16

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 92 - 73

Б.Г.Конопельченко

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СКЕЛЕТНЫМ ДИАГРАММАМ В КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Новосибирск

1973

Б.Г.Конопельченко

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СКЕЛЕТНЫМ ДИАГРАММАМ В КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

АННОТАЦИЯ

Показано, что бутстрапные уравнения допускают конформно-инвариантные решения в случае произвольного взаимодействия. Использование присоединенных полей (полей с размерностью $\tilde{d} = 4 - d$) делает явной конформную инвариантность разложения n-точечных функций по скелетным диаграммам. Показано, что бутстрапные уравнения инвариантны относительно замены $d \to 4 - d$. Рассмотрены условия отсутствия расходимостей в скелетных диаграммах для произвольного взаимодействия в ν-мерном пространстве-времени.

SKELETON GRAPH EXPANSION IN THE CONFORMAL INVARIANT FIELD THEORY

B.G.Konopelchenko

A b s t r a c t

It is shown that the bootstrap equations permit conformal-invariant solutions for arbitrary interaction. The use of adjoint fields (fields with dimension $\tilde{d} = 4 - d$) made the conformal invariance of the skeleton graph expansion of n-point functions obvious. It is shown that the bootstrap equations are invariant under substitution $d \to 4 - d$. Conditions for absence of ultraviolet divergences in the case of arbitrary interaction in the ν -dimensional space--time are considered.

В работе /1/ было показано, что бутстрапные уравнения, возникающие в результате исключения затравочных членов из уравнений для полных вершин и пропагаторов, в случае трилинейного взаимодействия ($\bar{\psi}\psi\varphi$) допускают конформно-инвариантные решения. При этом разложение по скелетным диаграммам свободно от расходимостей, если размерности полей лежат в интервалах /1-4/:

$$\frac{3}{2} < d_\psi < \frac{5}{2}, \qquad 1 < d_\varphi < 3.$$

Оказалось /4/, что возможны два типа правил: в первом случае используются полные вершины и обратные пропагаторы, во-втором - вершинные функции и пропагаторы.

В настоящей работе рассматривается случай произвольного взаимодействия. Доказана конформная инвариантность разложения n - точечных функций по скелетным диаграммам и, следовательно, конформная инвариантность бутстрапных уравнений (раздел 1).

Использование присоединенных полей (полей с размерностью $\tilde{d} = 4 - d$) дает возможность компактно записывать это разложение и делает явными его конформную инвариантность и симметрию между двумя правилами.

Показано, что бутстрапные уравнения инвариантны относительно преобразования $d \to 4 - d$ и, следовательно, вытекающие из них уравнения имеют вид:

$$F(g, C_2, C_3, C_4) = 0,$$

где g - константа связи, C_2, C_3, C_4 - операторы Казимира конформной группы.

Во втором разделе показано, что расходимости в теории с произвольным K - линейным взаимодействием в ν - мерном пространстве -времени отсутствуют, если

$$\nu < \sum_{1 \le \ell \le \min(4,K)} d_\ell < \nu(\min(4,K) - 1),$$

где суммирование выполняется по всем K линиям основной вершины.

Для того, чтобы избежать трудностей с конформной инвариантностью в пространстве Минковского, в соответствующих местах подразумевается аналитическое продолжение в эвклидово пространство /4/.

I

1. Присоединенные поля. В работе /5/ было замечено, что операторы Казимира конформной группы инвариантны относительно преобразования $d \to 4-d$. Следовательно, каждому неприводимому представлению конформной группы можно сопоставить два поля /5,6/: поле $\psi(x)$ с размерностью d и присоединенное поле $\tilde{\psi}(x)$ с размерностью $\tilde{d} = 4-d$. Как показано в /6/ эти поля связаны конформно-инвариантным соотношением:

$$\psi(x) = \int d^4y\, \Delta(x-y)\,\tilde{\psi}(y) \qquad (1)$$

где

$$\Delta(x-y) = \langle 0|\psi(x)\,\psi^{+}(y)|0\rangle .$$

Имеют место равенства /6/:

$$\tilde{\Delta}(x-y) = \langle 0|\tilde{\psi}(x)\,\tilde{\psi}^{+}(y)|0\rangle = \Delta^{-1}(x-y),$$

$$\langle 0|\psi(x)\,\tilde{\psi}^{+}(y)|0\rangle = \delta^{(4)}(x-y),$$

где $\Delta^{-1}(x-y)$ – определяется из

$$\int dz\, \Delta(x-z)\,\Delta^{-1}(z-y) = \delta^{(4)}(x-y).$$

Из этих соотношений следует формальная аналогия присоединенных полей с токами обычной теории поля.

