается задача о взаимодействии солитонов в цепочках (3), (4), которая как оказывается, может быть решена, исходя из весьма общих соображений, даже без привлечения уравнений обратной задачи, аналогично тому, как это было сделано для некоторых континуальных систем в работах [15,16].

Отметим, наконец, что континуальным аналогом цепочки Тода (3) является уравнение нелинейной струны (2). Система же (4) имеет своим аналогом уравнение КДВ. С физической точки зрения это соответствие тривиально. Математическая же природа этих аналогий гораздо глубже: операторы, с помощью которых интегрируются рассматриваемые системы в континуальном пределе, переходят в соответствующие операторы уравнений нелинейной струны [5] и КДВ [12].

1. L–A – пары и полная интегрируемость

Как известно (см.например [13]), метод обратной задачи может быть применен к некоторому нелинейному уравнению, если оно представляется в виде:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L, A] \qquad (6)$$

где L и A – пара линейных операторов, устроенная некоторым образом из функций, входящих в рассматриваемое уравнение.

С системой (3) связана следующая $L-A$ пара бесконечных матриц:

$$L_{nm} = i\sqrt{c_n}\,\delta_{n,m+1} - i\sqrt{c_m}\,\delta_{n+1,m} + v_n\,\delta_{n,m} \tag{7}$$

$$A_{nm} = \frac{i}{2}\left(\sqrt{c_n}\,\delta_{n,m+1} + \sqrt{c_m}\,\delta_{n+1,m}\right) \tag{8}$$

где индексы n и m пробегают все целые числа, $c_n = e^{x_n - x_{n-1}}$, $v_n = \dot{x}_n$, а $\delta_{n,m}$ – символ Кронеккера.

Система (4) может быть записана в виде (6) с помощью операторов

$$L_{nm} = i\sqrt{N_n}\,\delta_{n,m+1} - i\sqrt{N_m}\,\delta_{n+1,m} \tag{9}$$

$$A_{nm} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{N_n N_{n-1}}\,\delta_{n,m+2} - \sqrt{N_m N_{m-1}}\,\delta_{n+2,m}\right) \tag{10}$$

в чем можно убедиться непосредственным вычислением. Отметим, что оператор (9) является частным случаем оператора L (7) и получается из последнего при $v_n \equiv 0$. Это обстоятельство и позволяет рассматривать обе задачи одновременно.

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора L (7):

$$L\psi = \lambda\psi \tag{11}$$

где ψ представляет собой бесконечный столбец чисел:

$$i\sqrt{c_n}\,\psi_{n-1} - i\sqrt{c_{n+1}}\,\psi_{n+1} + v_n\psi_n = \lambda\psi_n \tag{11a}$$

Эрмитовость L (7) и соотношение (6) гарантируют сохранение во времени спектра оператора L, т.е. для всех λ $\dot{\lambda} = 0$ и все собственные значения L оказываются интегралами движения системы (3). То же самое относится и к оператору L (9).

Для цепочки Тода (3), состоящей из N частиц с периодическими условиями ($c_{n+N} = c_n$, $v_{n+N} = v_n$), будем рассматривать задачу (11) также в классе периодических функций, полагая $\psi_{n+N} = \psi_n$. При этом бесконечная матрица (7) редуцируется до эрмитовской матрицы $N \times N$, имеющей N независимых собственных значений. Эта матрица имеет вид:

$$L = \left\| \begin{matrix} v_1 & -i\sqrt{c_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & +i\sqrt{c_1} \\ i\sqrt{c_2} & v_2 & -i\sqrt{c_3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{c_3} & v_3 & -i\sqrt{c_4} & \cdots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & i\sqrt{c_{N-1}} & v_{N-1} & -i\sqrt{c_N} \\ -i\sqrt{c_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & i\sqrt{c_N} & v_N \end{matrix} \right\| \tag{12}$$

а ее собственные значения λ_i удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\det \| L - \lambda I \| = 0 \tag{13}$$

где I – единичная матрица.

Сейчас мы покажем, что все собственные значения λ_i находятся в инволюции, т.е. скобка Пуассона любой пары λ_i, λ_j равна нулю (собственные значения L "коммутируют" между собой).

