ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 74 - 24

Б.Г.Конопельченко, Ю.Б.Румер

НЕКОМПАКТНАЯ АЛГЕБРА $SO(2,1)$ И КЛАССИФИКАЦИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ В УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

Новосибирск
1974

НЕКОМПАКТНАЯ АЛГЕБРА $SO(2,1)$ И КЛАССИФИКАЦИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ В УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

Б.Г.Конопельченко, Ю.Б.Румер

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что наряду с обычной формулировкой задач квантовой механики, когда гамильтониан выражается через канонические операторы p и q, для некоторого класса задач возможна формулировка через операторы некомпактной алгебры $SO(2,1)$. При такой формулировке возникает классификация потенциалов в уравнении Шредингера.

Для решения задач квантовой механики по методу Гайзенберга в гамильтониан следует внести гайзенберовские операторы импульса p и координаты q и диагонализовать полученное выражение. Еще до появления волновой механики этим методом Гайзенбергом был найден спектр энергии одномерного осциллятора, а Паули - спектр атома водорода.

В силу перестановочных соотношений $qp - pq = i$ гайзенберговские операторы могут быть реализованы лишь бесконечнорядными матрицами. С другой стороны, хорошо известно, что эрмитовы операторы некомпактных алгебр Ли также могут быть реализованы лишь бесконечнорядными матрицами.

Это наводит на мысль, что существует класс задач, который можно сформулировать на языке операторов некомпактных алгебр Ли [1,2] . Мы покажем, что этот метод решения задач квантовой механики позволяет классифицировать не решения уравнения Шредингера (например, по орбитальному моменту), а входящие в это уравнение потенциалы. В этом состоит глубокое различие между применением компактной алгебры SO/3/ и некомпактной алгебры SO /2,1/ в задачах квантовой механики.

В этой работе мы рассматриваем, следуя [1] , некомпактную алгебру SO /2,1/ с операторами N_1 , N_2 , N_3 . Мы сформулируем условия, при которых уравнения Шредингера могут реформулированы в " N - представлении" в виде

$$Q - \bar{N}\overset{+}{N} - R\bar{N}^2 + S\bar{N} - T = 0,$$

где $\overset{\pm}{N} = N_3 \pm N_1$ и Q - оператор Казимира SO/2,1/.

Показано, что случаю, когда только один из коэффициентов R , S , T зависит от энергии, соответствуют "кулоновский", "осцилляторный" потенциалы и потенциал Морза.

1. Некомпактная алгебра SO/2,1/

Алгебра SO (2,1) задается перестановочными соотношениями [3] :

$$[N_1, N_2] = -iN_3, \; [N_2, N_3] = iN_1, \; [N_3, N_1] = iN_2 . \qquad (1.1)$$

Введем операторы A_+, A_-, A_3

$$A_\pm = iN_2 \pm N_1, \quad A_3 = N_3$$

Для этих операторов имеем

$$[A_3, A_\pm] = \pm A_\pm, \quad [A_+, A_-] = 2A_3.$$

Оператор Казимира $SO(2,1)$ равен

$$Q = -N_1^2 - N_2^2 + N_3^2$$

В унитарных представлениях группы $SO(2,1)$ $N_i^+ = N_i$ ($i=1,2,3$), т.е.

$$A_3^+ = A_3, \quad (A_+)^+ = -A_-. \qquad (1,2)$$

В базисе из собственных векторов оператора A_3 имеем [3]

$$A_3|\Phi,n\rangle = (n_0+n)|\Phi,n\rangle,$$

$$A_+|\Phi,n\rangle = (\Phi-n_0-n)\frac{N_n}{N_{n+1}}|\Phi,n+1\rangle,$$

$$A_-|\Phi,n\rangle = (\Phi+n_0+n)\frac{N_n}{N_{n-1}}|\Phi,n-1\rangle,$$

где $\Phi(\Phi+1) = Q$

Из условия эрмитовости N_i (1,2) находим

$$\left|\frac{N_{n+1}}{N_n}\right|^2 = -\frac{\bar{\Phi}-n_0-n}{\Phi+1+n_0+n} > 0 \qquad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что для вещественных Φ возможны лишь три случая

1. $-1<\Phi<0, \quad -1<n_0\le 0, \qquad n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,$
2. $n_0 = -\Phi = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2},\ldots, \qquad n=0,1,2,\ldots$
3. $n_0 = \Phi = -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2},\ldots, \qquad n=0,-1,-2,\ldots$.

В дальнейшем нас будет интересовать только второй случай, соответствующий так называемой D^+ – серии представлений алгебры $SO(2,1)$ [3].

Мы видим, что эрмитовы представления алгебры $SO(2,1)$ существенно отличаются от эрмитовых представлений алгебры $SO/3/$. Если для алгебры $SO/3/$ спектр каждого из операторов ограничен сверху и снизу, то для алгебры $SO(2,1)$ спектр N_3 бесконечен. Отметим, что спектр оператора N_3, соответствующего эллиптическим вращениям является дискретным, а спектр N_1 (либо N_2), соответствующего гиперболическим вращениям, непрерывен.

II. Реализация алгебры $SO/2,1/$

Рассмотрим реализацию операторов N_i в пространстве одной переменной ξ

$$\bar{N} = N_3 - N_1 = \alpha(\xi),$$

$$\overset{+}{N} = N_3 + N_1 = \lambda(\xi) + \mu(\xi)\frac{d}{d\xi} + \nu(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2}, \qquad (2.1)$$

$$iN_2 = f(\xi) + g(\xi)\frac{d}{d\xi}.$$

Из перестановочных соотношений (1.1) следует, что шесть функций α, λ, μ, ν, f, g удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}
&(a)\quad g\alpha' - \alpha = 0 && (d)\quad \mu f' + \nu f'' - g\lambda' - \lambda = 0,\\
&(b)\quad \nu\alpha' + g = 0 && (e)\quad \mu g' - g\mu' + 2\nu f' + \nu g'' - \mu = 0 \qquad (2.2)\\
&(c)\quad 2\nu g' - g\nu' - \nu = 0 && (f)\quad \mu\alpha' + 2f + \nu\alpha'' = 0,
\end{aligned}$$

где штрихи обозначают производные по ξ.

Нетрудно убедиться, что из уравнений (a) и (b) следует (c) и из уравнений (a), (b) и (f) следует (e). Тем самым из шести уравнений (2.2) только четыре независимы и, следовательно, решение системы (2.2) содержит две произвольные функции. Выберем в качестве этих двух функций α и f.

Тогда общее решение системы (2.2) имеет вид

$$g = \frac{\alpha}{\alpha'}, \qquad \nu = \frac{\alpha}{\alpha'^2},$$

$$\mu = -\frac{2f}{\alpha'} + \frac{\alpha\cdot\alpha''}{\alpha'^3} \qquad (2.3)$$

$$\lambda = -\frac{f^2}{\alpha} + \frac{f}{\alpha} - \frac{f'}{\alpha'} + \frac{A}{\alpha}$$

где A - постоянная.

Вычисляя оператор Казимира, учитывая (2.1) и (2.3), находим

$$Q = \bar{N}\overset{+}{N} + (iN_2)^2 - iN_2 = \Phi(\Phi+1) = A.$$

Наконец, нетрудно убедиться, что

$$(iN_2)^2 - iN_2 = Q - \bar{N}\overset{+}{N} =$$

$$= f^2 - f + \frac{\alpha}{\alpha'} f' + \left(2f\frac{\alpha}{\alpha'} - \frac{\alpha^2\alpha''}{\alpha'^3}\right)\frac{d}{d\xi} +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{\alpha'^2}\frac{d^2}{d\xi^2}.$$

III. Уравнение Шредингера в "N-представлении"

Будем называть уравнением Шредингера в "N - представлении" квадратичное по N_i уравнение:

$$(iN_2)^2 - iN_2 - R\bar{N}^2 + S\bar{N} - T = 0. \qquad (3.1)$$

Коэффициенты R, S, T зависят от энергии и, как мы увидим, полностью определяют спектр энергии. В силу $Q - \bar{N}\overset{+}{N} = (iN_2)^2 - iN_2$ уравнение (3.1) можно записать в виде

$$\bar{N}(\overset{+}{N} + R\bar{N} - S) = Q - T. \qquad (3.2)$$

При $Q = T$ (условие линеаризации) уравнение (3.2) сводится к линейному

$$\overset{+}{N} + R\bar{N} = S \qquad (3.3)$$

Переходя в уравнении (3.3) к новым операторам $\tilde{\overset{+}{N}} = e^{-\theta}\overset{+}{N}$, и $\tilde{\bar{N}} = e^{\theta}\bar{N}$ x), получаем

$$(e^{\theta} + Re^{-\theta})\tilde{N}_3 + (e^{\theta} - Re^{-\theta})\tilde{N}_1 = S. \qquad (3.4)$$

Выбирая $e^{\theta} = \sqrt{R}$ [1], имеем

$$2\sqrt{R}\{\tilde{N}_3\} = S. \qquad (3.5)$$

Поскольку спектр оператора $\tilde{N}_3$ имеет вид $\{\tilde{N}_3\} = -\Phi + n$, то уравнение, определяющее дискретный спектр энергии, имеет вид

$$\frac{1}{2} + n + \sqrt{T + \frac{1}{4}} = \frac{S}{2\sqrt{R}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.6)$$

---

x) Нетрудно убедиться, что преобразование $\overset{\pm}{N} \to \tilde{\overset{\pm}{N}}$ (тильт) не меняет перестановочных соотношений и оператор Казимира алгебры $SO(2,1)$.

При $e^{\theta}=\sqrt{-R}$ получаем непрерывный спектр

$$\nu = \frac{S}{2\sqrt{R}}, \quad 0<\nu<\infty$$

Мы видим, что коэффициенты R, S и T в (3.1) полностью определяют спектр системы.

1У. Условия существования N -представления

Рассмотрим теперь условия, при которых одномерное уравнение Шредингера

$$\left(-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)-E\right)\Psi(x)=0 \tag{4.1}$$

может быть преобразовано к виду (3.1).

Для этой цели, используя реализацию (2.1), представим (3.1) в виде

$$\frac{\alpha^2}{\alpha'^2}\frac{d^2}{dx^2}+\left(2f\frac{\alpha}{\alpha'}-\frac{\alpha^2\alpha''}{\alpha'^3}\right)\frac{d}{dx}+ f^2 - f + \frac{\alpha}{\alpha'}f' - R\alpha^2+S\alpha-T=0. \tag{4.2}$$

Из (4.1) и (4.2) следует, что условия существования N -представления (3.1) для уравнения Шредингера имеют вид

$$f=\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha''}{\alpha'^2}, \tag{4.3}$$

$$U(x)=E-\frac{1}{2m}\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}\left(f^2-f+\frac{\alpha}{\alpha'}f'-R\alpha^2+S\alpha-T\right). \tag{4.4}$$

Мы видим, что между функциями f и α появляется связь. Преобразуем (4.4), используя (4.3). В результате получаем

$$U(x)=E+\frac{R}{2m}\alpha'^2-\frac{S}{2m}\frac{\alpha'^2}{\alpha}+\frac{T}{2m}\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}+\frac{3}{8m}\frac{\alpha''^2}{\alpha'^2}-\frac{1}{4m}\frac{\alpha'''}{\alpha'}. \tag{4.5}$$

Условие независимости выражения (4.5) (потенциала) от энергии имеет вид

$$R'-\frac{1}{\alpha}S'+\frac{1}{\alpha^2}T'=-\frac{2m}{\alpha'^2}, \tag{4.6}$$

где $R'=\dfrac{dR}{dE}$, $S'=\dfrac{dS}{dE}$, $T'=\dfrac{dT}{dE}$.

Общее решение уравнения (4.6) дается интегралом

$$\pm\int\frac{\sqrt{-\frac{R'}{2m}\alpha^2+\frac{S'}{2m}\alpha-\frac{T'}{2m}}}{\alpha}\,d\alpha = x. \tag{4.7}$$

Используя (4.6), уравнение (4.5) можно представить в виде

$$U(x)=E-\frac{R\alpha^2-S\alpha+T}{R'\alpha^2-S'\alpha+T'}+\frac{5}{16}\frac{(S'\alpha-2T')^2}{(R'\alpha^2-S'\alpha+T')^3}+\frac{1}{2}\frac{S'\alpha-3T'}{(R'\alpha^2-S'\alpha+T')^2}. \tag{4.8}$$

Уравнения (4.7) и (4.8) являются окончательными условиями существования представления (3.1) для одномерного уравнения Шредингера. Таким образом, не всякое уравнение Шредингера может быть сформулировано в N -представлении.

Из (4.7) и (4.8) следует уравнение на допустимые потенциалы (интеграл (4.7) выражается через элементарные функции для любых R', S', T'):

$$U\left\{\pm\int\frac{d\alpha}{\alpha}\sqrt{-\frac{R'}{2m}\alpha^2+\frac{S'}{2m}\alpha-\frac{T'}{2m}}\right\}=$$

$$=E-\frac{R\alpha^2-S\alpha+T}{R'\alpha^2-S'\alpha+T'}+\frac{5}{16}\frac{(S'\alpha-2T')^2}{(R'\alpha^2-S'\alpha+T')^3}+ \qquad (4.9)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{S'\alpha-3T'}{(R'\alpha^2-S'\alpha+T')^2}.$$

Уравнение (4.9) решает в общем виде задачу: найти все потенциалы, которые допускают реформулировку уравнения Шредингера в N -представлении.

У. Потенциалы первого класса

Все задачи, сводящиеся к (3.1), можно разделить на три класса. Для задач первого класса только один из трех коэффициентов R, S и T зависит от энергии. Для задач второго класса зависят от энергии два коэффициента, а для задач третьего класса – все три. Рассмотрим все три случая, относящиеся к первому классу.

1. $R'\neq 0,\ S'=T'=0.$

Решение уравнения (4.6) – (4.8) имеет вид

$$R(E)=R'E,\quad R'=const<0,\quad \alpha(x)=\sqrt{-\frac{2m}{R'}}\,x.$$

$$U(x)=-S\sqrt{-\frac{R'}{2m}}\,\frac{1}{x}+\frac{T}{2m}\,\frac{1}{x^2}.$$

Спектр энергии определяется формулой (3.5)

$$E=-\frac{S}{4(-R')}\left[\frac{1}{2}+n+\sqrt{T+\frac{1}{4}}\right]^{-2}$$

2. $S'\neq 0,\ R'=T'=0.$

Из (4.6) – (4.8) находим

$$S(E)=S'E,\quad S'=const;\quad \alpha(x)=\frac{m}{2S'}\,x^2,$$

$$U(x)=\frac{mR}{2S'^2}\,x^2+\left(\frac{2T}{m}+\frac{3}{8m}\right)\frac{1}{x^2}.$$

Спектр имеет вид

$$E=\frac{2\sqrt{R}}{S'}\left(\frac{1}{2}+n+\sqrt{T+\frac{1}{4}}\right).$$

3. $T'\neq 0,\ R'=S'=0$

Решая (4.6) – (4.8), получаем

$$T(E)=T'E-\frac{1}{4},\quad T'=const<0,\quad \alpha(x)=e^{\pm\sqrt{-\frac{2m}{T'}}\,x},$$

$$U(x)=\frac{R}{(-T')}\,e^{\pm 2\sqrt{-\frac{2m}{T'}}\,x}-\frac{S}{(-T')}\,e^{\pm\sqrt{-\frac{2m}{T'}}\,x}$$

Соответственно спектр

$$E=-\frac{1}{(-T')}\left(\frac{S}{2\sqrt{R}}-\frac{1}{2}-n\right)^2.$$

Отметим, что все три потенциала уже рассматривались: 1 - [1,3] ; 2 - [4] ; 3 - [5] x). Мы показали, что требование, чтобы задача принадлежала первому классу, полностью фиксирует потенциал (и спектр).

Перечисленные потенциалы исчерпывают задачи первого класса.

У1. Трехмерные задачи

Рассмотрим сферически-симметричные задачи. Радиальное уравнение Шредингера имеет вид:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+2mE-2m\,\mathcal{U}(r)\right)\psi_\ell(r)=0 \qquad (6.1)$$

Сравнивая (6.1) и (4.2), находим условия представимости (6.1) в виде (3.1):

$$f=\frac{1}{2}\,\frac{\alpha\cdot\alpha''}{\alpha'^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\alpha}{\alpha'}\,, \qquad (6.2)$$

$$\mathcal{U}(r)=E-\frac{\ell(\ell+1)}{2mr^2}-\frac{1}{2m}\,\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}\Big(f^2-f+\frac{\alpha}{\alpha'}f'-R(E,\ell)\alpha^2+S(E,\ell)\alpha-T(E,\ell)\Big)\,. \qquad (6.3)$$

Из (6.2) и (6.3) находим

$$\mathcal{U}(r)=E-\frac{\ell(\ell+1)}{2mr^2}+\frac{R}{2m}\alpha'^2-\frac{S}{2m}\,\frac{\alpha'^2}{\alpha}+\frac{T}{2m}\,\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}+\frac{3}{8m}\,\frac{\alpha''^2}{\alpha'^2}-\frac{1}{4m}\,\frac{\alpha'''}{\alpha'}\,. \qquad (6.4)$$

---

x) Наше рассмотрение третьего случая, в частности реализация $N_\pm$, iN_2 , отличается от работы [5] .

Условия независимости $\mathcal{U}(r)$ от энергии E и момента ℓ имеют вид

$$\frac{\partial R}{\partial E}-\frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial S}{\partial E}+\frac{1}{\alpha^2}\,\frac{\partial T}{\partial E}=-\frac{2m}{\alpha'^2}\,, \qquad (6.5)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \ell}-\frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial S}{\partial \ell}+\frac{1}{\alpha^2}\,\frac{\partial T}{\partial \ell}=\frac{2\ell+1}{r^2\alpha'^2}\,. \qquad (6.6)$$

В случае $\ell=0$ уравнение (6.6) отсутствует.

Для задач первого класса, когда одна величина из $\frac{\partial R}{\partial E}$, $\frac{\partial S}{\partial E}$, $\frac{\partial T}{\partial E}$ и одна из $\frac{\partial R}{\partial \ell}$, $\frac{\partial S}{\partial \ell}$, $\frac{\partial T}{\partial \ell}$ отлична от нуля система уравнений (6.5), (6.6) имеет <u>только два решения</u>.

1. $\frac{\partial R}{\partial E}\neq 0,\ \frac{\partial T}{\partial \ell}\neq 0;\ \frac{\partial S}{\partial E}=\frac{\partial T}{\partial E}=\frac{\partial R}{\partial \ell}=\frac{\partial S}{\partial \ell}=0.$

$$R(E)=R'E,\quad R'=const<0,\qquad \alpha(r)=\sqrt{-\frac{2m}{R'}}\,r.$$

$$T(\ell)=\ell(\ell+1)+A,\quad A=const,$$

Спектр энергии имеет вид

$$E=-\frac{S^2}{4(-R')}\left[\frac{1}{2}+n+\sqrt{\ell(\ell+1)+\frac{1}{4}+A}\right]^{-2}.$$

Потенциал равен (см.(6.4))

$$\mathcal{U}(r)=-\frac{S}{\sqrt{-2mR'}}\,\frac{1}{r}+\frac{A}{2m}\,\frac{1}{r^2}\,.$$

2. $\frac{\partial S}{\partial E}\neq 0,\ \frac{\partial T}{\partial \ell}\neq 0;\ \frac{\partial R}{\partial E}=\frac{\partial T}{\partial E}=\frac{\partial R}{\partial \ell}=\frac{\partial S}{\partial \ell}=0.$

$$S(E)=S'E,\quad S'=const,\qquad \alpha(r)=\frac{m}{2S'}\,r^2.$$

$$T(\ell)=\frac{1}{4}\,\ell(\ell+1)+B,\quad B=const,$$

Спектр энергии

$$E=\frac{2\sqrt{R}}{S'}\left(\frac{1}{2}+n+\sqrt{\frac{1}{4}\ell(\ell+1)+\frac{1}{4}+B}\right).$$

и соответствующий потенциал

$$\mathcal{U}(r)=\frac{mR}{2S'^2}\,r^2+\left(\frac{2B}{m}+\frac{3}{8m}\right)\frac{1}{r^2}.$$

Для $\ell=0$ (и только для $\ell=0$) имеется еще одно решение:

3. $\frac{\partial T}{\partial E}\neq 0;\quad \frac{\partial R}{\partial E}=\frac{\partial S}{\partial E}=\frac{\partial R}{\partial \ell}=\frac{\partial S}{\partial \ell}=\frac{\partial T}{\partial \ell}=0.$

$$T(E)=T'E-\frac{1}{4},\quad T'=const<0;\quad \alpha(r)=e^{-\sqrt{-\frac{2m}{T'}}\,r}.$$

Этому решению соответствует потенциал (Морза):

$$\mathcal{U}(r)=\frac{R}{(-T')}\,e^{-2\sqrt{-\frac{2m}{T'}}\,r}-\frac{S}{(-T')}\,e^{-\sqrt{-\frac{2m}{T'}}\,r},$$

и спектр энергии

$$E=-\frac{1}{(-T')}\left(\frac{S}{2\sqrt{R}}-\frac{1}{2}-n\right)^2.$$

Полученные результаты сведены в таблицу

	R	S	T	$\mathcal{U}(r)$
1.	$-2mE$	$2mB$	$\ell(\ell+1)-2mA$	$\frac{B}{r}+\frac{A}{r^2}$
2.	$\frac{mB}{2}$	$\frac{mE}{2}$	$\frac{1}{4}\ell(\ell+1)-\frac{3}{16}+\frac{1}{2}mA$	$Br^2+\frac{A}{r^2}$
3.	$\frac{2mA}{a^2}$	$\frac{2mB}{a^2}$	$-\frac{2mE}{a^2}-\frac{1}{4}$	$Ae^{-2ar}-Be^{-ar}$

УII. Задачи второго и третьего класса

Для задач второго и третьего класса максимум один из коэффициентов R, S, T не зависит от энергии. И в этом случае интеграл (4.7) выражается через элементарные функции. Однако из-за сложной алгебраической структуры нахождение α как функции от r представляет определенные трудности. В силу чего не удается найти явный вид соответствующего потенциала, и он задается неявно формулой (4.9), где правая часть является известной функцией α и также аргумент $\mathcal{U}$ является известной функцией от α. По этим же причинам нам не удалось до конца выяснить, принадлежит ли потенциал $\mathcal{U}=-\mathcal{U}_0\frac{1}{ch^2 ax}$ [6] второму или третьему классу (и существуют ли вообще для него N -представление). Аналогичные трудности имеются и в трехмерных задачах. Отметим, что система уравнений (6.5), (6.6) не имеет решений, если только одна из величин $\frac{\partial R}{\partial \ell}$, $\frac{\partial S}{\partial \ell}$, $\frac{\partial T}{\partial \ell}$ отлична от нуля.

УIII. Волновые функции дискретного спектра и собственные функции оператора N_3.

В этом разделе мы рассмотрим соотношение между волновыми функциями дискретного спектра и собственными функциями оператора N_3.

Как следует из (3.3) и (3.5) волновые функции дискретного спектра являются решениями уравнения

$$\tilde{N}_3(r)\,\Psi_n(r)=(-\varphi+n)\,\Psi_n(r), \tag{8.1}$$

где $\tilde{N}_3$ - "тильтованный" оператор N_3.

Собственные функции оператора N_3 определяются формулой

$$N_3(r)\,Q_n^{(3)}(r)=(-\varphi+n)\,Q_n^{(3)}(r). \tag{8.2}$$

Перейдем в дифференциальных уравнениях (8.1) и (8.2) от переменной r к переменной α, где r дается формулой (4.7). Имеем

$$\tilde{N}_3(\alpha)\,\hat{\Psi}_n(\alpha)=(-\varphi+n)\,\hat{\Psi}_n(\alpha), \tag{8.3}$$

$$N_3(\alpha)\,\hat{Q}_n^{(3)}(\alpha)=(-\varphi+n)\,\hat{Q}_n^{(3)}(\alpha), \tag{8.4}$$

где $\hat{\Psi}_n(\alpha) = \Psi_n(\tau)$, $\hat{Q}_n^{(3)}(\alpha) = Q_n^{(3)}(\tau)$.

Поскольку $\tilde{N}_3(\alpha) = N_3(\tilde{\alpha})$, где $\tilde{\alpha} = e^{\theta}\alpha = \sqrt{R}\,\alpha$ (т.к. $N = e^{\theta}\tilde{N}$), то сравнивая (8.3) и (8.4), находим

$$\hat{\Psi}_n(\alpha) = \hat{Q}_n^{(3)}(\sqrt{R}\,\alpha) \qquad (8.5)$$

Переходя в формуле (8.5) к переменным τ, получаем искомую связь между волновыми функциями и собственными функциями оператора N_3. Для частного случая формула (8.5) была получена в [7].

Найдем функцию $\hat{Q}^{(3)}_n(\alpha)$. Для этого в выражении для оператора N_3 (формулы (2.1) и (2.3)) перейдем к переменной α и воспользуемся формулами (6.2) и (6.5). В результате уравнение (8.4), определяющее собственные функции оператора N_3, примет вид

$$\left\{-\frac{1}{2}\alpha\frac{d^2}{d\alpha^2} - \left[\frac{1}{\tau}\sqrt{-\frac{R'}{2m}\alpha^2+\frac{S'}{2m}\alpha-\frac{T'}{2m}} - \frac{1(S'\alpha-2T')}{4(R'\alpha^2-S'\alpha+T')}\right]\frac{d}{d\alpha} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{T}{2\alpha} - \frac{5}{32\alpha}\frac{(S'\alpha-2T')^2}{(R'\alpha^2-S'\alpha+T')^2} - \frac{1(S'\alpha-3T')}{4\alpha(R'\alpha^2-S'\alpha+T')}\right\}\hat{Q}^{(3)}_n(\alpha) = \qquad (8.6)$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\sqrt{T+\frac{1}{4}}+n\right)\hat{Q}^{(3)}_n(\alpha), \qquad R' = \frac{\partial R}{\partial E} \text{ и т.п.}$$

где τ дается формулой (4.7). В одномерном случае в уравнении (8.6) отсутствует член $\frac{1}{\tau}\sqrt{\ldots}$.

Для задач первого класса (для первой и второй трехмерных задач и для третьей одномерной задачи) уравнение (8.6) существенно упрощается:

$$\left(-\frac{1}{2}\alpha\frac{d^2}{d\alpha^2} - C_i\frac{d}{d\alpha} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{K_i}{\alpha}\right)\hat{Q}^{(3)i}_n(\alpha) = \qquad (8.7)$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\sqrt{T+\frac{1}{4}}+n\right)\hat{Q}^{(3)i}_n(\alpha), \qquad i = 1,2,3$$

где для трех перечисленных задач соответственно $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{3}{4}$, $C_3 = \frac{1}{2}$ и $K_1 = \frac{T}{2}$, $K_2 = \frac{T}{2} + \frac{3}{32}$, $K_3 = \frac{T}{2} + \frac{1}{8}$.

Отметим, что $T - 2K_i = C_i(C_i - 1)$.

Решение уравнения (8.7) имеет вид (см. 8):

$$\hat{Q}^{(3)i}_n(\alpha) \sim \alpha^{-C_i+\frac{1}{2}+\sqrt{T+\frac{1}{4}}}\, e^{-\frac{\alpha}{2}} \times \qquad (8.8)$$

$$\times\, \Phi\left(-n,\ 2\sqrt{T+\frac{1}{4}}+1,\ 2\alpha\right),$$

где $\Phi(a, b, z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Используя уравнение (8.5) и, выражая α через τ, находим волновые функции дискретного спектра (ср. [6] стр. 155–156, 96).

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Nambu, In. Proc. 1967 Intern. Conf. Particles and Fields, N.Y. (1967).
2. P. Cordero, G. C. Ghirardi, Nuovo Cim., A2, 217 (1971).
3. A.O. Barut, C. Fronsdal, Proc. Roy. Soc., A287 532 (1965).
4. P. Cordero, Lett. Nuovo Cim., 4, 164 (1970).
5. P. Cordero, S. Hojman, Lett. Nuovo Cim., 4, 1123 (1970).
6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М., 1963.
7. Б.Г.Конопельченко. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 63-72 (1972).
8. Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.

Ответственный за выпуск С.Н.РОДИОНОВ
Подписано к печати 22.IУ-74г. МН 08251
Усл. 1,1 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ № 24

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, тв