17

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ ИЯФ 93 - 73

Б.И.Стурман

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Новосибирск

1973

Стурман Б.И.

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматривается упрощенное динамическое описание нелинейного взаимодействия потенциальных колебаний в магнитоактивной плазме. Показано, что в ряде случаев существенен снос высокочастотных колебаний медленными движениями среды. Исследована неустойчивость потенциальной волны большой амплитуды.

Введение

Процессы нелинейного взаимодействия волн в магнитоактивной плазме исследовались в ряде работ /1-3/. При этом обычно использовалось приближение слабой турбулентности, предполагающее малость нелинейности и не учитывающее когерентных эффектов. Полученные для вероятностей рассеяния общие формулы, как правило, трудно обозримы и применение их к решению конкретных задач малоэффективно.

В магнитоактивной плазме, как и в изотропной, часто приходится сталкиваться с ситуациями, когда существенным является взаимодействие высоко и низкочастотных волн. Сюда, в частности, относится широкий круг вопросов, связанных с турбулентным нагревом ионов В.Ч. полем накачки. В настоящей работе рассмотрено упрощенное динамическое описание таких процессов (аналогичное использовавшемуся в /4/ для изотропной плазмы) основанное на разложении уравнений движения по малому параметру – отношению частот В.Ч. и Н.Ч. колебаний. Полученные в § 1 сравнительно простые динамические уравнения не предполагают усреднениям по фазам и справедливы при больших амплитудах взаимодействующих волн.

Мы ограничимся исследованием взаимодействия как называемых потенциальных колебаний магнитоактивной плазмы /5/. При $\beta = \frac{8\pi n T_e}{H_0^2} \ll 1$ эти колебания, как правило, наиболее эффективно возбуждаются в экспериментах (например, при параметрическом резонансе в В.Ч. поле /6-7/). Кроме того, потенциальные волны, представляющие собой коротковолновые колебания, в экспериментальных установках ограниченных размеров, при не слишком больших плотностях плазмы, могут быть единственно возможными[x]. Взаимодействие этих волн между собой является одним из факторов, ограничивающих амплитуду колебаний и приводящих к установлению стационарных состояний.

Известно /8/, что существуют два механизма взаимодействия высоко и низкочастотных волн, рассеяние В.Ч. волн на низкочастотных функциях плотности и снос их медленными движениями среды. В изотропной плазме реализуется первый из этих механизмов. В § 1 показано, что в магнитоактивной плазме возможны ситуации, когда необходим учет и второго из них. Приближение высокочастотной силы, использовавшееся в /9/, при этом оказывается недостаточным.

---

x) Исключение, конечно, составляют электромагнитные волны больших частот.

О характере перекачки по спектру и об устойчивости достаточно узких в К – пространстве спектров можно судить по устойчивости монохроматической волны. В § 2 исследуется устойчивость потенциального колебания большой амплитуды.

На основе уравнений, полученных в § 1, в § 3 выводится кинетическое уравнение, описывающее при малых амплитудах индуцированное рассеяние на ионах. Исследуются инкременты индуцированного рассеяния.

§ 1. Основные уравнения

Частоты В.Ч. потенциальных колебаний описываются дисперсионным уравнением:

$$\omega^4-(\omega_{pe}^2+\Omega_e^2)\,\omega^2+\omega_{pe}^2\Omega_e^2\cos^2\vartheta=0 \qquad (1)$$

Здесь ω_{pe}, Ω_e – соответственно электронная плазменная и циклотронная частоты; ϑ – угол между волновым вектором и направлением магнитного поля $\vec{H}_0$. В дальнейшем ось z будем считать направленной по полю. Уравнение (1) справедливо для волновых векторов $k \gg \frac{\omega}{c}$. При меньших K колебания становятся непотенциальными. Если $\omega_{pe}, \Omega_e \gg k V_{Te}$, где V_{Te} – тепловая скорость электронов, то, пренебрегая взаимодействием с резонансными частицами, можно считать, что электроны в В.Ч. колебаниях движутся как целое. Это позволяет описывать их движения гидродинамически:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+[\vec{V}\vec{\Omega}_e]-\frac{e}{m}\nabla\varphi+\vec{S}_1=0; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+n_0\,\mathrm{div}\,\vec{V}+S_2=0; \qquad \Delta\varphi=4\pi n e$$

$$\vec{S}_1=(\vec{V}\nabla)\vec{V}^d+(\vec{V}^d\nabla)\vec{V} \qquad (3)$$

$$S_2=\mathrm{div}\,(n^d\vec{V}+n\vec{V}^d)$$

Здесь n^d, $\vec{V}^d$ – низкочастотные вариации плотности и скорости электронов, n_0 – их равновесная плотность, e – абсолютная величина заряда – электрона; n, $\vec{V}$, φ – В.Ч. плотность, скорость, потенциал.