Система (3) является гамильтоновской. Ее гамильтониан

$$H = \sum_n \frac{v_n^2}{2} + e^{x_{n+1} - x_n} \tag{14}$$

а v_n и x_n – канонически сопряженные переменные. В этих переменных скобка Пуассона некоторой пары величин S и T записывается обычным образом:

$$\{S,T\} = \sum_n \frac{\delta S}{\delta x_n}\frac{\delta T}{\delta v_n} - \frac{\delta S}{\delta v_n}\frac{\delta T}{\delta x_n} \tag{15}$$

В переменных c_n, v_n (15) имеет вид:

$$\{S,T\} = \sum_n c_n\left(\frac{\delta S}{\delta c_n}\frac{\delta T}{\delta v_n} - \frac{\delta S}{\delta v_n}\frac{\delta T}{\delta c_n}\right) - c_{n+1}\left(\frac{\delta S}{\delta c_{n+1}}\frac{\delta T}{\delta v_n} - \frac{\delta S}{\delta v_n}\frac{\delta T}{\delta c_{n+1}}\right) \tag{16}$$

Вычислим теперь вариационные производные $\delta\lambda_i/\delta c_n$, $\delta\lambda_i/\delta v_n$

Для этого воспользуемся известной формулой теории возмущений, определяющей изменения собственных чисел оператора при малом изменении последнего:

$$\delta\lambda = \langle \psi | \delta L | \psi \rangle \tag{17}$$

Здесь ψ - нормированная на единицу собственная функция L. Используя (11а), (17), имеем:

$$\frac{\delta\lambda_j}{\delta c_n} = \frac{i}{2}\frac{1}{\sqrt{c_n}}\left(\psi_n^*(j)\psi_{n-1}(j) - \psi_{n-1}^*(j)\psi_n(j)\right) \tag{18}$$

$$\frac{\delta\lambda_j}{\delta v_n} = \psi_n^*(j)\psi_n(j)$$

где $\psi_n(j)$ - собственная функция L с $\lambda = \lambda_j$.

Заметим, далее, что для любых двух собственных функций оператора L справедливо следующее, непосредственно следующее из (11а), соотношение:

$$(\lambda_i - \lambda_j)\psi_n^*(j)\psi_n(i) = W_n\left(\psi^*(j)\psi(i)\right) - W_{n+1}\left(\psi^*(j)\psi(i)\right), \tag{19}$$

где

$$W_n\left(\psi^*(j)\psi(i)\right) = i\sqrt{c_n}\left(\psi_n^*(j)\psi_{n-1}(i) - \psi_{n-1}^*(j)\psi_n(i)\right)$$

Вычисляя теперь $\{\lambda_i, \lambda_j\}$ (16), нетрудно убедиться, используя (18), (19), что

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}\sum_{n=1}^{N}\left\{|W_{n+1}(\psi^*(i)\psi(j))|^2 - |W_n(\psi^*(i)\psi(j))|^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}\left\{|W_{N+1}(\psi^*(i)\psi(j))|^2 - |W_1(\psi^*(i)\psi(j))|^2\right\}$$, что,

при наложении периодических граничных условий, обращается в нуль.

Тем самым мы показали, что гамильтоновская система (3) с N степенями свободы имеет N интегралов движения, коммутирующих между собой, что, в силу известной теоремы Лиувилля (см.например [17]), означает полную интегрируемость рассматриваемой системы.

Заметим еще, что гамильтониан H (14) выражается через след квадрата матрицы L (12):

$$H = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, L^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\lambda_n^2 . \tag{20}$$

Согласно упомянутой теореме Лиувилля величины λ_i могут быть в качестве канонических действий системы (3). Формула (20) демонстрирует гамильтониан (14) в этих переменных. Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство: тот факт,что все собственные значения L (12) коммутируют, никак не связан с конкретным видом системы (3), а следует непосредственно из вида скобок Пуассона (15). Поэтому мы можем утверждать, что полностью интегрируемой является любая система вида:

$$\dot{x}_n = \frac{\delta H}{\delta v_n}, \quad \dot{v}_n = -\frac{\delta H}{\delta x_n} \tag{21}$$

где гамильтониан H - произвольная функция от собственных значений матрицы (12) или, что то же самое - произвольная функция от коэффициентов характеристического уравнения (13). Частным случаем системы (21) с H, задаваемым формулой (20), является цепочка Тода (3). Во всех динамических системах указанного типа стохастизация невозможна.

2. Обратная задача рассеяния

Перейдем теперь к изучению бесконечных цепочек (3), (4).

Прежде всего рассмотрим подробнее свойства оператора (7) в предположении, что $c_n \to 1$, $v_n \to 0$ при $n \to \pm\infty$, причем будем считать, что последовательности c_n, v_n сходятся к своим пределам достаточно быстро. При этом оператор L (7) имеет конечное число дискретных собственных значений и непрерывный спектр, заполняющий отрезок вещественной оси $-2 \leq \lambda \leq 2$.

Заметим, во-первых, что если ψ_n - решение (11а) с вещественным λ, то $\tilde{\psi}_n = \psi_n^*(-1)^n$ - так же решение (11а) с тем же λ.

Заметим также, что для произвольной пары решений (11а) $\psi_n^{(1)}$ и $\psi_n^{(2)}$ с одним и тем же λ величина

$$W(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = (-1)^{n+1}\sqrt{c_n}\left(\psi_n^{(1)}\psi_{n-1}^{(2)} - \psi_{n-1}^{(1)}\psi_n^{(2)}\right) \tag{22}$$

не зависит от номера n. Если $W(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = 0$, то функции $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ линейно зависимы. Это, в частности, означает,что дискретный спектр L, собственные функции которого обращаются в нуль при $n \to \pm\infty$, простой. Непрерывный же спектр L, вообще говоря, двукратно вырожден.