Определим два типа конформно-ковариантных n – точечных функций:

$$\Gamma(x_1,\dots,x_n) = \langle 0|\psi_1(x_1)\cdots\psi_n(x_n)|0\rangle,$$
$$\tilde{\Gamma}(x_1,\dots,x_n) = \langle 0|\tilde{\psi}_1(x_1)\cdots\tilde{\psi}_n(x_n)|0\rangle . \qquad (2)$$

Из (1) вытекает

$$\Gamma(x_1,\dots,x_n) = \int dy_1\cdots dy_n\, \Delta_1(x_1-y_1)\cdots\Delta_n(x_n-y_n)\,\tilde{\Gamma}(y_1,\dots,y_n). \qquad (3)$$

Следовательно, вакуумные средние от присоединенных полей являются ампутированными (собственными) n -точечными функциями. Таким образом, при замене $d \to 4-d$, например, полная трехточечная функция $\Gamma(x_1, x_2, x_3)$ переходит в вершинную функцию $\tilde{\Gamma}(x_1, x_2, x_3)^{*}$.

II. Конформная инвариантность разложения по скелетным диаграммам. Рассмотрим произвольное K – линейное взаимодействие полей $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_K$, с "основной" вершиной $\Gamma(x_1,\dots,x_K)$.

Введем величину:

$$\Lambda = \int dx_1\cdots dx_K\, \Gamma(x_1,\dots,x_K)\,\tilde{\psi}_1(x_1)\cdots\tilde{\psi}_K(x_K)$$

Используя перестановочные соотношения полей с генераторами конформной группы, и уравнения для вершины $\Gamma(x_1,\dots,x_K)$ нетрудно убедиться, что Λ коммутирует со всеми генераторами и, следовательно, инвариантна относительно конформных преобразований.

При $d \to 4-d$ Λ переходит в

$$\tilde{\Lambda} = \int dx_1\cdots dx_K\, \tilde{\Gamma}(x_1,\dots,x_K)\,\psi_1(x_1)\cdots\psi_K(x_K).$$

В силу (2) – (3) величина Λ инвариантна относительно преобразования $d \to 4-d$:

$$\Lambda = \tilde{\Lambda} . \qquad (4)$$

Разложение для n -точечной функции, в результате, может быть записано в виде:

$$\Gamma(x_1, x_2,\dots, x_n) = \langle 0|\psi_1(x_1)\,\psi_2(x_2)\cdots\psi_n(x_n)\, e^{-\Lambda}|0\rangle \qquad (5)$$

где выражения типа $\langle 0|\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\cdots\psi_n(x_n)\,\Lambda^m|0\rangle$ в (5) рас-

x) Таким образом, преобразование $d \to 4-d$ эквивалентно преобразованию Лежандра производящего функционала.

крываются по обычной теореме Вика и каждой вершине соответствует функция $\Gamma(x_1,\dots,x_k)$ или $\tilde{\Gamma}(x_1,\dots,x_k)$ x). Спариваниям сопоставляются величины

$$\underbrace{\psi_i(x)\,\psi_j^+(y)} = \delta_{ij}\,\Delta_i(x-y),$$

$$\underbrace{\tilde{\psi}_i(x)\,\tilde{\psi}_j^+(y)} = \delta_{ij}\,\tilde{\Delta}_i(x-y) = \delta_{ij}\,\Delta_i^{-1}(x-y), \qquad (6)$$

$$\underbrace{\psi_i(x)\,\tilde{\psi}_j^+(y)} = \delta_{ij}\,\delta^{(4)}(x-y).$$

Из (6) вытекает, что вычисления в (5) с использованием Λ приводят к первому типу правил (Γ , Δ_i^{-1}), а вычисления с $\tilde{\Lambda}$ – ко второму типу ($\tilde{\Gamma}$, Δ_i). В виду (4) разложение (5) инвариантно относительно выбора типа правил.

Конформная инвариантность разложения (5) очевидна, в силу конформной инвариантности Λ xx). Исключение приводимых диаграмм, естественно, не нарушает конформной инвариантности. Исключение приводимых диаграмм, естественно, не нарушает конформной инвариантности.