Для простоты в (2) отброшены члены, описывающие взаимодействие В.Ч. колебаний между собой. Таким образом, уравнение (2) описывает взаимодействие потенциальных колебаний с медленными движениями плазмы. Учет отброшенных членов мы проведем отдельно.

Систему (2) удобно свести к одному уравнению для величины n_k (n_k – часть пространственной Фурье – компоненты плотности $\sim \exp[-i\omega_k t]$, где ω_k – закон дисперсии рассматриваемого В.Ч. колебания). Считая, что биения, создаваемые В.Ч. колебаниями резонансно взаимодействуют с медленными пульсациями скорости и плотности, получим:

$$\hat{D}n_k=in_0\left\{\Omega_e^2k_z(\vec{n}\vec{S}_{1k})-\Omega_e\frac{\partial}{\partial t}[\vec{k}\vec{S}_{1k}]_z+\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{k}\vec{S}_{1k})+\frac{i}{n_0}\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\Omega_e^2\frac{\partial}{\partial t}\right)S_{2k}\right\}$$

$$\hat{D}=\frac{\partial^4}{\partial t^4}+(\Omega_e^2+\omega_{pe}^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Omega_e^2\omega_{pe}^2\cos^2\vartheta, \quad \vec{n}=\frac{\vec{H}_0}{H_0} \qquad (4)$$

В правой части (4) n_k и $\vec{V}_k$ можно считать связанными линейным соотношением:

$$\vec{V}_k=\vec{U}_k\frac{n_k}{n_0} \qquad (5)$$

$$\vec{U}_k=\frac{\omega_{pe}^2K^{-2}}{\omega_k^2-\Omega_e^2}\left\{\omega_k\left(\vec{k}-\frac{\Omega_e^2}{\omega_k^2}k_z\vec{n}\right)+i[\vec{\Omega}_e\vec{K}]\right\}$$

В линейном приближении амплитуда волны $n_k e^{i\omega_k t}$ постоянна. Под действием нелинейного взаимодействия с низкочастотными колебаниями она медленно меняется. Удерживая в $\hat{D}$ только первую производную от амплитуды В.Ч.колебаний получим окончательно:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\omega_k\right)n_k=-\frac{i}{2}\left|\frac{\omega_k^2-\Omega_e^2}{\omega_+^2-\omega_-^2}\right|\int\Big\{\vec{V}_{\varkappa}^d\Big[\vec{k}_1(\vec{U}_k^*\vec{U}_{k_1})\frac{k^2}{\omega_{pe}^2}+ \tag{6}$$

$$+\vec{U}_k^*(\vec{\varkappa}\vec{U}_{k_1})\frac{k^2}{\omega_{pe}^2}+\vec{k}\Big]+(\vec{k}\vec{U}_{k_1})\frac{n_{\varkappa}^d}{n_0}\Big\}n_{k_1}\delta(\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{\varkappa})\,d\vec{\varkappa}\,d\vec{k}_1$$

где $\omega_\pm(\vec{k})$ – корни дисперсионного уравнения (1).

Пусть В.Ч.колебания образуют в К – пространстве узкий пакет. В этом случае (6) может быть упрощено до вида:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\omega_k\right)n_k=-in_k\int\left(\vec{k}\,\vec{V}_{\varkappa}^d+\frac{\partial\omega_k}{\partial n}n_{\varkappa}^d\right)d\vec{\varkappa} \tag{7}$$

Первый член отвечает сносу ВЧ колебаний медленными движениями, второй связан с локальным отличием плотности от равновесной. Оценим вклад обеих членов. Если принять для оценки, что $\varkappa V_{\varkappa}^d\sim\overline{\omega}\frac{n_{\varkappa}^d}{n_0}$, то видно, что необходимо сравнить $\frac{\partial\omega_{k_0}}{\partial n}$ и $\frac{k_0}{\varkappa_0}\frac{\overline{\omega}_{k_0}}{n_0}$, где K_0 и $\varkappa_0$ средний волновой вектор и ширина пакета, а $\overline{\omega}$ – характерная частота Н.Ч. колебаний.