Выделим специальный класс собственных функций оператора L – функции Йоста. Пусть $\psi_n(\xi)$, $\varphi_n(\xi)$ – решения системы (11а) с $\lambda = 2\sin\xi$, определенные асимптотиками

$$\psi_n(\xi) \to e^{i\xi n}, \quad n \to +\infty \tag{23}$$

$$\varphi_n(\xi) \to e^{i\xi n}, \quad n \to -\infty$$

Можно показать, что функция Йоста $\psi_n(\xi)$ аналитична в верхней полуплоскости комплексной переменной ξ, а $\varphi_n(\xi)$ – в нижней. При этом функция

$$\tilde{\varphi}_n(\xi) = (-1)^n \varphi_n^*(\xi^*) \tag{24}$$

аналитична в области $\mathrm{Im}\,\xi > 0$.

Функции $\varphi_n(\xi)$, $\tilde{\varphi}_n(\xi)$ при вещественном ξ образуют полный набор линейно независимых решений (11а), поэтому

$$\psi_n(\xi) = \alpha(\xi)\varphi_n(\xi) + \beta(\xi)\tilde{\varphi}_n(\xi). \tag{25}$$

Вычисляя $W(\psi(\xi), \tilde{\psi}(\xi))$ (22) при $n \to \pm\infty$, убеждаемся, что

$$|\alpha(\xi)|^2 - |\beta(\xi)|^2 = 1 \tag{26}$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\alpha(\xi) = \frac{W(\psi(\xi), \tilde{\varphi}(\xi))}{2\cos\xi}. \tag{27}$$

Найдем теперь зависимость $\alpha(\xi)$ и $\beta(\xi)$ от времени. Продифференцировав (11) по t при фиксированном λ, получим:

$$(L - \lambda)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + A\psi\right) = 0,$$

т.е. $\partial\psi/\partial t + A\psi$ также является собственной функцией L с тем же самым λ, что и ψ. Требование сохранения во времени определения функции Йоста $\psi_n(\xi)$ (23) позволяет найти вектор $\partial\psi/\partial t + A\psi$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + A\psi = i\cos\xi\,\psi.$$

Подставляя в это выражение $\psi_n(\xi)$ из (25) и устремляя $n \to -\infty$ получаем:

$$\frac{\partial\alpha(\xi)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\beta(\xi)}{\partial t} = 2i\cos\xi\,\beta(\xi), \tag{28}$$

$$\beta(\xi, t) = \beta(\xi, 0)\exp(2i\cos\xi\, t).$$

Точки верхней полуплоскости ξ, в которых $\alpha(\xi) = 0$, ввиду (27), (23), (24) соответствуют дискретному спектру оператора L. Ввиду эрмитовости L, т.е. вещественности $\lambda = 2\sin\xi$ они лежат на прямых $\mathrm{Re}\,\xi = \pi/2 + 2\pi n$, $\mathrm{Re}\,\xi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где n – произвольное целое. Заметим, что ввиду очевидной периодичности всех функций Йоста (например $\psi_n(\xi + 2\pi) = \psi_n(\xi)$) мы можем ограничиться полосой верхней полуплоскости $-\pi/2 \leq \mathrm{Re}\,\xi < \pi$, $\mathrm{Im}\,\xi > 0$. В этой полосе нули $\alpha(\xi)$ могут находиться только на прямых $\mathrm{Re}\,\xi = \pm\pi/2$. Обозначим нули $\alpha(\xi)$ через $\xi_k^\pm$: $\xi_k^\pm = \pm\frac{\pi}{2} + i\eta_k$, $\eta_k > 0$. В них, ввиду (27) x)

$$\psi_n(\xi) = C_\xi \tilde{\varphi}_n(\xi) \tag{29}$$

Зависимость C_ξ от времени также легко находится:

$$C_{\xi^\pm}(t) = C_{\xi^\pm}(0)\exp(\pm 2\,\mathrm{sh}\,\eta\, t). \tag{30}$$

Совокупность величин ξ_k, C_{ξ_k}, $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ образует "данные рассеяния" и, как будет показано ниже, полностью определяет матрицу оператора L (7), т.е. x_n, v_n, причем данные рассеяния просто зависят от времени: $\partial\xi/\partial t = \partial\alpha/\partial t = 0$, а зависимость $\beta(\xi)$ и C_ξ от времени дается (28), (30). Последнее обстоятельство позволяет решать задачу Коши для цепочки Тода по классической схеме метода обратной задачи:

$$\begin{gathered} x_n(0), v_n(0) \to \xi, C_\xi, \alpha(\xi), \beta(\xi) \to \\ \to \xi, C_\xi(t), \alpha(\xi), \beta(\xi, t) \to x_n(t), v_n(t) \end{gathered} \tag{31}$$

Нетривиальными этапами в этой схеме являются первый и последний. На первом этапе приходится решать задачу на собственные значения для оператора L, а на последнем – обратную спектральную задачу, к рассмотрению которой мы и переходим.