Бутстрапное уравнение для полной вершины /1-4/ $\Gamma = \frac{1}{2}\Gamma\cdot B$ где B – ядро Бете-Солпитера записывается в виде xxx)

$$\Gamma(x_1,\dots,x_k) = \frac{1}{4}\langle 0|\psi_1(x_1)\cdots\psi_k(x_k)\,e^{\Lambda}|0\rangle . \qquad (6)$$

Для вершинной функции соответственно

$$\tilde{\Gamma}(x_1,\dots,x_k) = \frac{1}{4}\langle 0|\tilde{\psi}_1(x_1)\cdots\tilde{\psi}_k(x_k)\,e^{\Lambda}|0\rangle . \qquad (7)$$

---

x) Исключая из (5) приводимые диаграммы получаем разложение по скелетным диаграммам.

xx) В работах /1-3/ конформная инвариантность разложения доказывается построением "фейнмановских" правил в шестимерном пространстве.

xxx) Множитель $\frac{1}{4}$ возникает в силу соотношения

$$\Gamma(x_1,\dots,x_k) = \langle 0|\psi_1(x_1)\cdots\psi_k(x_k)\,\Lambda|0\rangle .$$

Как известно /1/ бутстрапные уравнения (6-7) получаются в результате исключения затравочной вершины из уравнений типа Дайсона для полных вершин и пропагаторов.

Таким образом, из конформной инвариантности (6-7) следует, что возникающие в теории поля бутстрапные уравнения допускают конформно-инвариантные решения для произвольного взаимодействия. Отметим, что этот результат справедлив не только для теорий с безразмерными константами связи, но и для теорий с размерными константами связи (типа четырехфермионного взаимодействия). В случае трилинейного взаимодействия $\bar{\psi}\psi\varphi$ из (6) вытекает уравнение /1-4/

$$g = g^3 f_1(d_\psi, d_\varphi) + g^5 f_2(d_\psi, d_\varphi) + \dots$$

Из уравнения (7) с учетом $\Lambda = \tilde{\Lambda}$ получаем

$$g = g^3 f_1(\tilde{d}_\psi, \tilde{d}_\varphi) + g^5 f_2(\tilde{d}_\psi, \tilde{d}_\varphi) + \dots$$

Таким образом, бутстрапные уравнения инвариантны относительно замены $d \to 4-d$. Следовательно, f_1, f_2, ... , являются функциями $(d_\psi-2)^2$ и $(d_\varphi-2)^2$, т.е. функциями операторов Казимира конформной группы. Бутстрапные уравнения для пропагаторов /7/ также инвариантны относительно замены $d \to 4-d$.

Отметим, что результаты этого раздела легко распространяются на случай ν-мерного пространства-времени. Соответствующие бутстрапные уравнения инвариантны относительно преобразования $d \to \nu - d$.

Унитарный оператор $Q = \exp\Lambda$ является аналогом S-матрицы. Его матричные элементы представляют собой амплитуды рассеяния в конформно-инвариантной теории поля.

II.

В работах /1-4/ были исследованы условия сходимости скелетных диаграмм в теории с трилинейным взаимодействием (типа $\bar{\psi}\psi\varphi$). Здесь мы рассмотрим условия сходимости в теории с произвольным взаимодействием в ν-мерном пространстве-времени.

Для определенности будем пользоваться разложением по пропагаторам и ампутированным "вершинам". Пусть "вершина" имеет K концов и содержит произвольное число полей с произвольными размерностями. Сумму размерностей $\sum d$ по всем концам вершины Г обозначим через $\mathcal{D}$. Для оценки сходимости необходима асимптотика вершинной функции при больших импульсах. Перепишем условие однородности $\tilde{\Gamma}(p_1, p_2, \dots, p_K)$ в виде

$$\tilde{\Gamma}(\lambda p_1, \dots, \lambda p_i, p_{i+1}, \dots, p_K) = \lambda^{-\mathcal{D}} \tilde{\Gamma}\left(p_1, \dots, p_i, \frac{p_{i+1}}{\lambda}, \dots, \frac{p_K}{\lambda}\right).$$

Переходя к пределу $\lambda \to \infty$, находим, что $\tilde{\Gamma}(p_1, \dots, p_K)$ при стремлении любой группы импульсов к бесконечности имеет вид

$$\tilde{\Gamma}(p_1, \dots, p_K) \underset{p_i \to \infty}{\sim} p^{-\mathcal{D}} f(p_1, \dots, p_K),$$

где p – большой импульс, f – ограниченная функция. Пропагатор произвольного поля

$$\Delta_e(p) \sim (p^2)^{d_e - \frac{\nu}{2}}$$

где d_e – размерность этого поля.