Пусть $\omega_{pe}\gg\Omega_e$. Тогда из (1) видно, что меньшая из частот слабо зависит от плотности $\frac{\partial\omega_k}{\partial n}\sim\frac{1}{n_0}\Omega_e^3/\omega_{pe}^2$ и учет 1-го слагаемого в (7), вообще говоря, может быть необходимым даже для достаточно широких пакетов. Если $\omega_{pe}\ll\Omega_e$, то сказанное следует отнести к верхней В.Ч.ветви.

Для замыкания уравнения (6) учтем действие В.Ч.колебаний на медленные движения плазмы. Н.Ч. колебания, в отличие от высокочастотных, могут эффективно взаимодействовать с частицами, фазовые скорости низкочастотных волн могут быть порядка тепловых. Поэтому медленные движения следует описывать кинетически.

Движение электронов будем описывать исходя из кинетического уравнения:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t}+(\vec{V}_e\nabla)f_e-[\vec{V}_e\vec{\Omega}_e]\frac{\partial f_e}{\partial\vec{V}_e}+\frac{e}{m}\nabla\psi\frac{\partial f_e}{\partial\vec{V}_e}=0$$

Ионы, в пренебрежении высокочастотными движениями, подчиняются линеаризованному уравнению:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}+(\vec{V}_i\nabla)f_i+[\vec{V}_i\vec{\Omega}_i]\frac{\partial f_i}{\partial\vec{V}_i}-\frac{e}{M}\nabla\psi\frac{\partial f_i^0}{\partial\vec{V}_i}=0$$

ψ – электрический потенциал; Ω_i – ионная циклотронная частота, f_i^0 – равновесная функция распределения ионов.

Представим функцию распределения f_e в виде $f_e=f+F$, где f – "быстрая", а F – "медленная" части. Аналогично $\psi=\varphi+\varphi^m$ (φ^m – "медленный" потенциал). Функции F и f связаны с динамическими переменными $n,\vec{V},n^d,\vec{V}^d$ формулами:

$$\int f\,d\vec{V}_e=\frac{n}{n_0};\quad\int F\,d\vec{V}_e=1+\frac{n^d}{n_0} \tag{8}$$

$$\int\vec{V}_e f_e\,d\vec{V}_e=\left(1+\frac{n^d}{n_0}\right)\vec{V};\quad\int\vec{V}_e F\,d\vec{V}_e=\vec{V}^d+\frac{n^d}{n_0}\vec{V}^d+\left\langle\frac{n}{n_0}\vec{V}\right\rangle$$

Угловые скобки означают выделение медленной части.

Нашей задачей является определение F. Для быстрой функции распределения достаточно ограничиться линеаризованным уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(\vec{V}_e\nabla)f-[\vec{V}_e\vec{\Omega}_e]\frac{\partial f}{\partial\vec{V}_e}+\frac{e}{m}\nabla\varphi\frac{\partial f^0}{\partial\vec{V}_e}=0 \tag{9}$$

f^0 – равновесная функция распределения, которую в дальнейшем будем считать максвелловской.

Тогда для "медленной" функции распределения получим:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+(\vec{V}_e\nabla)F-[\vec{V}_e\vec{\Omega}_e]\frac{\partial F}{\partial\vec{V}_e}+\frac{e}{m}\nabla\varphi^m\frac{\partial f^0}{\partial\vec{V}_e}=-\frac{e}{m}\left\langle\nabla\varphi\frac{\partial f}{\partial\vec{V}_e}\right\rangle. \tag{10}$$

В цилиндрической (в пространстве скоростей) системе координат эти уравнения элементарно интегрируются по углу.

Система (9, 10) – есть не что иное как уравнения теории возмущений, учитывающие малость параметра . Они в первом, неисчезающем приближении описывают воздействия ВЧ. колебаний на низкочастотные. Более высокие приближения могут быть получены регулярным способом. Заметим, что зная F легко получить кинетический аналог уравнения (6). Для этого в уравнении для В.Ч. функции распределения следует удержать член $\sim \nabla \varphi \frac{\partial F}{\partial \vec{v}_e}$.

Мы не будем останавливаться на этом.