---

x) Отметим вещественность величин C_ξ, входящих в (29).

Прежде всего заметим, что ввиду периодичности функций Йоста $\psi_n(\xi)$, $\varphi_n(\xi)$ они могут быть представлены рядами Фурье:

$$\psi_n(\xi) = \sum_m K_{nm} e^{i\xi m} \qquad (32)$$

$$\varphi_n(\xi) = \sum_m A_{nm} e^{i\xi m} \qquad (33)$$

Однако аналитичность $\psi_n(\xi) e^{-i\xi n}$ в верхней полуплоскости ξ означает, что ряд (32) обрывается при $m < n$, т.е. для $\psi_n(\xi)$ имеет место "треугольное представление"

$$\psi_n(\xi) = \sum_{m \geq n} K_{nm} e^{i\xi m}. \qquad (34а)$$

Совершенно аналогично

$$\varphi_n(\xi) = \sum_{m \leq n} A_{nm} e^{i\xi m}. \qquad (34б)$$

Подставляя (34) в (11а), получаем:

$$\sqrt{c_n} = \frac{K_{nn}}{K_{n-1,n-1}} = \frac{A_{n-1,n-1}}{A_{nn}} \qquad (35)$$

$$V_n = i\left(\frac{K_{n,n+1}}{K_{nn}} - \frac{K_{n-1,n}}{K_{n-1,n-1}}\right) = i\left(\frac{A_{n+1,n}}{A_{n+1,n+1}} - \frac{A_{n,n-1}}{A_{nn}}\right)$$

Теперь очевидна вещественность и положительность K_{nn}, A_{nn}, а также то, что $A_{nn} = \gamma / K_{nn}$. Входящая сюда константа γ выражается через $\alpha(i\infty)$. Подставляя

$$\tilde{\varphi}_n(\xi) = (-1)^n \sum_{m \leq n} A^*_{nm} e^{-i\xi m} \qquad (36)$$

и (34а) в (27) и устремляя $\xi \to i\infty$, находим, учитывая (35):

$$A_{nn} = \frac{\alpha(i\infty)}{K_{nn}}. \qquad (37)$$

Поделим, далее, (25) на $\alpha(\xi)$, и умножим получившееся равенство на $\exp(-i\xi m)$, $m \leq n$, и проинтегрируем результат по ξ в пределах от $-\pi$ до π, после чего получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi_n(\xi) e^{-i\xi m}}{\alpha(\xi)} d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\xi) e^{-i\xi m} d\xi + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)} \tilde{\varphi}_n(\xi) e^{-i\xi m} d\xi. \qquad (38)$$

Интеграл в левой части (38) может быть представлен в виде

$$\int_{\Gamma} \frac{\psi_n(\xi)}{\alpha(\xi)} e^{-i\xi m} d\xi + \lim_{\eta \to \infty} \int_{-\pi+i\eta}^{\pi+i\eta} \frac{\psi_n(\xi) e^{-i\xi m}}{\alpha(\xi)} d\xi, \qquad (39)$$

где Γ - замкнутый контур, состоящий из отрезка вещественной оси $-\pi \leq \xi \leq \pi$, полупрямых $\operatorname{Re}\xi = \pm\pi$, $\operatorname{Im}\xi > 0$ и замкнутый на мнимой бесконечности. Ввиду аналитичности подынтегрального выражения $\psi_n(\xi) e^{-i\xi m} / \alpha(\xi)$ в области, ограниченной контуром Γ за исключением точек, где $\alpha(\xi) = 0$, где $\frac{\psi_n(\xi)}{\alpha(\xi)} e^{-i\xi m}$ имеет простые полюсы, этот интеграл равен сумме вычетов.

Второй интеграл в (39), ввиду (34а), (37) есть

$$\lim_{\eta \to \infty} \int_{-\pi+i\eta}^{\pi+i\eta} \frac{\psi_n(\xi) e^{-i\xi m}}{\alpha(\xi)} d\xi = \frac{\delta_{nm}}{A_{nn}}, \quad m \leq n.$$

Т.о. левая часть (38) имеет вид: $2\pi i \sum_k \frac{C_{3k} \tilde{\varphi}_n(\zeta_k) e^{-i\zeta_k m}}{\alpha'(\zeta_k)} + \delta_{nm}/A_{nn}$. Подставляя теперь в (38) треугольные представления (34б), (36), а также представление для $\tilde{\varphi}_n(\zeta_k)$, следующее из (36) при $\xi = \zeta_k$, получаем систему уравнений для определения ядра треугольного представления (34б) A_{nm}:

$$A_{nm} - \frac{\delta_{nm}}{A_{nn}} + (-1)^n F_{n+m} A_{nn} + (-1)^n \sum_{m_1 < n} A^*_{nm_1} F_{m_1+m} = 0$$

