И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 2-74

Г.А.Кузьмин, А.З.Паташинский

МАСШТАБНАЯ И КОНФОРМНАЯ СИММЕТРИЯ ЛОКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Новосибирск

1974

МАСШТАБНАЯ И КОНФОРМНАЯ СИММЕТРИЯ ЛОКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Г.А.Кузьмин, А.З.Паташинский

А Н Н О Т А Ц И Я

Формулируются гипотезы масштабной и конформной инвариантности в статистической теории турбулентности. Указаны следствия гипотез для парных и тройных корреляторов.

Теория универсального самоподобия турбулентности /1-6/ основана на предположении, что статистические характеристики поля скорости диссипации энергии определяют всю локальную структуру турбулентности. Более общая формулировка свойств подобия флуктуирующих полей была предложена в теории фазовых переходов второго рода / 7-10/. В этих работах развит аппарат теории масштабно инвариантных полей. Как будет показано ниже, использование этого аппарата для описания свойств подобия турбулентных пульсаций приводит к выводам, совпадающим с выводами работ /1/ - /6/ лишь при дополнительных предположениях. Существующие экспериментальные данные не позволяют отдать предпочтение одной из этих двух формулировок. В связи с этим, рассматривается вопрос: измерение каких статистических характеристик необходимо произвести для проверки следствий теории масштабного подобия.

Будем предполагать, что точные свойства подобия возникают в пределе бесконечно большого числа Рейнольдса, когда внешний масштаб турбулентности бесконечно велик. Предположим, что существуют поля $\varphi^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, \dots$, которые обладают определенной масштабной размерностью. Последнее означает, что система кумулянтов $\varphi^{(\mu)}$ инвариантна относительно замены (сравн. с /8/)

$$\vec{x} \to \lambda \vec{x}$$

$$\varphi^{(\mu)} \to \lambda^{\Delta_\mu} \varphi^{(\mu)} \qquad (1)$$

Для формулировки гипотезы подобия не обязательно считать, что физические поля обладают определенной масштабной размерностью. Достаточно предположить, что они могут быть представлены в виде линейных комбинаций полей $\varphi^{(\mu)}$. Набор полей $\varphi^{(\mu)}$ играет, таким образом, роль базиса, по которому могут быть разложены физические поля. Если представить себе, что не только внешний масштаб турбулентности бесконечен, но и ее внутренний масштаб $\eta \to 0$, то тогда физические величины превращаются в свои главные по размерности члены $\varphi^{(\mu)}$. Будем предполагать, что этот набор полон, т.е., что любая локальная характеристика турбулентности может быть представлена в виде разложения

$$A(\vec{x}) = \sum_{\mu} C_{A\mu} \varphi^{(\mu)} \qquad (2)$$

где $C_{A\mu}$ - числа. Разложение (2) позволяет выразить кумулянты /11/

$$\langle\!\langle A(\vec{x})\, B(\vec{y}) \ldots \rangle\!\rangle \tag{3}$$

через средние от полей из базисного набора.

Рассмотрим теперь случай, когда точки $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ разбиты на группы и расстояния x_{ij} между точками, принадлежащими одной группе, малы по сравнению с расстояниями между группами $R_{\alpha\beta}$. Произведение полей, взятых в близких точках, можно рассматривать как некоторое новое поле. Запишем для произведения величин одной группы разложение

$$\varphi^{(\mu_1)}(\vec{x}_1) \ldots \varphi^{(\mu_n)}(x_n) = \sum_{\mu} C_{\mu_1, \ldots, \mu_n, \mu}(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)\, \varphi^{(\mu)}(\vec{x}_1) \tag{4}$$

функции $C_{\mu_1, \ldots, \mu_n, \mu}$ трансляционно инвариантны и поэтому зависят лишь от $x_{ij} = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$. Формула (4) определяет поведение кумулянтов при преобразовании:

$$\vec{R} \to \lambda \vec{R} \qquad \vec{x}_{ij} \to \vec{x}_{ij} \tag{5}$$

Найдем вначале ограничения, которые гипотеза масштабного подобия накладывает на вид кумулянтов полей из базисного набора. Из равенства

$$\langle\!\langle \varphi^{(\mu_1)}(\vec{x}_1) \ldots \varphi^{(\mu_n)}(\vec{x}_n) \rangle\!\rangle = \lambda^{\Delta_{\mu_1} + \ldots + \Delta_{\mu_n}} \langle\!\langle \varphi^{(\mu_1)}(\lambda \vec{x}_1) \ldots \varphi^{(\mu_n)}(\lambda \vec{x}_n) \rangle\!\rangle$$