Приведем выражения для n^d и $\vec{V}^d$, следующие из (8-10)

$$\frac{n^d_{k\omega}}{n_0} = \frac{1}{T_e} G_{k\omega} \Phi_{k\omega} \tag{11}$$

$$\Phi_{k\omega} = m\omega_{pe} \int \frac{n_{k_1\omega_1} n^*_{k_2\omega_2}}{n_0^2} \frac{(\vec{k}_1 \vec{U}_2)^*}{k_1^2 \omega_1} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 + \vec{k}_2)\, \delta(\omega - \omega_1 + \omega_2)\, d\vec{k}_{1,2}\, d\omega_{1,2} - \tag{12}$$

– Фурье образ высокочастотного потенциала:(см. /9/).

$$G_{k\omega} = -\frac{k_j k_e (\delta_{ej} + \delta\varepsilon^i_{je})}{k_j k_e (\delta_{ej} + \delta\varepsilon^i_{je} + \delta\varepsilon^e_{je})} . \tag{13}$$

Выражения для $\delta\varepsilon^{i,e}_{je}$ хорошо известны: (см.например /5/).

Для скорости $\vec{V}^d$ имеем:

$$V^d_{x,y} \ll V^d_z$$

$$(V^d_z)_{k\omega} = \frac{\omega}{k_z} \frac{n^d_{k\omega}}{n_0} - \int \frac{n_{k_1\omega_1} n^*_{k_2\omega_2}}{n_0^2 k_1^2 k_2^2} \omega^4_{pe} \left\{ \frac{k_{1z} k_{2z}}{\omega_1^3} (k_{1z} + k_{2z}) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\omega_1 \Omega_e^2} \left[k_{1z} k^2_{2\perp} + k_{2z} k^2_{1\perp} + k_z (\vec{k}_{1\perp} \vec{k}_{2\perp}) \right] + \frac{\omega_1}{\Omega_e^2 (\omega_1^2 - \Omega_e^2)} \left[k_{1z} (\vec{k}_\perp \vec{k}_{2\perp}) - \right. \tag{14}$$

$$\left. - k_{2z} (\vec{k}_{1\perp} \vec{k}_\perp) + i \frac{(k_{1z} + k_{2z})}{\Omega_e (\omega_1^2 - \Omega_e^2)} [\vec{k}_1 \vec{k}_2]_z \right\} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot$$

$$\delta(\omega - \omega_1 + \omega_2)\, d\vec{k}_1\, d\vec{k}_2\, d\omega_1\, d\omega_2$$

В сильно неизотермической плазме функция $G_{k\omega}$ имеет резко выраженные максимумы, отвечающие резонансному взаимодействию В.Ч.волн с низкочастотными потенциальными колебаниями.

Если $kV_{T_i} \gg \Omega_i$ – единственное Н.Ч.потенциальное колебание – незамагниченный ионный звук $\bar{\omega}_k = \omega_s \equiv k(T_e/M)^{1/2}$. При этом

$$G_{k\omega} \simeq \frac{\omega_s^2}{\omega^2 - \omega_s^2}$$

Если ионы замагничены, то для низкочастотных потенциальных колебаний имеет место известное дисперсионное уравнение:

$$\omega^4 - \omega^2 (\omega_s^2 + \Omega_i^2) + \omega_s^2 \Omega_i^2 \cos^2\vartheta = 0 \tag{15}$$

В этом случае:

$$G_{k\omega} = \frac{\omega_s^2 (\omega^2 - \Omega_i^2 \cos^2\vartheta)}{(\omega^2 - \bar{\omega}_+^2)(\omega^2 - \bar{\omega}_-^2)} ,$$

где $\bar{\omega}_\pm(\vec{k})$ – корни дисперсионного уравнения (15).

В изотермической плазме ($T_e \sim T_i$) затухание Н.Ч.колебаний порядка частоты. Максимумы функции $G_{k\omega}$ при этом, выражены слабее и отвечают индуцированному рассеянию на ионах или же нелинейному циклотрону затуханию.

Динамические уравнения (6,11,14) полностью описывают взаимодействие В.Ч. и Н.Ч. волн. Условием применимости такого описания является малость периода В.Ч.колебаний по сравнению с характерными временами нелинейных процессов. Пусть для В.Ч.волн $\Theta_{хар} \sim 1$. Если с увеличением энергии В.Ч.колебаний, их взаимодействие с Н.Ч.волнами остается главным, то это условие дает оценку:

$$\frac{W}{nT} \ll \min\left\{ \frac{1}{(kr_d)^2}, \frac{1}{(kr_H)^2} \right\},$$

где r_d, r_H –дебаевский и ларморовские радиусы электронов.
W – плотность энергии В.Ч.электрического поля.
В анизотропной плазме, помимо рассмотренных процессов, уже при малых амплитудах могут быть осуществлены 3-х волновые процессы распада и слияния В.Ч.волн.