где

$$F_n = -i \sum_k \frac{C_{3k} e^{-i\zeta_k n}}{\alpha'(\zeta_k)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)} e^{-i\xi n} d\xi \qquad (40)$$

Полагая $A_{nm} = G_{nm} A_{nn}$, $m < n$, получаем систему линейных уравнений на величины G_{nm} и выражение для A_{nn}:

$$G_{nm} + (-1)^n F_{n+m} + (-1)^n \sum_{m_1 < n} G^*_{nm_1} F_{m_1+m} = 0 \qquad (41)$$

$$A_{nn}^2=\left\{1+(-1)^n F_{2n}+(-1)^n\sum_{m<n} G^*_{nm}F_{m+n}\right\}^{-1}. \tag{42}$$

Матрица оператора L (7) выражается через решения системы (41) (см.(35)):

$$V_n=i\left(G_{n+1,n}-G_{n,n-1}\right),\quad C_n=\frac{A^2_{n-1,n-1}}{A^2_{nn}}. \tag{43}$$

Т.о. система (41) позволяет по данным рассеяния для оператора L полностью восстановить L, т.е. представляет собой полную систему линейных уравнений обратной задачи для оператора L (7).

Поскольку оператор L (9) для цепочки (4) - частный случай оператора L (7), то все полученные результаты непосредственно переносятся и на этот случай. При этом, однако, следует помнить, что, поскольку зависимость от времени данных рассеяния определяется оператором A, который для цепочки (4) существенно отличается от (8), то и формулы (28), (30) будут в этом случае выглядеть иначе. Повторяя соответствующие вычисления для оператора (10), получим:

$$\alpha(\xi,t)=\alpha(\xi,0),\quad \beta(\xi,t)=\beta(\xi,0)\exp(2i\sin 2\xi t)$$
$$C_\zeta(t)=C_\zeta(0)\exp(2\,\mathrm{sh}\,2\eta t) \tag{44}$$

Кроме того, поскольку оператор (9) существенно проще оператора L (7), то и данные рассеяния для L (9) должны выглядеть несколько проще. Действительно, рассмотрев задачу (11а) с $V_n\equiv 0$, убеждаемся, что все функции Йоста, а вместе с ними и величины $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$, периодичны с периодом π: $\alpha(\xi+\pi)=\alpha(\xi)$, $\beta(\xi+\pi)=\beta(\xi)$. Кроме того, легко видеть, что $\alpha(-\xi)=\alpha^*(\xi)$, $\beta(-\xi)=\beta^*(\xi)$. В частности, полагая $\xi=\frac{\pi}{2}+i\eta$, видим, что если $\alpha(\zeta)=0$, то и $\alpha(\zeta-\pi)=0$, т.е. $\zeta'=-\pi/2+i\eta$ - также соответствует собственному значению оператора L (9) и, кроме этого, соответствующие величины C_ζ (29) в точках ζ и ζ' совпадают: $C_\zeta=C_{\zeta'}$. Все это означает, что величины F_n (40), входящие в уравнение обратной задачи, имеют вид: $F_{2k+1}=0$

$$F_{2n}=-2i(-1)^n\sum_\zeta\frac{C_{\zeta_k}e^{2\eta_k n}}{\alpha'(\zeta)}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)}e^{-2in\xi}d\xi \tag{45}$$

Уравнение (41) при этом показывает, что $G_{nm}=0$, если $n+m$ нечетно: в частности это означает, что $G_{n,n-1}=0$, это гарантирует нам обращение в нуль величин V_n (см.(43)). Обозначив $G_{n,n-2k}$ через M_{nk}, получим для них из (41), (42)

$$M_{nk}+(-1)^nF_{2(n-k)}+(-1)^n\sum_{k'>0}M_{nk'}F_{2(n-k-k')}=0 \tag{46}$$

$$A^2_{nn}=\left\{1+(-1)^nF_{2n}+(-1)^n\sum_{k>0}M_{nk}F_{2(n-k)}\right\}^{-1} \tag{47}$$

Решение системы (4) N_k по-прежнему дается (43):

$$N_k=A^2_{k-1,k-1}/A^2_{kk}. \tag{48}$$

3. Столкновение солитонов

Как и для других систем, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния, система (41) может быть решена, если $\beta(\xi)\equiv 0$. Такие решения полностью определяются заданием N нулей $\alpha(\xi)$ и соответствующих величин C_ζ, и описывают N-солитонные решения системы (3).