а также из условий локальной однородности и изотропности турбулентности следует:

$$\langle\!\langle \varphi^{(\mu_1)}(\vec{x}_1) \ldots \varphi^{(\mu_n)}(\vec{x}_n) \rangle\!\rangle = x_{1,2}^{-\Delta_{\mu_1} - \ldots - \Delta_{\mu_n}}\, \Psi\left(\frac{\vec{x}_{1,2}}{x_{1,2}}, \ldots, \frac{\vec{x}_{1,n}}{x_{1,2}}\right) \tag{6}$$

где Ψ – некоторый изотропный тензор. Например, для парного кумулянта двух векторных полей $\vec{\varphi}, \vec{\chi}$ имеем:

$$\langle\!\langle \varphi_i(\vec{x})\, \chi_j(\vec{x} + \vec{r}) \rangle\!\rangle = a r^{\gamma} \left(\delta_{ij} + c \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \tag{7}$$

Здесь a, c – некоторые константы, $\gamma = -\Delta_{\varphi} - \Delta_{\chi}$. Легко показать, что в случае соленоидальных полей

$$c = -\frac{\gamma}{\gamma + 2} \tag{8}$$

В случае потенциальных полей

$$c = \gamma \tag{9}$$

Рассмотрим кумулянты полей $A(\vec{x})$, $B(\vec{y})$, не принадлежащих базисному набору. Согласно гипотезе алгебры (2) кумулянты $\langle\!\langle A(\vec{x})\, B(\vec{y}) \rangle\!\rangle$ могут быть представлены в виде суммы кумулянтов полей из базисного набора:

$$\langle\!\langle A(\vec{x})\, B(\vec{x} + \vec{r}) \rangle\!\rangle = \sum_{\mu, \nu} C_{A\mu}\, C_{B\nu} \langle\!\langle \varphi_{\mu}(\vec{x})\, \varphi_{\nu}(\vec{x} + \vec{r}) \rangle\!\rangle \sim$$
$$\sim \sum_{\mu, \nu} C_{A\mu}\, C_{B\nu}\, a_{\mu}\, a_{\nu}\, r^{-\Delta_{\mu} - \Delta_{\nu}} \tag{10}$$

Выделим в разложениях полей $A(\vec{x})$, $B(\vec{x} + \vec{r})$ члены с наименьшими размерностями Δ_{μ_0}, Δ_{ν_0}. Поскольку единственным характерным масштабом размерности длины является вязкий масштаб η, то

$$\langle\!\langle A(\vec{x})\, B(\vec{x} + \vec{r}) \rangle\!\rangle \sim a_{\mu_0}\, a_{\nu_0}\, C_{A\mu_0}\, C_{B\nu_0}\, r^{-\Delta_{\mu_0} - \Delta_{\nu_0}} +$$
$$+ O\left(\left(\frac{\eta}{r}\right)^{\Delta_{\mu} + \Delta_{\nu} - \Delta_{\mu_0} - \Delta_{\nu_0}} \right) \tag{11}$$

т.е. остальные члены в сумме (10) малы по параметру η / r. При вычислении кумулянтов высшего порядка (3) по формуле (2) главный вклад также дадут члены с наименьшей размерностью. Может оказаться, что в силу каких-либо причин, например, перестановочной симметрии, кумулянт полей с наименьшей размерностью обращается в нуль. В этом случае следует учитывать следующие члены в разложении (2). Ниже рассматривается одна из возможных причин, по которой может происходить обращение в нуль главного члена разложения – наличие конформной симметрии.

Гипотеза масштабного подобия - есть предположение о существовании симметрии по отношению к группе преобразований трехмерного пространства, которая включает сдвиги, повороты и однородные растяжения. В последнее время появились аргументы в пользу утверждения, что существование масштабной симметрии влечет наличие инвариантности по отношению к более широкой группе - к группе конформных преобразований. Одним из оснований для такого предположения служит тот факт, что в окрестности каждой точки конформные преобразования сводятся к масштабным. В некоторых конкретных случаях теории взаимодействующих полей предположение о взаимосвязи масштабной и конформной симметрией удалось обосновать математически /12-14/.

Как было показано выше, требование масштабной симметрии определяет вторые моменты флуктуирующих полей с точностью до констант. Моменты высшего порядка определяются с точностью до однородных функций. Если симметрия повышается до конформной, возникают более жесткие ограничения вида корреляторов /14-16/.

Кроме преобразований масштабной группы полная конформная группа включает преобразование инверсии относительно единичной сферы:

$$x_\mu' = x_\mu / x^2 \tag{12}$$

(более подробно см., например, /12/).