Законами сохранения разрешены процессы распада внутри нижней ветви $l^- \rightleftarrows l^- + l^-$ и, если $2\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \ll \frac{\omega_{pe}}{\Omega_e} \ll \frac{1}{2}\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}$ процесс $l^+ \rightleftarrows l^+ + l^-$ x). Такие распадные процессы естественно описывать гидродинамически. В работе /10/ было показано, что соответствующие гидродинамические уравнения гамильтоновские. Там же был указан способ вычисления гамильтонианов взаимодействия В.Ч.волн.

Динамические уравнения, описывающие распадные 3-х волновые процессы легко, однако, получить из уравнения (4), если учесть в нем отброшенные члены. Для этого надо положить в (4) $\vec{S}_1 = (\vec{v}\nabla)\vec{v}$; $S_2 = div(n\vec{v})$, воспользоваться в правой части линейным соотношением (6) и отбросить нерезонансные члены. Получающиеся при этом уравнения имеют громоздкий вид и сложную угловую зависимость; не будем их выписывать и ограничимся оценками характерных времен нелинейных процессов.
Инкремент неустойчивости волны l^- относительно распада $l^- \rightleftarrows l^- + l^-$ есть:

$$\gamma_p^- \sim \omega_{pe}\left(\frac{W}{nT}\right)^{1/2} k_o r_d \qquad (16)$$

если $\omega_{pe} \ll \Omega_e$ и

$$\gamma_p^- \sim \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e}\left(\frac{W}{nT}\right)^{1/2} k_o r_d \qquad (17)$$

если $\omega_{pe} \gg \Omega_e$. Если распады разрешены и для верхней ветви, то волна l^+ неустойчива с инкрементом

$$\gamma_p^+ \sim \omega_{pe}\left(\frac{W}{nT}\right)^{1/2} k_o r_d \qquad (\omega_{pe} \gg \Omega_e) \qquad (18)$$

$$\gamma_p^+ \sim \Omega_e\left(\frac{W}{nT}\right)^{1/2} k_o r_d \qquad (\omega_{pe} \ll \Omega_e)$$

x) В более узкой области частот $\frac{1}{2} \ll \frac{\omega_{pe}}{\Omega_e} < 2$ законами сохранения разрешен также процесс $l^+ \rightleftarrows l^- + l^-$.

Максимум инкремента достигается на распадной поверхности $\omega_{\vec{k}_o} = \omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}_o - \vec{k}}$ при $k \sim k_o$.

§ 2. Неустойчивость монохроматической В.Ч. волны

Исследуем устойчивость монохроматической волны большой амплитуды в рамках уравнений (6,11). Ограничимся для простоты верхней ветвью l^+. Монохроматической волне отвечает точное решение уравнения (6)

$$\frac{n_k}{n_o} = A_o \delta(\vec{k} - \vec{k}_o)\, e^{-i\omega_k t}$$

$$|A_o|^2 = \frac{W_o}{2nT}(k_o r_d)^2; \quad W_o = \frac{E_o^2}{8\pi}.$$

Линеаризуя уравнения движения (6,11) на фоне этого решения и полагая возмущения n_k пропорциональными $exp[-i(\omega_k + \omega)t]$ нетрудно получить дисперсионное уравнение:

$$1 + G_{k\omega}\frac{W_o}{nT_e}\frac{k_o^2}{4\omega_o}\left(\frac{\omega_o^2 - \Omega_e^2}{\omega_o^2 - \omega_-^2}\right)\left[\frac{\left|\frac{\vec{k}_o + \vec{k}, \vec{u}_o}{\vec{k}_o + \vec{k}}\right|^2}{-\omega + \omega_{\vec{k}_o + \vec{k}} - \omega_{k_o}} + \frac{\left|\frac{\vec{k}_o - \vec{k}, \vec{u}_o}{\vec{k}_o - \vec{k}}\right|^2}{\omega + \omega_{\vec{k}_o - \vec{k}} - \omega_{k_o}}\right] = 0 \qquad (19)$$

Рассмотрим сначала случай неизотермической плазмы ($T_e \gg T_i$).