Рассмотрим простейшую ситуацию, когда $\alpha(\xi)$ имеет лишь один нуль, лежащий, например, на прямой $\mathrm{Re}\,\xi=-\frac{\pi}{2}$, $\zeta=-\frac{\pi}{2}+i\eta$. Условие периодичности $\alpha(\xi)$ и соотношение (26), означающее в рассматриваемом примере $|\alpha(\xi)|^2=1$ при вещественных ξ, позволяют однозначно восстановить $\alpha(\xi)$:

$$\alpha(\xi)=\frac{\sin\frac{\xi+\frac{\pi}{2}-i\eta}{2}}{\sin\frac{\xi+\frac{\pi}{2}+i\eta}{2}}. \tag{49}$$

Определенная согласно (40) функция F_n при этом имеет вид:

$$F_n=2C\,\mathrm{sh}\,\eta\, e^{i\frac{\pi}{2}n}e^{\eta n}.$$

Ищем решение (40) в виде

$$G_{nm}=G_n e^{i\frac{\pi}{2}m}e^{\eta m}.$$

Производя простые вычисления, находим:

$$G^*_n=-\gamma\frac{e^{i\frac{\pi}{2}n}e^{\eta n}}{1+\gamma\frac{e^{2\eta n}}{e^{2\eta}-1}},$$

$$\gamma = 2c\,\mathrm{sh}\,\eta\,,$$

откуда сразу получаем:

$$A_{nn}^2 = \left(1 + \frac{\gamma e^{2\eta n}}{1 + \gamma \dfrac{e^{2\eta n}}{e^{2\eta}-1}}\right)^{-1}.$$

Используя, далее, (43), и учитывая, что $C_n = e^{x_n - x_{n-1}}$, находим окончательно:

$$x_n = \ln \frac{\mathrm{ch}\,\eta(n - x_0 + 1/2)}{\mathrm{ch}\,\eta(n - x_0 - 1/2)} + \mathrm{const}\,, \tag{50}$$

$$v_n = \frac{\mathrm{sh}^2\eta}{\mathrm{ch}\,\eta(n-x_0+1/2)\,\mathrm{ch}\,\eta(n-x_0-1/2)}\,,$$

где

$$x_0 = \frac{1}{2\eta} \ln \frac{1}{c} \; - \tag{51}$$

координата центра солитона. Подставляя, далее, зависимость от времени в (51), получаем $x_0(t) = x_0(0) + \mathrm{sh}\,\eta/\eta\; t$, откуда следует, что (50) описывает решение (3), распространяющееся по цепочке Тода без искажения формы со скоростью $V = \frac{\mathrm{sh}\,\eta}{\eta}$ т.е. солитон. Аналогичные вычисления показывают, что нулю $\alpha(\xi)$ на прямой $\mathrm{Re}\,\xi = \pi/2$ соответствует солитон, движущийся в противоположную сторону.

В более общем случае, когда $\alpha(\xi)$ имеет N нулей в полосе верхней полуплоскости $-\pi < \mathrm{Re}\,\xi < \pi$, N_+ из которых лежат на прямой $\mathrm{Re}\,\xi = \pi/2$, а N_- – на прямой $\mathrm{Re}\,\xi = -\pi/2$, можно показать, что соответствующее решение системы (3) асимптотически при $t \to \pm\infty$ представляет собой наборы солитонов, N_- из которых имеют положительные скорости, а N_+ – отрицательные, т.е. описывает N – солитонное столкновение. Можно также убедиться, что амплитуды (а, следовательно и скорости) возникающих при $t \to +\infty$ солитонов в точности совпадают с теми же величинами при $t \to -\infty$, что, с точки зрения рассматриваемого метода, представляется совершенно очевидным, поскольку эти параметры солитонов определяются

сохраняющимися во времени собственными значениями оператора L. Весь эффект столкновения солитонов сводится, таким образом, к изменению величин $x_0(t)$ (51), отнесенных к какому-либо моменту времени, например, t =0. Мы приведем сейчас простой способ вычисления изменения этих величин.

Рассмотрим, для определенности, столкновение двух солитонов, движущихся в положительном направлении. Такому решению соответствует два нуля $\alpha(\xi)$ на прямой $\mathrm{Re}\,\xi = -\pi/2$ в точках $\xi_1 = -\pi/2 + i\eta_1$, $\xi_2 = -\pi/2 + i\eta_2$. Положим $\eta_2 > \eta_1$, тогда, поскольку скорость второго солитона больше первого, при $t \to -\infty$ первый солитон находится правее второго; при $t \to +\infty$ порядок следования солитонов обратный. Рассмотрим поведение собственной функции оператора L $\psi_n(\xi_2)$ (в этих случаях). Обозначим величины $x_0(t)$ для первого и второго солитонов через $x_0^{(1)}$, $x_0^{(2)}$. При $t \to -\infty$ $x_0^{(2)} \ll x_0^{(1)}$. В области $n \gg x_0^{(1)}$ $\psi_n(\xi_2)$ имеет вид: $\psi_n(\xi_2) = e^{i\xi_2 n}$. При прохождении через солитон „1" $\psi_n(\xi_2)$, в силу (25), превращается в $\alpha_1(\xi_2) e^{i\xi_2 n}$, где $\alpha_1(\xi_2)$ ввиду (49) есть $\alpha_1(\xi_2) = \sin\frac{\xi_2 - \xi_1}{2} \Big/ \sin\frac{\xi_2 - \xi_1^*}{2}$. Для второго солитона функция $e^{i\xi_2 n}$ – есть асимптотика его собственной функции справа от него. Поэтому в области $n \ll x_0^{(2)}$ $\psi_n(\xi_2)$ есть (см. (29))