Рассмотрим произвольную неприводимую связную диаграмму с L – внутренними линиями и n – вершинами. Соответствующий интеграл имеет вид

$$T = \prod_{\substack{1 \le e \le L \\ 1 \le i \le n}} \int d^\nu p_e \, \Delta_e(p_e) \, \tilde{\Gamma}_i(p_i, \dots) .$$

Для оценки сходимости используем стандартный метод /8/. Вклад дифференциалов равен:

$$\prod_{1 \le e \le L} \int d^\nu p_e \sim \int \frac{dp}{p} p^{L \cdot \nu}$$

Вклад пропагаторов и вершин с учетом дельта-функции от суммы внешних импульсов:

$$p^{\left\{\sum_e (2d_e - \nu) - n \cdot \mathcal{D} + \nu\right\}}$$

где суммирование идет по всем внутренним линиям диаграммы.

Интеграл по P окажется, таким образом, сходящимся, если

$$\omega(G) = L \cdot \nu + \nu + \sum_e (2d_e - \nu) - n \cdot \mathcal{D} < 0 .$$

Поскольку

$$n \cdot \mathcal{D} = 2 \sum_{1 \le e \le L} d_e + \sum_{e_{ext}} d_e$$

где в последнем члене суммирование ведется по внешним линиям диаграммы, то

$$\omega(G) = \nu - \sum_{e_{ext}} d_e$$

Следовательно, условие сходимости произвольной диаграммы имеет вид:

$$\sum_{e_{ext}} d_e > \nu .$$

Отметим, что сходимость не зависит от вида вершины Г.

В силу инвариантности разложения относительно замены $d \to \nu - d$ имеем также

$$\sum_{e_{ext}} \tilde{d}_e = \sum_{e_{ext}} (\nu - d_e) > \nu$$

Таким образом, произвольная диаграмма с N внешними линиями является сходящейся, если

$$\nu < \sum_{e_{ext}} d_e < \nu(N-1)$$

Ультрафиолетовые расходимости в разложении по скелетным диаграммам, следовательно, отсутствуют при

$$\nu < \sum_{1 \le e \le \min(4,k)} d_e < \nu(\min(4,k) - 1) .$$

В частности, для четырехлинейного взаимодействия (типа φ^4 или $\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$) имеем:

$\underline{\nu=4}$: $1 < d < 3$

$\underline{\nu=2}$: $\frac{1}{2} < d < \frac{3}{2}$ – модель Тирринга

В случае трилинейного взаимодействия $(\nu=4)$:

$\bar{\psi}\psi\varphi$: [1,2] $\quad \frac{3}{2} < d_\psi < \frac{5}{2}$, $1 < d_\varphi < 3$,

φ^3 : $\quad \frac{4}{3} < d < \frac{8}{3}$

Нетрудно убедиться, что условие сходимости не меняется, если имеется несколько различных вершин (например, $\bar{\psi}\psi\varphi$ и φ^4).

Автор благодарен Ю.Б.Румеру за полезные обсуждения.

Литература

1. A.A. Migdal, Phys. Lett., B37, 386 (1971).
2. G. Mack, I.T. Todorov, preprint IC/71/139, Trieste (1971).
3. G. Mack, Lecture Notes in Physics, v.17, p. 300. Springer-Verlag, Berlin (1972).
4. I.T. Todorov, preprints, JINR, E2-6642 (1972), CERN, TH-1697 (1973).
5. S. Ferrara, R. Gatto, A. Grillo, G. Parisi, Lett. Nuovo Cim., 4, 115 (1972).
6. Б.Г.Конопельченко, М.Я.Пальчик. Препринты ИЯФ СО АН СССР, 90-72, 94-72 (1972), 19-73 (1973).
7. G. Mack, K. Symanzik, Comm. Math. Phys., 27, 247 (1972).
8. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, М., 1957.

Ответственный за выпуск С.Н.РОДИОНОВ
Подписано к печати 1.11.1973г. МН 17001.
Усл. 0,5 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ №92 . ПРЕПРИНТ.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вг.