При малых амплитудах ~~имеет~~ место имеет место обыкновенная распадная неустойчивость. Если ионы незамагничены ($kv_{T_i} \gg \Omega_i$), то максимум инкремента достигается на распадной поверхности

$$\omega_{\vec{k}_o} = \omega_{\vec{k}_o - \vec{k}} + \omega_s(k).$$

$$\gamma \sim \left(\frac{W}{nT}\right)^{1/2} (\Gamma\omega_s)^{1/2} \qquad (20)$$

$$\Gamma = \min\left\{\omega_{pe}, \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e}\right\}$$

формула (20) справедлива, если выполняются неравенства:

$$\gamma_k \ll \omega_s(k); \; \gamma_k \ll \omega_{\vec{k}_0+\vec{k}} + \omega_{\vec{k}_0-\vec{k}} - 2\omega_{\vec{k}_0} \qquad (21)$$

Характерно, что инкремент (20) растет с увеличением k ($\vec{k}$, естественно, находится на распадной поверхности) и достигает абсолютного максимума при $kr_H \sim 1$, если $\omega_{pe} \gg \Omega_e$ и $kr_d \sim \frac{\omega_{pe}}{\Omega_e}$ в случае $\omega_{pe} \ll \Omega_e$. При этом

$$\gamma_{max} \sim (\omega_{pe}\Omega_e)^{1/2} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} \left(\frac{W}{nT}\right)^{1/2}; \qquad (\omega_{pe} \gg \Omega_e)$$

$$\gamma_{max} \sim \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \left(\frac{W}{nT}\right)^{1/2}; \qquad (\omega_{pe} \ll \Omega_e).$$

Сравнивая эти инкременты с распадными (18) видим, что последние меньше, если

$$k_0 r_d \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} \left(\frac{\Omega_e}{\omega_{pe}}\right)^{1/2} \qquad \text{при } \omega_{pe} \gg \Omega_e$$

и $$k_0 r_d \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4} \left(\frac{\omega_{pe}}{\Omega_e}\right)^2 \qquad \text{при } \omega_{pe} \ll \Omega_e.$$

Если частоты ω_{pe}, Ω_e не слишком различаются, так что условия распада $\ell^+ \rightleftarrows \ell^+ + \ell^-$ выполнены (мы в дальнейшем ограничимся этой, довольно широкой, областью частот), то с ростом амплитуды при фиксированном k раньше нарушается первое из условий (21). Заметим, что при $\omega_{pe} \sim \Omega_e$, вообще говоря, $\omega_{\vec{k}_0-\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_0+\vec{k}} - 2\omega_{\vec{k}_0} \sim \omega_{pe} \gg \omega_s$.

При амплитудах $\frac{W}{nT} \gg \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{\Omega_e}{\omega_{pe}}$; $(\omega_{pe} \gg \Omega_e)$ и $\frac{W}{nT} \gg \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}$; $(\omega_{pe} \ll \Omega_e)$ описанная неустойчивость полностью перестраивается. Вблизи поверхностей $\omega_{\vec{k}_0} = \omega_{\vec{k}_0 \pm \vec{k}}$ развивается модифицированная распадная неустойчивость с инкрементом $\gamma \gg \omega_s$.

$$\gamma \sim \left(\frac{W}{nT}\right)^{1/3} (\Gamma\omega_s^2)^{1/3} \qquad (22)$$

Оценим величину абсолютного максимума этого инкремента. Пусть сначала $\omega_{pe} \gg \Omega_e$. При достаточно больших амплитудах либо нарушается второе из условий (21), либо становится существенным 4-х волновое взаимодействие $2\ell^+ \rightleftarrows 2\ell^+$ с характерным временем $\tau^{-1} \sim \omega_p \frac{W}{nT}(kr_d)^2$. В рассматриваемой области частот ω_{pe}, Ω_e 4-х волновые процессы несущественны, если

$$\frac{W}{nT}(kr_d)^2 \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}$$

Второе из условий (21) качественно слабо ограничивает величину γ_{max}.

Если $\frac{W}{nT} \gg \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2}$, то

$$\gamma_{max} \sim \omega_p; \qquad (23)$$

Этот инкремент достигается при $kr_H \ll 1$. Сравнивая его с инкрементом распада $\ell^+ \rightleftarrows \ell^+ + \ell^-$ видим, что последний меньше до амплитуд $\frac{W}{nT} \ll \frac{m}{M}(k_0 r_d)^{-2}$, если $k_0 r_H \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}$ и больше если $k_0 r_d > \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}$.