$$\psi_n(\xi_2) = C_2^{(-)} \frac{\mathrm{sh}\frac{\eta_2 - \eta_1}{2}}{\mathrm{sh}\frac{\eta_2 + \eta_1}{2}} \tilde{\varphi}_n(\xi_2) \tag{52а}$$

где $C_2^{(-)}$ связано с $x_0^{(2)}$ посредством (51).

Пусть теперь $t \to +\infty$. В этом случае $x_0^{(1)} \ll x_0^{(2)}$. При $n \ll x_0^{(1)}$ $\psi_n(\xi_2)$, ввиду (29), есть

$$\psi_n(\xi_2) = C_{\xi_2} \tilde{\varphi}_n(\xi_2) \tag{52б}$$

(что относится и к случаю $t \to -\infty$). Взяв комплексное сопряжение от (25) и разрешив получившуюся систему относительно $\tilde{\varphi}(\xi)$, найдем:

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \alpha(\xi)\tilde{\psi}(\xi) - \beta^*(\xi)\psi(\xi).$$

Используя это соотношение и (52б), получим выражение для $\psi_n(\xi_2)$ в области $x_0^{(1)} \ll n \ll x_0^{(2)}$:

$$\psi_n(\xi_2) = C_{\xi_2}\,\alpha_1(\xi_2)\,(-1)^n e^{-i\xi_2 n}$$

Но $(-1)^n e^{-i\xi_2 n}$ есть "левая" асимптотика собственной функции второго солитона. Так что при $n \gg x_0^{(2)}$ мы должны иметь

$$\psi_n(\xi_2) = \frac{C_{\xi_2}}{C_2^{(+)}}\,\alpha_1(\xi_2)\,e^{i\xi_2 n} \tag{52в}$$

где $C_2^{(+)}$ опять-таки связано с $x_0^{(2)}$ посредством (51). Т.о. из (52в) следует:

$$C_2^{(+)} = C_{\xi_2}\,\alpha_1(\xi_2) \tag{52г}$$

Сравнивая соотношения (52а) и (52б), получаем

$$C_2^{(-)} = C_{\xi_2}\,\alpha_1^{-1}(\xi_2), \tag{52д}$$

откуда, после исключения зависимости от времени из соотношений (52г), (52д), получим:

$$\frac{C_2^{(+)}(0)}{C_2^{(-)}(0)} = \alpha_1^2(\xi_2) = \frac{\operatorname{sh}^2\frac{\eta_2-\eta_1}{2}}{\operatorname{sh}^2\frac{\eta_2+\eta_1}{2}} \tag{53}$$

что, ввиду (51), означает

$$\Delta x_0^{(2)} = x_0^{(2)}(+) - x_0^{(2)}(-) = \frac{1}{2\eta_2}\ln\frac{\operatorname{sh}^2\frac{\eta_1+\eta_2}{2}}{\operatorname{sh}^2\frac{\eta_1-\eta_2}{2}} \tag{54а}$$

Аналогично, для медленного солитона

$$\Delta x_0^{(1)} = -\frac{1}{2\eta_1}\ln\frac{\operatorname{sh}^2\frac{\eta_1+\eta_2}{2}}{\operatorname{sh}^2(\eta_1-\eta_2)/2}\,. \tag{54б}$$

Если же один из солитонов движется в противоположном направлении (пусть, для определенности, это будет второй солитон), то, как немедленно следует из (53(, (51)

$$\Delta x_0^{(1)} = \frac{1}{2\eta_1}\ln\frac{\operatorname{ch}^2\frac{\eta_1+\eta_2}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{\eta_1-\eta_2}{2}}$$

(55)

$$\Delta x_0^{(2)} = -\frac{1}{2\eta_2}\ln\frac{\operatorname{ch}^2\frac{\eta_1+\eta_2}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{\eta_1-\eta_2}{2}}$$

Формулы (54(, (55) дают полное решение задачи о столкновении солитонов в цепочке Тода.