Закон преобразования вектора, соединяющего две близкие точки при инверсии (12) выглядит следующим образом. Пусть

$$\vec{y} = \vec{x} + \vec{d}$$

где d мало

$$y_\mu' = \frac{x_\mu + d_\mu}{|\vec{x}+\vec{d}\,|^2} \approx \frac{x_\mu}{x^2} + \frac{1}{x^2}\left(\delta_{\mu\nu} - 2\,\frac{x_\mu x_\nu}{x^2}\right) d_\mu$$

Отсюда

$$d_\mu' = \frac{1}{x^2}\left(\delta_{\mu\nu} - 2\,\frac{x_\mu x_\nu}{x^2}\right) \tag{13}$$

т.е. преобразование вектора d_μ сводится к повороту с помощью матрицы

$$\Delta_{\mu\nu}(\vec{x}) = \delta_{\mu\nu} - 2\,\frac{x_\mu x_\nu}{x^2} \tag{14}$$

и к растяжению в $1/x^2$ раз. Соответственно, будем полагать, что при инверсии векторное поле $\psi^{(\mu)}$ с масштабной размерностью Δ_μ преобразуется согласно

$$\psi_i^{(\mu)}(\vec{x}) \to \psi_i^{(\mu)\prime}(\vec{x}) = \frac{1}{x^{\Delta_\mu}}\,\Delta_{ij}(\vec{x})\,\psi_j^{(\mu)}\left(\frac{\vec{x}}{x^2}\right) \tag{14a}$$

Предположим, что система кумулянтов $\psi_i^{(\mu)}$ инвариантна относительно замены (14), т.е.

$$\langle\langle \psi_{i_1}^{(\mu_1)}(\vec{x}_1)\ldots\psi_{i_n}^{(\mu_n)}(\vec{x}_n)\rangle\rangle = \frac{1}{x_1^{\Delta_{\mu_1}}}\,\Delta_{i_1 j_1}(\vec{x}_1)\ldots\frac{1}{x_n^{\Delta_{\mu_n}}}\,\Delta_{i_n j_n}(\vec{x}_n)\times$$

$$\times\langle\langle \psi_{j_1}^{(\mu_1)}\left(\frac{\vec{x}_1}{x_1^2}\right)\ldots\psi_{j_n}\left(\frac{\vec{x}_n}{x_n^2}\right)\rangle\rangle \tag{15}$$

При n =2 подстановка выражения (7) в уравнение (15) дает:

$$\langle\langle \varphi_i(\vec{x})\,\chi_j(\vec{x}+\vec{r})\rangle\rangle = \begin{cases} a\,r^{-2\Delta}\left(\delta_{ij} - 2\,\dfrac{r_i r_j}{r^2}\right) & \Delta_\varphi = \Delta_\chi = \Delta \\ 0 & \Delta_\varphi \neq \Delta_\chi \end{cases} \tag{16}$$

т.е. $c = -2$ (17)

Парные кумулянты полей с различной размерностью обращаются в нуль /14/.

Сравнение (17) с (7), (8) показывает, что конформно инвариантные поля не могут, вообще говоря, обладать свойством соленоидальности или потенциальности. Преобразование инверсии не оставляет инвариантными пространства соленоидальных и потенциальных полей. Однако соленоидальные поля могут быть образованы из конформно инвариантных векторных полей выделением их соленоидальной части, либо взятием ротора. Потенциальные поля могут быть образованы выделением потенциальной части конформно инвариантных векторных полей, либо взятием градиента конформно инвариантных скалярных полей. Так например, предположим, что поле вихря скорости $\Omega(\vec{x})$ может быть записано в виде

$$\Omega(\vec{x}) = \mathrm{rot}\,\vec{\varphi}(\vec{x})$$

где $\vec{\varphi}(\vec{x})$ – конформно инвариантное поле (поле $\varphi(\vec{x})$ с точностью до градиента скалярного поля совпадает с эйлеровой скоростью). Парный кумулянт поля $\vec{\varphi}$ может быть записан в виде (16). Взяв ротор от выражения (16), получаем:

$$\langle\langle \Omega_i(\vec{x})\,\Omega_j(\vec{x}+\vec{r})\rangle\rangle = a\, r^{-2\Delta-2}\left(\delta_{ij} + \frac{2\Delta+2}{2\Delta}\,\frac{r_i r_j}{r^2}\right) \qquad (18)$$

т.е. выражение вида (7) с учетом (8).

Решение уравнения (15) при $n=3$ может быть найдено, например, методом работы /15/. Результат запишется в виде:

$$\langle\langle \varphi_i(\vec{x})\,\psi_j(\vec{y})\,\chi_c(\vec{z})\rangle\rangle = r^{\Delta_\varphi-\Delta_\chi-\Delta_\psi}\, s^{\Delta_\psi-\Delta_\varphi-\Delta_\chi}\, t^{\Delta_\varphi-\Delta_\chi-\Delta_\psi} \times \qquad (19)$$

$$\times \sum_{k=1}^{4} C_k\, S_{ijc}^{(k)}$$

где

$$\vec{r} = \vec{y} - \vec{x}$$
$$\vec{s} = \vec{x} - \vec{z}$$
$$t = \vec{z} - \vec{y}$$

$$S_{ijc}^{(1)} = rst\left(\frac{s_i}{s^2} + \frac{r_i}{r^2}\right)\left(\frac{r_j}{r^2} + \frac{t_j}{t^2}\right)\left(\frac{t_c}{t^2} + \frac{s_c}{s^2}\right)$$

$$S_{ijc}^{(2)} = \frac{rs}{t}\,\Delta_{jc}(\vec{t})\left(\frac{s_i}{s^2} + \frac{r_i}{r^2}\right)$$

$$S_{ijc}^{(3)} = \frac{rt}{s}\,\Delta_{ic}(\vec{s})\left(\frac{r_j}{r^2} + \frac{t_j}{t^2}\right)$$

$$S_{ijc}^{(4)} = \frac{st}{r}\,\Delta_{ij}(\vec{r})\left(\frac{t_c}{t^2} + \frac{s_c}{s^2}\right)$$

C_k – произвольные константы. Легко проверить, что симметричный по перестановкам кумулянт (19) обращается в нуль. Поэтому при разложении физических полей по базису следует учитывать следующие за старшим члены.

Гипотеза масштабного подобия требует степенного поведения моментов флуктуирующих полей. Однако соотношение показателей степени может быть иным чем в теории /1-6/. Рассмотрим корреляционные функции гидродинамических полей $A^{(\ell)}(\vec{x})$, таких, как степеней производных скорости, градиентов температуры и давления, скорости диссипации энергии и т.д. Измерив автокорреляционные функции полей $A^{(\ell)}$ можно было бы определить размерность доминирующего поля в разложении (2). Парные кумулянты различных полей будут иметь вид (11). Если, однако, кумулянты полей с различной размерностью обращаются в нуль (например, в силу конформной симметрии), то главный вклад в сумму (10) даст член с наименьшими совпадающими между собой размерностями Δ_μ, Δ_ν. Размерность кумулянта полей A, B окажется повышенной по сравнению с (11). Среди других следствий конформной инвариантности следует отметить выражение (19) для тройного кумулянта. Мы осознаем сложность измерения указанных выше характеристик, но экспериментальная проверка приведенной выше "алгебраической" формулировки свойств масштабного подобия и особенно гипотезы конформной инвариантности представляется нам очень важной и желательной.

Литература

1. А.Н.Колмогоров. Докл.АН СССР 30, 299 (1941).
2. А.М.Обухов. Докл.АН СССР 32, 22 (1941).
3. A.N. Kolmogorov J. Fluid Mech. 13, 82 (1962).
4. A.M. Obukhov J. Fluid Mech 13, 77 (1962).
5. А.М.Яглом, Докл.АН СССР 166, 49 (1966).
6. Е.А.Новиков. ПММ 35, 266 (1971).
7. А.З.Паташинский, В.Л.Покровский. ЖЭТФ 46, 994 (1964).
8. А.З.Паташинский, В.Л.Покровский. ЖЭТФ 59, 439 (1966).
9. L. Kadanoff Physics 2, 263 (1966).
10. K.G. Wilson Phys. Rev. 179, 1199 (1969).
11. А.С.Монин, А.М.Яглом. Статистическая гидромеханика ч. 1,2. М.Наука 1965 (1967).
12. G. Mack, A. Salam Ann. Phys. 53, 174 (1969).
13. D. Gross, J. Wess Phys. Rev. Д2, 753 (1970).
14. А.М.Поляков. Письма ЖЭТФ 12, 538 (1970).
15. E.J. Schreier Phys. Rev. Д3, 980 (1971).
16. S. Ferrara, A.F. Grillo, G. Parisi, R. Gatto Lett. Nuovo Cim. 4, 115, 1972.

Ответственный за выпуск С.Н.РОДИОНОВ
Подписано к печати 25.П-74г. МН 08I08
Усл. 0,6 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ №2 . ПРЕПРИНТ
Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР,вг