Если $\frac{W}{nT} \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2}$, то максимум инкремента достигается при $k r_H \sim 1$

$$\gamma_{max} \sim (\omega_{pe}\Omega_e^2)^{1/3} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3} \left(\frac{W}{nT}\right)^{1/3} \ll \omega_{pi}$$

Условие $\gamma \gg \omega_s$ дает ограничение на амплитуду снизу:

$$\frac{W}{nT} \gg \frac{\Omega_e}{\omega_{pe}} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}$$

Если $k_0 r_H \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}$, то приведенный инкремент снова больше распадного γ_p^+.

Пусть теперь $\omega_{pe} \ll \Omega_e$. Как и в предыдущем случае, 2-е из условий (21) несущественно, раньше "в игру" вступают 4-х волновые процессы. В области волновых векторов и амплитуд, где ими можно пренебречь

$$\frac{W}{nT}(k v_d)^2 \ll \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}\frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2}$$

Главным нелинейным процессом, если основная волна не слишком длинноволновая, ($k_0 v_d \gg \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2}\left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}$) будет распад $\ell_0^+ \to \ell^+ + \ell^-$ с инкрементом (18).

Исследуем теперь устойчивость ℓ^+ волны в плазме с замагниченными ионами $k v_{Ti} \ll \Omega_i$. В этой области K-пространства могут существовать две ветви собственных низкочастотных колебаний, описываемые дисперсионным уравнением (15). Рассмотрим сначала распадную неустойчивость. Она развивается на поверхностях $\omega_{\vec k_0} = \omega_{\vec k_0 - \vec k} + \bar\omega_\pm(\vec k)$ с инкрементами

$$\gamma_\pm^2 \sim \Gamma\omega_s^2 \frac{W}{nT}\frac{|\bar\omega_\pm^2 - \Omega_i^2\cos^2\vartheta|}{\bar\omega_\pm(\bar\omega_+^2-\bar\omega_-^2)} \quad (24)$$

В сильно неизотермической плазме наиболее неустойчива верхняя из Н.Ч.ветвей. Соответствующий инкремент растет с увеличением k и при $\omega_s \gg \Omega_i$ определяется формулой (20). При не слишком больших амплитудах он достигает абсолютного максимума при $\omega_s \sim \Omega_i \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2}$, если $\Omega_e \left(\frac{m}{M}\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2} \ll \omega_{pe}$ и при $k r_d \sim 1$ в обратном случае. Если рост инкремента ограничивается ионным циклотронным затуханием, то распад $\ell^+ \rightleftarrows \ell^+ + \ell^-$ несущественен для

$$k_0 v_d \ll \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/4}\left(\frac{\Omega_i}{\omega_{pe}}\right)^{1/2}$$

В противном случае имеет место оценка, сделанная ранее для случая $\omega_{pe} \ll \Omega_e$.

Характер неустойчивости, таким образом, сохраняется и в плазме с замагниченными ионами. Появление 2-й низкочастотной ветви не приводит к появлению неустойчивости с большим инкрементом.

Условие замагниченности сводится к появлению еще одного механизма ограничения роста инкремента в области больших k. Это относится, разумеется, не только к распадной неустойчивости, но и к случаю, когда $\gamma_k \gg \omega_s$.

Здесь уместно сказать следующее:

В работе /11/ исследовался порог неустойчивости при распаде однородного электрического поля на В.Ч. и Н.Ч. потенциальные волны. Было показано, что порог минимален для распада с участием нижней из Н.Ч. ветвей при $\omega_s \gg \Omega_i$. Из отмеченного выше следует, что при исследовании нелинейной стадии развития неустойчивости учет верхней ветви Н.Ч.колебаний будет существенен, по-видимому, уже при малых превышениях над порогом.

В изотермической плазме ($T_e \sim T_i$) волна малой амплитуды неустойчива из-за рассеяния на ионах. В области K-пространства $k v_{Ti} \gg \Omega_i$ и до амплитуды $\frac{W}{nT} \ll \frac{k v_{Ti}}{\Gamma}$

$$\gamma \sim \Gamma\frac{W}{nT} \quad (25)$$

Эта неустойчивость локализована вблизи поверхности

$$\frac{\omega_{\vec{k}_0} - \omega_{\vec{k}_0 - \vec{k}}}{k v_{Ti}} = const \sim 1$$

Величина инкремента, таким образом, слабо зависит от k. Однако, как нетрудно видеть, с увеличением k растет ширина области его локализации.

В области малых k ($k v_{Ti} \ll \Omega_i$) неустойчивость имеет примерно такой же инкремент, но область его локализации существенно меньше. Здесь характер неустойчивости сохраняется до амплитуд

$$\frac{W}{nT} \ll \frac{\Omega_i}{\Gamma}.$$

При амплитудах, больше рассмотренных, неустойчивость слабо зависит от соотношения температур, имеет характер модифицированного распада и описывается формулой (22).

§ 3. Индуцированное рассеяние В.Ч.волн

При достаточно малой нелинейности в (11) можно положить $n_{k\omega} = n_k \delta(\omega - \omega_k)$. Если использовать статистическое описание, введя средние по фазам N_k (которое имеет смысл числа квазичастиц

$$\langle n_k n_{k_1} \rangle = \frac{k^2 \omega_k n_0}{2m\,\omega_{pe}^2} \left| \frac{\omega_k^2 - \Omega_e^2}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \right| N_k\, \delta(\vec{k} - \vec{k}_1),$$

то из (6,11) нетрудно получить кинетическое уравнение, описывающее индуцированное рассеяние В.Ч.волн на ионах (для простоты мы считаем их незамагниченными):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\gamma_L\right) N_k = \int T_{\vec{k}\vec{k}_1} N_{k_1} N_k \, d\vec{k}_1 \qquad (26)$$

$$T_{kk_1} = \frac{1}{2n_0} \frac{\omega_k^2 \omega_{pe}^4}{(\omega_+^2 - \omega_-^2)^2} \frac{\left| \vec{k}\vec{k}_1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega_k^2} k_z k_{1z} + i \frac{\Omega_e}{\omega_k} [\vec{k}\vec{k}_1]_z \right|^2}{k^2 k_1^2 T_e} \, \mathrm{Im}\, G\left(\frac{\omega_k - \omega_{k_1}}{|\vec{k} - \vec{k}_1|}\right)$$

γ_L – линейное затухание В.Ч.волн.

Максимум рассеяния достигается на поверхности $\frac{\omega_k - \omega_{k'}}{|\vec{k} - \vec{k}'|} \sim V_{Ti}$

Перекачка по спектру имеет диффузионный по частотам (но не по K) характер (срс /12/). В диффузионном приближении для $k \gg k_1$ можно положить $\mathrm{Im}\, G \backsim k^2 \delta'(\omega_k - \omega_{k_1})$.

Видно, что инкремент индуцированного рассеяния в диффузионном приближении достигает максимума в области больших k. Заметим, что в конкретных задачах, помимо индуцированного рассеяния в кинетическом уравнении (26) надо учитывать члены, связанные с упругими процессами рассеяния В.Ч.волн.

Оценим границы применимости статистического описания волн. Уравнение (26) справедливо, если $\gamma_S \gg \gamma, \gamma_L$, где γ_S – затухание ионного звука, а γ инкремент рассмотренной ранее (20) распадной неустойчивости. Для величины нелинейности получаем оценку

$$\frac{W}{nT} \ll \frac{\gamma_S^2}{\omega_S \Gamma}$$

Статистическое описание, таким образом, имеет узкую область применимости.

В заключение автор благодарит Е.А.Кузнецова и А.М.Рубенчика за полезные обсуждения.

Литература

1. В.Н.Цитович, А.Б.Шварцбург. ЖЭТФ 49, 796, 1965.
2. А.П.Кропоткин, В.В.Пустовалов. ЖЭТФ, 49, 1345, 1965.
3. А.П.Кропоткин, В.В.Пустовалов, Н.В.Шолохов, ЖТФ, 38, 240, 1968.
4. Е.А.Кузнецов. Препринт ИЯФ 29-73.
5. А.И.Ахиезер и др. Коллективные колебания в плазме. М.Атомиздат, 1964.
6. W. M. Hoke, S. Bernabei Phys Rev Lett 29, 1218, 1972.
7. Г.М.Батанов, К.А.Сарксян. Доклад на IX конференции по ионизированным газам, Бухарест, 1969.
8. В.Е.Захаров, А.М.Рубенчик. ПМТФ № 5, 84, 1972.
9. А.Г.Литвак, В.Ю.Трахтенберг. ЖЭТФ, 62, 228, 1972.
10. В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 60, 1717, 1971.
11. Н.Е.Андреев, А.Ю.Кирий. ЖТФ, 6, 1080, 1971.
12. Б.И.Брейзман, В.Е.Захаров, С.Л.Мушер. ЖЭТФ, 64, 1297, 1973.