Изложенный подход применим и в общем случае N-солитонного столкновения. При этом оказывается, что имеют место только парные столкновения, т.е. сдвиг какого-либо солитона равен сумме сдвигов, возникающих при столкновении этого солитона со всеми остальными по отдельности.

Перейдем теперь к изучению солитонов в цепочке (4). Полагая как и выше $\beta(\xi) \equiv 0$ и считая, что $\alpha(\xi)$ имеет только одну пару нулей в полосе $-\pi < \operatorname{Re}\xi < \pi$ на прямых $\operatorname{Re}\xi = \pm\frac{\pi}{2}$ при $\operatorname{Im}\xi = \eta$, находим $\alpha(\xi)$:

$$\alpha(\xi) = \frac{\sin(\xi - \frac{\pi}{2} - i\eta)}{\sin(\xi - \frac{\pi}{2} + i\eta)} \tag{56}$$

При этом, согласно (45),

$$F_{2k} = 2c\operatorname{sh}2\eta(-1)^k e^{2\eta k}$$

Система (46) с такими F легко решается:

$$M_{nk} = -\frac{\gamma e^{2\eta n}}{1+\gamma e^{2\eta n}/e^{4\eta}-1}(-1)^k e^{-2\eta k}, \quad \gamma = 2c\operatorname{sh}2\eta$$

Определяя, далее, A_{nn} из (47) и подставляя в (48), получаем:

$$N_n = \frac{\operatorname{ch}\eta(n-x_0-2)\operatorname{ch}\eta(n-x_0+1)}{\operatorname{ch}\eta(n-x_0-1)\operatorname{ch}\eta(n-x_0)}, \tag{57}$$

где

$$x_0 = \frac{1}{2\eta}\ln\frac{1}{c} \; - \tag{58}$$

координата центра солитона.

Подставляя в (58) зависимость c от времени из (44), находим:

$$x_0(t) = x_0(0) - \frac{\operatorname{sh}2\eta}{\eta}t \tag{59}$$

Откуда следует, что все солитоны в цепочке (4) движутся в одну сторону.

Картина рассеяния солитонов в этой цепочке совершенно аналогична описанной выше, т.е. в результате столкновения меняются только координаты центров солитонов; их изменение может быть найдено непосредственно из формулы (53); учитывая (56), получаем:

$$\Delta x_0^{(1)} = \frac{1}{2\eta_1} \ln \frac{sh^2(\eta_1+\eta_2)}{sh^2(\eta_1-\eta_2)}$$

$$\Delta x_0^{(2)} = -\frac{1}{2\eta_2} \ln \frac{sh^2(\eta_1+\eta_2)}{sh^2(\eta_1-\eta_2)}, \quad \eta_2 > \eta_1$$

Входящие сюда величины η_1 и η_2 связаны со скоростями солитонов посредством (59).

В заключение автор выражает благодарность В.Е.Захарову за внимание к работе.

Литература

1. Э.Ферми. Научные труды т.П серия "Классики науки", Наука, Москва, 1972 г.
2. N. Zabusky, M. Kruskal. Phys. Rev. Lett. <u>15</u> 240 (1965)
3. В.Е.Захаров, Л.Д.Фаддеев. Функциональный анализ т.5, вып.4, стр. 18 (1971).
4. N. Zabusky, G. Deem. J. Computational Phys. <u>2</u> 126 (1967)
5. В.Е.Захаров ЖЭТФ, <u>65</u>, 219 (1973).
6. M. Toda. Progr. Theor. Phys. Suppl. <u>45</u> 174 (1970)
7. M. Toda, M. Wadati. J. Phys. Soc. Japan <u>34</u> 18 (1973)
8. R. Hirota. J. Math. Phys. <u>14</u> 810 (1973)
9. В.Е. Захаров. ЖЭТФ, <u>60</u>, 993 (1971).
10. C.S. Gardner, J. Greene, M. Kruskal, R. Miura. Phys. Rev. Lett. <u>19</u> 1095 (1967)
11. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. ЖЭТФ, <u>61</u>, 118 (1971).
12. P.D. Lax. Comm. on Pure and Appl. Math. <u>21</u> 467 (1968)
13. В.Е.Захаров, С.Л.Мушер, А.М.Рубенчик, Письма в ЖЭТФ ~~(в печати)~~. <u>19</u> 249 (1974)
14. Б.Н.Брейзман, В.Е.Захаров, С.Л.Мушер. ЖЭТФ, <u>64</u>, 1297 (1973).
15. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат. ЖЭТФ, <u>64</u>, 1627 (1973).
16. С.В.Манаков. ЖЭТФ, <u>65</u>, ~~1302~~ 505 (1973).
17. Е.Уиттекер. Аналитическая динамика. ОНТИ, Москва-Ленинград, 1937.

Ответственный за выпуск С.Н.РОДИОНОВ
Подписано к печати 20.У-1974г. МН 08311
Усл.1,2 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ №32

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР