З-48

14

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ ИЯФ 88 - 73

В.Г.Зелевинский, М.И.Штокман

МИКРОСКОПИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ СВЯЗАННЫХ РОТАЦИОННЫХ ПОЛОС

Новосибирск

1973

В.Г.Зелевинский, М.И.Штокман

МИКРОСКОПИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ СВЯЗАННЫХ РОТАЦИОННЫХ ПОЛОС

А Н Н О Т А Ц И Я

Предложенный ранее метод обобщенной матрицы плотности распространяется на описание совокупности связанных ротационных полос, построенных на коллективных возбуждениях деформированного ядра. Как частный случай метода получено приближение хаотических фаз. На основе строгого сохранения момента (с учетом момента коллективных возбуждений) построено преобразование перехода в собственную систему ядра и найдена операторная форма решений для матрицы плотности и самосогласованного поля. Подробно рассмотрены способы вычисления неадиабатических эффектов (искажение и смешивание полос). Показана недостаточность обычного феноменологического описания.

1. Введение

Задача об описании вращательных полос в деформированных ядрах представляет большой интерес как в связи с общей проблемой взаимосвязи различных ветвей спектра коллективных возбуждений, так и вследствие интенсивного накопления эксперименталыюй информации (см., напр., /1/). Систематизация данных показывает, что уже в нижней части ротационных полос имеются отклонения от правил, установленных в модели жесткого ротатора для энергетических интервалов и вероятностей переходов. Все эти эффекты можно объединить под общим названием неадиабатических.

Обычно эксперимент обрабатывают с помощью введения феноменологической связи между полосами, отвечающими различным внутренним возбуждениям ротатора /2/. При этом в первую очередь следует учитывать взаимодействие основной полосы с низколежащими колебательными полосами. Предполагая аксиальную симметрию ядра, можно построить /3/ общую операторную форму членов в разложении гамильтониана, дающих смешивание полос. Коэффициенты в этом ряду являются эмпирическими параметрами. Известно, однако, что прямое смешивание полос может объяснить лишь 10-20% величины коэффициента в спектре уровней основной полосы.

Построенная в работах /4,5/ микроскопическая теория вращения позволяет корректно подойти к количественному описанию неадиабатичности. Было показано, что основные эффекты существуют уже для изолированной вращательной полосы и обусловлены плавным подстраиванием матрицы плотности (м.п.) частиц и создаваемого ими самосогласованного поля к требованиям,накладываемым необходимостью создать определенный вращательный момент. Стандартная модель принудительного вращения, где нет точного сохранения момента, воспроизводит /6/ лишь часть неадиабатических вкладов. Полное микроскопическое вычисление /7/ коэффициентов формулы (1) приводит к хорошему согласию с экспериментом для всей редкоземельной области без введения свободных параметров.

Рассмотрение /7/ в приближении изолированной вращательной полосы означает, на языке адиабатической теории возмущений, учет эффектов "искажения" внутреннего состояния вращением. Неучтенные здесь эффекты "смешивания" различных внутренних состояний, как уже говорилось, малы (из-за малости вероятностей переходов между полосами по сравнению с переходами внутри полосы и большого отношения колебательной энергии к вращаиельной) и должны учитываться как дополнительные поправки. Однако при рассмотрении отклонений от правил Алаги для интенсивностей переходов между полосами смешивание необходимо учитывать.

В настоящей работе теория /5/ обобщается для описания связанных ротационных полос[1]. Раздел 2 содержит краткую формулировку исходных уравнений метода. В разделе 3 строго рассмотрены следствия закона сохранения полного момента, что позволяет в общем виде сделать преобразование, имеющее наглядный смысл перехода в систему собственных осей ядра. Общая операторная форма решений получена в разделе 4. Приближение хаотических фаз (ПХФ) для колебаний является, как показано в разделе 5, частным случаем метода, допускающего, следовательно, единое рассмотрение системы ротационно-вибрационных возбуждений. Основные формулы для описания такой системы получены в разделе 6 (учтены одновременно эффекты искажения и смешивания). Раздел 7 посвящен применению к случаю аксиальной симметрии; сопоставление с феноменологией содержится в разделе 8.

2. Основные уравнения

Мы будем исходить из метода обобщенной матрицы плотности (м.п.), развитого в работах /9,5/ для решения задач о сильно связанных низколежащих коллективных возбуждениях. Не повторяя обоснования метода, выпишем основные уравнения. М.п. R и обобщенное самосогласованное поле S являются операторами в комбинированном пространстве внутренних (одночастичных) и внешних (коллективных) переменных, удовлетворяющими уравнению

$$[R, W] = 0, \quad W = S + H \tag{2}$$

---

1) Некоторые результаты работы изложены в лекциях /8/.

где H - коллективный гамильтониан, т.е. оператор, действующий только на внешние переменные и имеющий в выделенной полосе те же матричные элементы, что исходный многочастичный гамильтониан $\mathcal{H}$.

Уравнение (2) нелинейно, так как операторы S и H согласованные определяются через м.п.

$$S_{(a)} = \varepsilon_a + \tilde{S}_{(a)}, \quad \tilde{S}_{(a)} \equiv S_a\{R\} = Tr_{(b)}\{V_{ab} R_{(b)}\} \tag{3}$$

$$H = Tr(\varepsilon R) + \frac{1}{2} Tr_{(ab)}\{R_{(a)} V_{ab} R_{(b)}\} = Tr(\varepsilon R) + \frac{1}{2} Tr(\tilde{S} R), \tag{4}$$

где ε - часть гамильтониана, описывающая независимые частицы, V_{ab} - взаимодействие частиц a и b, а след Tr затрагивает только внутренние переменные (включая и добавочные спинорные, удваивающие одночастичное пространство при наличии куперовского спаривания /10/).

Физический отбор решений осуществляется с помощью условия нормировки, накладываемого на м.п. В задаче о коллективных возбуждениях четно-четных ядер нормируем м.п. условием

$$R^2 = R, \tag{5}$$

означающим /9/ ограничение "чистыми конфигурациями" в суммарном пространстве.

3. Вращательная инвариантность и переход в собственную систему

В работах /5,9/ было показано, что метод обобщенной м.п. позволяет строго учесть законы сохранения. В частности, сохранение полного момента даёт возможность выделить зависимость от ориентации системы как целого и придать точный смысл процедуре перехода к собственным осям ядра. Ниже мы несколько модифицируем результаты /5/, обобщая их на случай наличия других коллективных степеней свободы, взаимодействующих с вращением.

Пусть J - оператор в рассматриваемом пространстве состояний, соответствующий полному моменту. Как показано в /5/, сохранение истинного микроскопического момента $\left[\sum_\alpha l_\alpha, \mathcal{H}\right]=0$ влечёт за собой следующие законы сохранения в комбинированном пространстве:

$$[S, J+j]=0, \quad [H, J]=0 \tag{6}$$

Поскольку рассматриваемая "полоса" объединяет ядерные уровни, принадлежащие нескольким вращательным полосам в узком смысле этого термина, то базисные векторы нашего внешнего пространства можно пометить квантовыми числами группы вращений и номером ρ исходной полосы. Различные ρ отвечают различным выборам м.п. в отсутствие вращения, т.е. разным внутренним возбуждениям (фононы, квазичастицы и т.д.). Если вращение перепутывает их, то решение задачи должно завершаться диагонализацией Н во внешнем пространстве.

Можно ввести координатную реализацию внешнего пространства, рассматривая волновые функции, зависящие от углов Эйлера $\mathcal{V}=(\varphi, \theta, \chi)$, которые описывают ориентацию произвольно выбранных подвижных осей относительно фиксированных, а также от дополнительных внешних переменных (отвечающих квантовым числам ρ). Тогда коллективные операторы могут содержать две коммутирующие между собой части – "ориентационную" и "собственную", действующие на разные переменные волновой функции. В частности, полный момент J складывается из вращательного M и собственного момента L (момент возбуждений):

$$J = M + L \tag{7}$$

Все три вектора в (7) заданы своими компонентами в неподвижных осях, удовлетворяющими соотношениям вида $[J_i, J_k]=i\varepsilon_{ikl}J_l$

Возьмем теперь произвольный оператор $\mathfrak{M}$ такого же типа, не действующий на углы $\mathcal{V}$, и определим с его помощью класс унитарных преобразований, зависящих от $\mathcal{V}$ как от параметров,

$$D_{\mathfrak{M}}(\mathcal{V}) = e^{i\varphi \mathfrak{M}_z} e^{i\theta \mathfrak{M}_y} e^{i\chi \mathfrak{M}_z} \tag{8}$$

Очевидно, что преобразование $D_{\mathfrak{M}}$ означает определенный поворот системы, в которой вектор $\mathfrak{M}$ является моментом. Этот поворот совмещает оси, связанные с системой, с подвижными осями

внешнего пространства. При этом сам оператор $\mathfrak{M}$ может быть как коллективным (например, L), так и одночастичным (j). Величины $T_{\ell\mu}$, образующие по отношению к $\mathfrak{M}$ неприводимый тензорный оператор ранга ℓ, при повороте (8) преобразуются согласно

$$D_{\mathfrak{M}}(\mathcal{V})\, T_{\ell\mu}\, D_{\mathfrak{M}}^{-1}(\mathcal{V}) = \sum_\lambda D^{\ell *}_{\mu\lambda}(\mathcal{V})\, T_{\ell\lambda}\,, \tag{9}$$

где $D^{\ell}_{\mu\lambda}$ – матричные элементы конечных вращений. Коммутирующий с $\mathfrak{M}$ вращательный момент M действует на углы Эйлера и поэтому тоже преобразуется:

$$D_{\mathfrak{M}}(\mathcal{V})\, M_\mu\, D_{\mathfrak{M}}^{-1}(\mathcal{V}) = M_\mu - \sum_\lambda D^{1 *}_{\mu\lambda}\, \mathfrak{M}_\lambda\,. \tag{10}$$

Для того, чтобы совместить с подвижными осями внешнего пространства оси, в которых квантуются одночастичное и коллективное движения, положим

$$\mathfrak{M} \equiv L + j \tag{11}$$

и обозначим

$$D \equiv D_{L+j}(\mathcal{V}) = D_L(\mathcal{V})\, D_j(\mathcal{V}) = D_j(\mathcal{V})\, D_L(\mathcal{V}). \tag{12}$$

Комбинируя равенства (7,9,10), легко получим

$$D(J+j)D^{-1} = M. \tag{13}$$

D – преобразование уравнений (2,5) даёт

$$[r, w]=0, \quad r^2 = r, \quad w = s + h, \tag{14}$$

где

$$r = DRD^{-1}, \quad w = DWD^{-1}, \tag{15}$$
$$s = DSD^{-1}, \quad h = DHD^{-1}$$

Поэтому законы сохранения (6) примут после D -преобразования (13) вид

$$[\varsigma, M] = 0, \quad [h, M] = 0 \tag{16}$$

Это означает, что преобразованное поле ς и гамильтониан h, как и м.п. Γ, уже не зависят от ориентации ядра – совершен переход в собственную систему. Однако величины (15) могут содержать компоненты $\mathcal{R}$ вращательного момента в подвижных осях[2]

$$\mathcal{R}_\lambda = \sum_\mu D^1_{\mu\lambda} M_\mu, \tag{17}$$

для которых справедливы соотношения коммутации

$$[\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_k] = -i\varepsilon_{ikl}\mathcal{R}_l, \quad [M_i, \mathcal{R}_k] = 0. \tag{18}$$

Закон преобразования $\mathcal{R}$ вытекает из (10):

$$D_m \mathcal{R} D_m^{-1} = \mathcal{R} - m, \tag{19}$$

откуда для любой функции $\Phi(\mathcal{R})$ следует

$$D\,\Phi(\mathcal{R})\,D^{-1} = \Phi(\mathcal{R} - L - j). \tag{20}$$

Полный момент (7) тоже удобно выразить в проекциях на подвижные оси $I_\lambda = \Sigma_\mu D^1_{\mu\lambda}(v) J_\mu$. Из (9) и (17) получим

$$I = \mathcal{R} + D_L^{-1} L D_L \tag{21}$$

или, вспоминая (19),

$$D_L I D_L^{-1} = \mathcal{R} \tag{22}$$

Равенство (22) имеет простой смысл: если волновая функция возбуждений выражена через переменные, относящиеся к подвижным осям, то оператор полного момента, поворачивающий как возбуждения, так и сами оси, на нее не действует и полный момент сводится к вращательному[3]. Однако, как следует из (20), функции ориентационного момента $\mathcal{R}$ после D -преобразования усложняются, приобретая зависимость от внутренних моментов L, j (аналог сил Кориолиса при переходе в неинерциальную систему).

2) Латинские индексы i, k .... отвечают декартовым компонентам векторов, греческие λ, μ .... – сферическим.

4. Структура решений

Величины Γ и ς, являющиеся решениями уравнений (14), будем записывать /5/ как функции $\Gamma(\mathcal{R}-m; A|x)$ операторов $\mathcal{R}-m$, где m определено в (11), коммутирующих с $\mathcal{R}$ внешних операторов A и внутренних переменных x. Эту запись следует понимать в смысле ряда по антикоммутаторам

$$\Gamma(\mathcal{R}-m; A|x) =$$
$$\bar{\varrho}(A|x) + \tfrac{1}{2}\left[\varrho_i(A|x), \mathcal{R}_i - m_i\right]_+ +$$
$$\tfrac{1}{4}\left[\varrho_{ik}(A|x), (\mathcal{R}_i - m_i)(\mathcal{R}_k - m_k)\right]_+ \cdots, \tag{23}$$

где скаляр $\bar{\varrho}$, вектор ϱ_i , симметричный тензор $\varrho_{ik\ldots}$ и величины $\bar{\sigma}, \sigma_i, \sigma_{ik\ldots}$ для аналогичного разложения ς уже не содержат вращательного момента .

Условие согласования произвольного аддитивного оператора $Q = \sum_a q_a$ примет вид (ср./5/)

$$Q = Tr(qR) = Tr\left(q D^{-1} \Gamma(\mathcal{R}-m; A|x) D\right), \tag{24}$$

или, учитывая (12) и (19)

$$Q = Tr\left\{q\Gamma(\mathcal{R}; D_L^{-1} A D_L | D_j^{-1} x D_j)\right\} \tag{25}$$

3) В обобщенной модели этому отвечает представление волновой функции в виде $\Psi_{IM}(x) = \sum_M D^I_{MM'}(v)\,\Phi_{IM'}(x')$, где x -координаты в лабораторной системе, а x' -в системе подвижных осей; тогда $I\,\Phi_{IM'}(x') = 0$. Легко показать, что в силу (22) I коммутирует с $D_L^{-1} L D_L$.

Выразим Q в виде ряда, аналогичного (23),

$$Q = \bar{Q} + \frac{1}{2}[Q^{i}, R_i] + \frac{1}{4}[Q^{ik}, R_i R_k]_+ + \dots \qquad (26)$$

Тогда соотношение (25) определяет коэффициенты $Q^{i\dots}$

$$Q^{i\dots} = Tr\{D_j\, q\, D_j^{-1}\, \rho_{i\dots}(D_L^{-1} A D_L | x)\}. \qquad (27)$$

Для тензорных операторов $q_{\lambda\mu} = \Sigma q_{\lambda\mu}$ получим, согласно (9),

$$Q^{i\dots}_{\ell\mu} = \sum_{\lambda} D^{\ell *}_{\mu\lambda}(v)\, Tr\{q_{\ell\lambda}\, \rho_{i\dots}(D_L^{-1} A D_L | x)\} \qquad (28)$$

В частности, для оператора момента находим

$$J^{i\dots}_{\mu} = \sum_{\lambda} D^{1*}_{\mu\lambda}(v)\, Tr\{j_\lambda\, \rho_{i\dots}(D_L^{-1} A D_L | x)\}, \qquad (29)$$

или, переходя к проекциям на подвижные оси,

$$I^{i\dots}_{k} = Tr\{j_k\, \rho_{i\dots}(D_L^{-1} A D_L | x)\}. \qquad (30)$$

С другой стороны, согласно (21), ряд (26) для момента I_k должен содержать лишь два первых члена, а именно

$$\bar{I}_k = D_L^{-1} L_k D_L, \quad I^{i}_{k} = \delta_{ik}, \quad I^{ii'\dots}_{k} = 0. \qquad (31)$$

Сравнивая (31) с (30), получим окончательные условия согласования момента

$$Tr\{j\, \bar{\rho}(A|x)\} = L, \quad Tr(j_k\, \rho_i(A|x)) = \delta_{ik} \qquad (32)$$

а для всех высших членов ряда (23) следы с j равны нулю.

Поскольку операторные структуры (23) Γ и ρ подобны, условие (3) согласования поля связывает как раз однотипные слагаемые этих структур. Действительно, учитывая, что двухчастичное взаимодействие V_{ab} сохраняет момент $j_a + j_b$, т.е.

$$D_{j_a} D_{j_b} V_{ab} D_{j_b}^{-1} D_{j_a}^{-1} = V_{ab} \qquad (33)$$

легко показать, что

$$\Gamma_{i\dots(a)} = Tr_b\{V_{ab}\, \rho_{i\dots(b)}\} \qquad (34)$$

Для явного решения уравнений (14) часто удобно перегруппировать ряд (2.), выделив члены с одинаковой зависимостью от R:

$$\Gamma = \bar{\Gamma} + \Gamma_i R_i + \frac{1}{2}\Gamma_{ik} R_i R_k + \dots \qquad (35)$$

(поскольку D - преобразование (15) убрало зависимость от углов, порядок сомножителей здесь безразличен). Коэффициенты рядов (35) и (23), как и соответствующих рядов для ρ, очевидным образом связаны:

$$\bar{\Gamma} = \bar{\rho} - \frac{1}{2}[\rho_i, m_i]_+ + \frac{1}{4}[\rho_{ik}, m_i m_k]_+ + \dots,$$

$$\Gamma_i = \rho_i - \frac{1}{2}[\rho_{ik}, m_k]_+ + \dots, \quad \Gamma_{ik} = \rho_{ik} + \dots \qquad (36)$$

Коллективный гамильтониан (15) также можно искать в виде ряда

$$h = \bar{h}(A) + \frac{1}{2}[h_i(A), R_i - m_i]_+ + \frac{1}{4}[h_{ik}(A), (R_i - m_i)(R_k - m_k)]_+ + \dots \qquad (37)$$

Заметим, что векторный член h_i, как и другие члены в (37), содержащие тензоры нечетных рангов, выпадают, если из внешних операторов A нельзя построить величины, меняющие знак при отражении времени. В частности, эти члены равны нулю в случае /5/ изолированной вращательной полосы, когда коэффициенты $h_{i\dots}$ -константы.

Подставим теперь ряды для Γ, ρ, h в уравнения (14), выполним явные коммутации операторов R согласно (18) и приравняем члены с одинаковой операторной структурой. Тогда мы придем к системе уравнений

$$[\bar{W}, \bar{r}] = 0, \tag{38}$$

$$[\bar{W}, r_i] + [W_i, \bar{r}] - \frac{i}{2}\varepsilon_{ikl}[W_k, r_l]_+ + \ldots = 0, \tag{39}$$

$$[\bar{W}, r_{ik}] + [W_{ik}, \bar{r}] + [W_i, r_k] + [W_k, r_i]_+ \ldots = 0, \tag{40}$$

где аналогично (14) и (36) и (36) введены обозначения

$$\bar{W} = \varrho + \frac{1}{2} j_i j_k h_{ik} - j_i \left(h_i - \frac{1}{2}[h_{ik} L_k]_+\right) + \tag{41}$$

$$\bar{h} - \frac{1}{2}[h_i, L_i]_+ + \frac{1}{4}[h_{ik}, L_i L_k]_+ + \ldots,$$

$$W_i = \varrho_i - j_k h_{ik} + h_i - \frac{1}{2}[h_{ik}, L_k]_+ + \ldots, \quad W_{ik} = \varrho_{ik} + h_{ik} + \ldots \tag{42}$$

и явно выписаны лишь вклады не выше тензорных. Подобным образом из нормировки $r^2 = r$ получим

$$\bar{r}^2 = \bar{r} \tag{43}$$

$$[r_i \bar{r}]_+ - \frac{i}{4}\varepsilon_{ikl}[r_k, r_l] + \cdots = r_i, \tag{44}$$

$$[r_{ik}, \bar{r}]_+ + [r_i, r_k] + \cdots = r_{ik}, \ \ldots \tag{45}$$

Ниже мы рассмотрим простейшие возможности приближенного решения этих уравнений.

5. Приближение хаотических фаз (ПХФ)

Покажем, что обычное рассмотрение коллективных колебаний четно-четного ядра с помощью ПХФ может быть получено /8/ как первое приближение в скалярных уравнениях общей системы, полученной в разделе 4. Пренебрегая зависимостью всех величин от вращательного момента $\mathcal{R}$, имеем

$$[\bar{\varrho} + \bar{h}, r] = 0; \quad \bar{r}^2 = r. \tag{46}$$

В качестве базиса $|p\rangle$ внешнего пространства возьмем состояния $|\{N_\alpha\}\rangle$ в определенными числами фононов сортов $\alpha, \beta, \ldots$. Соответствующий коллективный гамильтониан будет иметь вид

$$\bar{h} = \sum_\alpha \omega_\alpha A^+_\alpha A_\alpha + h', \tag{47}$$

где A_α, A^+_α – бозе-операторы фононов, ω_α – их частоты, h' – ангармонические члены, содержащие не менее трех операторов A.

Как обсуждалось в /11/, ПХФ связано с предположением о малости колебательных частей м.п. по сравнению со статической частью. На нашем языке это означает разложение

$$\bar{r} = r^{(0)} + r^{(1)} + r^{(2)} \tag{48}$$

где $r^{(0)}$ – вообще не содержит фононовых операторов, $r^{(1)}$ – линейная по ним часть

$$r^{(1)} = \sum_\alpha \{ r^+(\alpha) A_\alpha + r(\alpha) A^+_\alpha \}, \tag{49}$$

$r^{(2)}$ – квадратичная и т.д.; Коэффициенты $r(\alpha)$ действуют только на внутренние переменные. Аналогичное разложеие предполагается и для ϱ.

Уравнения нулевого порядка

$$[\varrho^{(0)}, r^{(0)}] = 0; \quad r^{(0)2} = r^{(0)} \tag{50}$$

дают обычное приближение Хартри-Фока-Боголюбова. Если $|1)$ – полная система одночастичных функций

$$\varrho^{(0)}|1) = E_1 |1), \tag{51}$$

то $r^{(0)}$ следует выбрать в виде

$$r^{(0)} = \sum_1 |1) n_1 (1|, \quad n_1 = 0, 1. \tag{52}$$

В модели со спаривательным взаимодействием в канале частица-частица и произвольным T-четным взаимодействием в канале частица-дырка явный вид спиноров $|i)$ и спинорных матричных элементов одночастичных операторов приведен в /5/; в четно-четном ядре числа заполнения T - сопряженных состояний равны, $n_{\bar{I}} = n_I$.

Для величин первого порядка имеем , предполагая, что ангармонические члены h' имеют более высокий порядок малости,

$$\Big[g^{(0)} + \sum_\alpha \omega_\alpha A_\alpha^+ A_\alpha,\, \rho^{(1)}\Big] + \big[g^{(1)},\, \rho^{(0)}\big] = 0, \qquad (53)$$

$$\big[\rho^{(0)}\rho^{(1)}\big]_+ = \rho^{(1)} \qquad (54)$$

Как видно из структуры уравнений, ангармонические члены (47), действительно, дадут вклад лишь в поправки 3 порядка. Уравнение движения (53) не определяет матричных элементов $\rho^{(1)}$, диагональных в базисе (51) нулевого порядка, но из нормировки (54) следует, что они равны нулю. Формальное решение (54) дается выражением

$$\rho^{(1)} = \big[\Lambda^{(1)},\, \rho^{(0)}\big], \qquad (55)$$

где $\Lambda^{(1)}$ имеет лишь недиагональные матричные элементы и удовлетворяет, согласно (53), уравнению

$$\Big[\Lambda^{(1)},\, g^{(0)} + \sum_\alpha \omega_\alpha A_\alpha^+ A_\alpha\Big] = g^{(1)}. \qquad (56)$$

Антиэрмитов оператор $\Lambda^{(1)}$ следует искать в виде

$$\Lambda^{(1)} = \sum_\alpha \big\{\Lambda^+(\alpha) A_\alpha - \Lambda(\alpha) A_\alpha^+\big\}, \qquad (57)$$

тогда для коэффициентов $\Lambda(\alpha)$ находим

$$-\big[\Lambda(\alpha),\, g^{(0)}\big] + \omega_\alpha \Lambda(\alpha) = g(\alpha) \qquad (58)$$

Переходя к матричным элементам в базисе (51), легко получим

$$(1|\rho(\alpha)|2) = (n_2 - n_1)(1|\Lambda(\alpha)|2) = \frac{n_1 - n_2}{E_1 - E_2 + \omega_\alpha}(1|g(\alpha)|2). \qquad (59)$$

Величины $(1|\rho(\alpha)|2)$ характеризуют вклады различных парных возбуждений в фонон типа α. Уравнение согласования (34)

$$g_a(\alpha) = Tr_b\big\{V_{ab}\,\rho_b(\alpha)\big\} \qquad (60)$$

определяет (кроме нормировки) колеблющуюся с той же частотой гармонику самосогласованного поля. Условие разрешимости однородного уравнения (60) дает секулярное уравнене для самых частот ω_α. Нормировка $g(\alpha)$ находится из согласования гамильтониана $\sum_\alpha \omega_\alpha A_\alpha^+ A_\alpha$: как его операторная форма, так и величины должны воспроизводиться после вычисления с найденными ρ и g следов (4).

Обозначая через h_1 и h_2 соответственно линейную и квадратичную по фононным операторам части гамильтониана, имеем[5] из (4)

$$h_1 = Tr\big\{g^{(0)}\rho^{(1)}\big\}, \qquad (61)$$

$$h_2 = Tr\big\{g^{(0)}\rho^{(2)} + \tfrac{1}{2} g^{(1)}\rho^{(1)}\big\}. \qquad (62)$$

Поскольку $\rho^{(1)}$ не имеет диагональных матричных элементов, $h_1 = 0$ в согласии с (47). Для вычисления h_2 следует продвинуться до величин второго порядка (фактически малость фононных вкладов связана с выделением одной степени свободы из континуума парных возбуждений; когерентное суммирование в (62) компенсирует эту малость). На самом деле для нахождения h_2 не требуется полного решения уравнений второго порядка

$$\Big[\rho^{(2)},\, g^{(0)} + \sum_\alpha \omega_\alpha A_\alpha^+ A_\alpha\Big] + \big[\rho^{(1)},\, g^{(1)}\big] + \big[\rho^{(0)},\, g^{(2)}\big] = 0 \qquad (63)$$

Из условия нормировки м.п.

$$\big[\rho^{(2)},\, \rho^{(0)}\big]_+ + \rho^{(1)2} = \rho^{(2)} \qquad (64)$$

---

5) Из симметрии $V_{ab} = V_{ba}$ и определения $\tilde{g}\{\rho\}$ (3) вытекает тождество, справедливое для любых частей ρ_I, ρ_{II} м.п.,
$Tr\big[\tilde{g}\{\rho_I\}\cdot\rho_{II}\big] = Tr\big\{\rho_I\,\tilde{g}\{\rho_{II}\}\big\}$, которое полезно в подобных вычислениях; в то же время циклически переставлять под знаком Tr можно лишь операторы, коммутирующие по внешним переменным.

аналогично (55), следует общий вид $r^{(2)}$

$$r^{(2)} = [\Lambda^{(2)}, r^{(0)}] + \frac{1}{2}[\Lambda^{(1)}, r^{(1)}], \tag{65}$$

где $\Lambda^{(2)}$ – новый антиэрмитов оператор, не имеющий диагональной части. Член $[\Lambda^{(2)}, r^{(0)}]$, очевидно, не дает в силу (50) вкладов в (62), так что согласование гамильтониана принимает вид

$$\sum_\alpha \omega_\alpha A_\alpha^+ A_\alpha = \frac{1}{2} Tr\{ \mathcal{S}^{(0)} [\Lambda^{(1)}, r^{(1)}] + \mathcal{S}^{(1)} r^{(1)} \} \tag{66}$$

т.е. необходимо знать лишь решение (59) первого порядка.

Приравнивая в (66) коэффициенты билинейной по операторам A, A^+ формы, циклически переставляя оставшиеся внутренние операторы под знаком Tr и пользуясь уравнением (58) получим

$$Tr\{ r^{(0)} [\Lambda(\alpha), \Lambda(\alpha')] \} = 0, \tag{67}$$

$$Tr\{ r^{(0)} [\Lambda(\alpha), \Lambda^+(\alpha')] \} = \delta_{\alpha\alpha'}, \ \omega_\alpha \neq 0. \tag{68}$$

При $\alpha = \alpha'$ эти условия выражают ортогональность различных мод; условие (68) при $\alpha = \alpha'$ определяет нормировку $\mathcal{S}(\alpha)$:

$$1 = \sum_{12} \frac{n_1 - n_2}{(E_1 - E_2 + \omega_\alpha)^2} |\langle 1 | \mathcal{S}(\alpha) | 2 \rangle|^2 \tag{69}$$

Нетрудно показать /8/, что полученные результаты точно совпадают с найденными в ПХФ обычными методами. Однако здесь регулярным образом строятся высшие поправки: подстановка (65) в (63) дает уравнение для $\Lambda^{(2)}$

$$[\Lambda^{(2)}, \mathcal{S}^{(0)} + \sum_\alpha \omega_\alpha A_\alpha^+ A_\alpha] = \mathcal{S}^{(2)} - \frac{1}{2}[\Lambda^{(1)}, \mathcal{S}^{(1)}], \tag{70}$$

которое легко решается в матричных элементах. Отсюда находятся $r^{(2)}$, $\mathcal{S}^{(2)}$ и, с помощью согласования, ангармонические слагаемые h' в (47). В этом же порядке первое из условий (32) определяет суммарный угловой момент L фононов. Вид слагаемых второго порядка будет приведен ниже (раздел 6). Подробного вычисления ангармонических эффектов и сравнения с ранее развитыми методами /12/ их получения мы здесь проводить не будем.

6. Взаимодействие вращения с другими коллективными степенями свободы

В этом разделе мы рассмотрим схему расчета взаимного влияния вращательных и других коллективных возбуждений. При этом будет считаться, что все коллективные степени свободы слабо искажают структуру м.п. и самосогласованного поля. Применимость такого подхода ограничена низколежащей частью вращательных полос хорошо деформированных четно-четных ядер.

Нулевой порядок решения дает статическую м.п. т.е. затравочные числа заполнения (52) и энергетический спектр (51) квазичастиц. В первом порядке возникают динамические поправки к r и $\mathcal{S}$ от всех коллективных возбуждений, включая вращение. Второй порядок приводит к эффектам связи возбуждений. Прироиду неротационных степеней свободы можно сначала не конкретизировать.

Исходя из системы уравнений (38 – 40) с дополнительными условиями (43–45), будем искать величины r и $\mathcal{S}$ в виде разложений в двойные ряды

$$r_{\dots} = \sum_{m,n=0} r^{(m,n)}_{\dots} \tag{71}$$

где первый из верхних индексов нумерует порядок по вращению, а второй – по неротационным возбуждениям. В изолированной вращательной полосе /5/ в первом порядке по вращению возникают лишь векторные поправки, т.е. ряды для $r_i, \mathcal{S}_i$ начинаются с $r^{(10)}$, $\mathcal{S}^{(10)}$, а тензорные члены r_{ik} , $\mathcal{S}_{ik}$ являются величинами второго порядка ($r_{ik}^{(20)}$, $\mathcal{S}_{ik}^{(20)}$ в обозначениях (71). При наличии связи с другими возбуждениями тензорные вклады могут возникнуть и в первом порядке по вращению, а именно $r_{ik}^{(11)}$, $\mathcal{S}_{ik}^{(11)}$ (по-прежнему, суммарный порядок $m+n$ =2).

Что касается разложения (37) гамильтониана h, то его скалярная часть $\bar{h}$ начинается с h_0 (нулевого порядка). Собственные значения h_0 дают затравочные энергии полос

$$h_0 |p\rangle = \mathcal{E}_p |p\rangle \tag{72}$$

Как следует из ПХФ (раздел 5), величина h_i не содержит малости, хотя и определяется следами (62) от величин $\Gamma^{(01)}, \zeta^{(01)}$ и $\Gamma^{(02)}$, формально имеющих второй порядок. Тензор h_{ik} даёт момент инерции, т.е. содержит члены, начиная с $h_{ik}^{(1,0)}$. Вектор h_i исчезает для изолированной полосы и порождается моментом L возбуждений. Однако оператор L в силу (32) сам по себе не несет малости; поэтому ряд для h_i вообще говоря, должен начинаться с $h_i^{(10)}$.

Классифицировав величины по их порядку малости, перейдем к явному построению решения. При этом удобнее всего, аналогично разделу 5, сначала из условий нормировки отыскивать общий вид поправки к м.п. через вспомогательные операторы Λ, которые затем определяются уравнениями движения.

Решение скалярных уравнений (38), (43) в нулевом порядке по вращению близко к найденному в ПХФ за исключением замены бозонного гамильтониана $\sum_\lambda \omega_\lambda A_\lambda^+ A_\lambda$ на общий коллективный гамильтониан h_o (72). Таким образом, имеем статическую м.п. $\bar\Gamma^{(0,0)} \equiv \Gamma^{(0)}$ (ср.(52)), среднее поле $\bar\zeta^{(0,0)} \equiv \zeta^{(0)}$ (51)

$$(1p|\Gamma^{(0)}|2p') = n_1 \delta_{12} \delta_{pp'}; \quad (1p|\zeta^{(0)}|2p') = E_1 \delta_{12} \delta_{pp'} \tag{73}$$

и поправку первого порядка (ср.(59))

$$(1p|\bar\Gamma^{(0,1)}|2p') = \frac{n_1 - n_2}{E_1 - E_2 + \omega_{pp'}} (1p|\bar\zeta^{(0,1)}|2p') \equiv \Pi_{12}^{pp'} (1p|\bar\zeta^{(0,1)}|2p') \tag{74}$$

где $\omega_{pp'} = \varepsilon_p - \varepsilon_{p'}$ – частоты коллективных возбуждений, которые определяются из условия (60) согласования $\bar\zeta^{(0,1)}$ и, следовательно, совпадают с полученными в ПХФ. Второй скалярный порядок получается из уравнений (65,70), откуда

$$(1p|\bar\Gamma^{(0,2)}|2p') = \Pi_{12}^{pp'} (1p|\zeta^{(0,2)}|2p') + B(1p;2p'|\bar\zeta^{(0,1)}, \bar\zeta^{(0,1)}) \tag{75}$$

где введен функционал[6)]

$$B(1p,2p'|X,Y) = \sum_{3p''} B_{123}^{pp'p''} (1p|X|3p'')(3p''|Y|2p'), \tag{76}$$

6) Эти результаты легко получить и с помощью функций Грина: величина $\Pi_{12}^{pp'}$ соответствует нуклонной петле с двумя линиями (поляризационный оператор), а $B_{123}^{pp'p''}$ – с тремя.

$$B_{123}^{pp'p''} \equiv \frac{1}{2} \left\{ \frac{n_1 + n_2 - 2n_3}{(E_1 - E_3 + \omega_{pp''})(E_3 - E_2 + \omega_{p''p'})} + \frac{n_1 - n_2}{E_1 - E_2 + \omega_{pp'}} \left(\frac{1}{E_1 - E_3 + \omega_{pp''}} - \frac{1}{E_3 - E_2 + \omega_{p''p'}} \right) \right\} \tag{77}$$

Уравнение для первой вращательной поправки $\bar\Gamma^{(1,0)}$ к скалярной части $\bar\Gamma$ м.п., согласно (38), имеет вид

$$[\Gamma^{(1,0)}, \zeta^{(0)} + h_0] + [\Gamma^{(0)}, \bar w^{(1,0)}] = 0 \tag{78}$$

Решение (78) легко находится:

$$(1p|\bar\Gamma^{(1,0)}|2p') = \Pi_{12}^{pp'} (1p|\bar w^{(1,0)}|2p') \tag{79}$$

причем здесь в величину $\bar w^{(1,0)}$ не дадут вклада последние три слагаемых (41), которые не содержат внутренних операторов и поэтому диагональны в одночастичном пространстве. Совершенно аналогично (75) получим вторую вращательную поправку к скаляру

$$(1p|\bar\Gamma^{(2,0)}|2p') = \Pi_{12}^{pp'} (1p|\bar w^{(2,0)}|2p') + B(1p;2p'|\bar w^{(1,0)}, \bar w^{(1,0)}) \tag{80}$$

и смешанный член

$$(1p|\bar\Gamma^{(1,1)}|2p') = \Pi_{12}^{pp'} (1p|w^{(1,1)}|2p') + B(1p;2p'|\bar w^{(0,1)}, \bar w^{(1,0)}) + B(1p;2p'|\bar w^{(1,0)}, w^{(0,1)}). \tag{81}$$

Перейдем к вычислению векторных поправок к м.п. и самосогласованному полю, которые определяются уравнениями (39,44). Первая вращательная $\Gamma_i^{(10)}$ и смешанная $\Gamma_i^{(11)}$ поправки даются выражениями, подобными (80,81):

$$(1p|\Gamma_i^{(1,0)}|2p') = \Pi_{12}^{pp'} (1p|w_i^{(10)}|2p'), \tag{82}$$

$$(1p|\Gamma_i^{(1,1)}|2p') = \Pi_{12}^{pp'} (1p|w_i^{(1,1)}|2p') + B(1p;2p'|\bar w^{(0,1)}, w_i^{(1,0)}) + B(1p,2p'|w_i^{(1,0)}, \bar w^{(0,1)}). \tag{83}$$

Несколько сложнее нахождение второй вращательной поправки $\Gamma_i^{(2,0)}$, которая подчиняется уравнению

$$[\Gamma_i^{(2,0)}, \mathcal{S}^{(0)}+h_0] + [\Gamma^{(0)}, W_i^{(2,0)}] + [\bar\Gamma^{(1,0)}, W_i^{(1,0)}] + [\Gamma_i^{(1,0)}, \bar W^{(1,0)}]_+ + i\,\varepsilon_{ikl}\,[\Gamma_l^{(1,0)}, W_k^{(1,0)}]_+ = 0 \qquad (84)$$

и нормирована согласно

$$[\Gamma_i^{(2,0)}, \Gamma^{(0)}]_+ + [\bar\Gamma^{(1,0)}, \Gamma_i^{(1,0)}]_+ + \frac{i}{4}\,\varepsilon_{ikl}\,[\Gamma_l^{(1,0)}, \Gamma_k^{(1,0)}] = \Gamma_i^{(2,0)} \qquad (85)$$

Используя нормировку предыдущих порядков, можно показать, что общий вид $\Gamma^{(20)}$, удовлетворяющий условию (85), есть

$$\Gamma_i^{(20)} = [\Lambda_i^{(2,0)}, \Gamma^{(0)}] + \frac{1}{2}[\Lambda_i^{(1,0)}, \bar\Gamma^{(1,0)}] + \frac{1}{2}[\bar\Lambda^{(1,0)}, \Gamma_i^{(1,0)}]$$

$$+ \frac{i}{4}\,\varepsilon_{ikl}\left\{(1-2\Gamma^{(0)})[\Lambda_k^{(1,0)}, \Lambda_l^{(1,0)}](1-\Gamma^{(0)}) - \Gamma^{(0)}[\Lambda_k^{(1,0)}, \Lambda_l^{(1,0)}]\right\} \qquad (86)$$

где величины $\bar\Lambda^{(1,0)}$ и $\Lambda_i^{(1,0)}$ связаны соотношениями вида (55) соответственно с $\bar\Gamma^{(1,0)}$ и $\Gamma_i^{(1,0)}$, а $\Lambda_i^{(2,0)}$ подлежит определению из уравнения, вытекающего из (84) и (86),

$$[\Lambda_i^{(2,0)}, \mathcal{S}^{(0)}+h_0] = W_i^{(2,0)} - \frac{1}{2}[\bar\Lambda^{(1,0)}, W_i^{(1,0)}] - \frac{1}{2}[\Lambda_i^{(1,0)}, \bar W^{(1,0)}]. \qquad (87)$$

Переходя к матричным элементам, получим

$$(1p|\Gamma_i^{(2,0)}|2p') = \Pi_{12}^{pp'}(1p|W_i^{(2,0)}|2p') + B(1p;2p'|W_i^{(1,0)}, \bar W^{(1,0)}) +$$

$$B(1p;2p'|\bar W^{(1,0)}, W_i^{(1,0)}) +$$

$$\frac{i}{4}(n_1+n_2-1)\,\varepsilon_{ikl}\sum_{3p''}\frac{(1p|W_k^{(1,0)}|3p'')(3p''|W_l^{(1,0)}|2p') - (1p|W_l^{(1,0)}|3p'')(3p''|W_k^{(1,0)}|2p')}{(E_1-E_3+\omega_{pp''})(E_3-E_2+\omega_{p''p'})} \qquad (88)$$

Наконец, полностью аналогично предыдущему, найдем решение тензорных уравнений (40,45)

$$(1p|\Gamma_{ik}^{(1,1)}|2p') = \Pi_{12}^{pp'}(1p|W_{ik}^{(1,1)}|2p'), \qquad (89)$$

$$(1p|\Gamma_{ik}^{(2,0)}|2p') = \Pi_{12}^{pp'}(1p|W_{ik}^{(2,0)}|2p') +$$

$$B(1p;2p'|W_i^{(1,0)}, W_k^{(1,0)}) + B(1p;2p'|W_k^{(1,0)}, W_i^{(1,0)}) \qquad (90)$$

В уравнении (89) следует положить $W_{ik}^{(1,1)} = \mathcal{S}_{ik}^{(1,1)}$, так как $h_{ik}^{(1,1)}$ не дает сюда вклада из-за диагональности по одночастичным состояниям. Но тогда (89) совпадает с уравнением (59) для частот собственных колебаний. Поскольку фононы уже выделены, следует положить $\Gamma_{ik}^{(1,1)} = \mathcal{S}_{ik}^{(1,1)} = 0$.

Учитывая вклады не выше тензорных, с помощью (36) приведем точные условия согласования (32) к удобной форме

$$Tr\left\{j_n\bar\Gamma + \frac{1}{2}[j_n j_i]_+\Gamma_i + \frac{1}{2} j_k j_n j_i \Gamma_{ik}\right\} = 0, \qquad (91)$$

$$Tr\left\{j_n\Gamma_i + \frac{1}{2}[j_n j_k]_+\Gamma_{ik}\right\} = \delta_{in} \qquad (92)$$

где, воспользовавшись разложениями (71), можно приравнивать члены различных порядков.

Метод нахождения поправок вполне регулярен и может быть доведен в общей форме до любого порядка. Для получения физических результатов рассмотрим условия согласования, ограничиваясь практически наиболее важным случаем аксиальной симметрии.

7. Аксиально-симметричное ядро

Если статическое поле $\mathcal{S}^{(0)}$ обладает аксиальной симметрией, то состояния (51) характеризуются определенной проекцией j_z момента на ось симметрии. Учет правил отбора по j_z существенно упрощает результаты. Введем тензор

$$\mathcal{F}_0^{ik}(\omega) = -\sum_{12}\frac{n_1-n_2}{E_1-E_2+\omega}\, j_{21}^i\, j_{12}^k \qquad (93)$$

В силу аксиальной симметрии $\mathcal{J}_0^{ik}(\omega) \neq 0$ лишь для поперечных компонент $i, k = x, y$. Явно раскрывая спинорную структуру /5/ состояний $|1)$, получим

$$\mathcal{J}_0^{ik}(\omega) = \sum_{\nu_1, \nu_2} j^{i}_{\nu_2 \nu_1} j^{k}_{\nu_1 \nu_2} (u_{\nu_1} v_{\nu_2} - u_{\nu_2} v_{\nu_1})^2 \frac{E_{\nu_1} - E_{\nu_2}}{(E_{\nu_1} + E_{\nu_2})^2 - \omega^2} \tag{94}$$

откуда сразу следует диагональность этого тензора и равенство его главных значений $\mathcal{J}_0^{ik}(\omega) = \mathcal{J}_0(\omega)\delta_{ik}$; $i, k = x, y$.

Такими же свойствами обладает любой тензор вида (93) с произвольными "моментоподобными" операторами a^i, b^i.

Величина (93) при $\omega = 0$, как и в модели принудительного вращения (МПВ) /13/, определяет момент инерции ядра. Векторная часть $r_i^{(1,0)}$ м.п. (82) равна ($i = x, y$)

$$(1p| r_i^{(1,0)} |2p') = \Pi_{12}^{pp'} \left\{ (1p| s_i |2p') - j^{k}_{12} \langle p| h_{ik}^{(1,0)} |p'\rangle \right\}. \tag{95}$$

Поскольку тензорные члены начинаются лишь во втором порядке, $r_{ik}^{(1,0)} = 0$, из согласования момента (92) находим

$$\sum_{12} \Pi_{12}^{pp'} \left\{ j^{n}_{21} (1p| s_i^{(1,0)} |2p') - j^{n}_{21} j^{k}_{12} \langle p| h_{ik}^{(1,0)} |p'\rangle \right\} = \delta_{in} \delta_{pp'}, \tag{96}$$

или, с учетом найденной выше симметрии тензоров типа (93)

$$\delta_{in} \sum_{12} \Pi_{12}^{pp'} j^{i}_{21} (1p| s_i^{(1,0)} |2p') + \mathcal{J}_0(\omega_{pp'}) \langle p| h_{in}^{(1,0)} |p'\rangle = \delta_{in} \delta_{pp'}. \tag{97}$$

С другой стороны, условия согласования поля (34) в данном порядке приводят к пропорциональности поправок к s матричным элементам $\langle p| h_{in}^{(1,0)} |p'\rangle$. Тогда решение (97) имеет вид

$$\langle p| h_{in}^{(1,0)} |p'\rangle = \frac{1}{\mathcal{J}} \delta_{in} \delta_{pp'}, \quad (1p| s_i^{(1,0)} |2p') = \frac{1}{\mathcal{J}} t^{i}_{12} \delta_{pp'} \tag{98}$$

$$(1p| r_i^{(1,0)} |2p') = \frac{1}{\mathcal{J}} \Pi_{12} (t^{i}_{12} - j^{i}_{12}) \delta_{pp'} \tag{99}$$

где $\Pi_{12} \equiv \Pi_{12}^{pp}$, t^i определяется согласованием (34), а момент инерции

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + \mathcal{J}' = \sum_{12} \Pi_{12} j^{x}_{21} (t^x - j^x)_{21} \tag{100}$$

включает, кроме $\mathcal{J}_0 \equiv \mathcal{J}_0(\omega = 0)$, член $\mathcal{J}'$, описывающий искажение поля вращением /14/.

Величины (98,99) не зависят от коллективных индексов . Это справедливо и для низшей тензорной поправки, которая дается выражением (90) и с учетом (98,99) равна ($i, k = x, y$)

$$(1p| r_{ik}^{(2,0)} |2p') = \Pi_{12}^{pp'} (1p| s_{ik}^{(2,0)} |2p') + \frac{1}{\mathcal{J}^2} \sum_3 B_{123} \left\{ (t^{i}_{13} - j^{i}_{13})(t^{k}_{32} - j^{k}_{32}) + (i \leftrightarrow k) \right\} \delta_{pp'} \tag{101}$$

где величина

$$B_{123} \equiv B_{123}^{ppp} = \frac{n_1(E_3 - E_2) + n_2(E_1 - E_3) + n_3(E_2 - E_1)}{(E_1 - E_2)(E_2 - E_3)(E_3 - E_1)} \tag{102}$$

не зависит от p. Аналогично (98) видим, что можно положить $(1p| s_{ik}^{(2,0)} |2p') = \frac{1}{\mathcal{J}^2} t^{ik}_{12} \delta_{pp'}$, так что тензорная часть м.п.

$$(1p| r_{ik}^{(2,0)} |2p') = \frac{1}{\mathcal{J}^2} \left\{ \Pi_{12} t^{ik}_{12} + \sum_3 B_{123} \left[(t^{i}_{13} - j^{i}_{13})(t^{k}_{32} - j^{k}_{32}) + (i \leftrightarrow k) \right] \right\} \delta_{pp'} \tag{103}$$

Согласование момента $\mathrm{Tr}\{ j_m r_{ik}^{(2,0)} \} = 0$ выполняется здесь в силу правил отбора по внутренним операторам ($m = x, y$) и для $m = z$ в силу T-четности заполнения ($n_{\bar{1}} = n_1$). Используя (103) и условие согласования, аналогичное (62), можно вычислить тензорную часть гамильтониана. При этом, как и в (62), взятие следа понижает порядок малости, сокращая одну степень $\mathcal{J}$, и дает величину $h_{ik}^{(1,0)}$, совпадающую с (98,100).

Для невращательных частей м.п. условие (91) требует равенства нулю следа с j_n, что в нулевом порядке (73) обеспечено T-четностью заполнения. Учитывая сохранение момента (33) можно показать, что это требование для поправок (74,75) физически означает корректное отделение вращения от других коллективных степеней свободы и выполняется для реальных возбуждений с $\omega \neq 0$ /8/.

Важный результат получается из решения уравнений для скалярной вращательной поправки $\bar{r}^{(1,0)}$. Как видно из (78), соответствующая поправка к полю должна иметь вид

$$\bar{\xi}^{(1,0)} = \frac{1}{\mathcal{J}}\,\bar{t} + \Big(h_i^{(1,0)} - \frac{1}{\mathcal{J}}L_i\Big)\bar{t}_i \qquad (104)$$

где $\bar{t}$ и $\bar{t}_i$ – определяемые интегральными условиями (34) внутренние операторы, имеющие правила отбора j^2 и j_i соответственно. Тогда решение (79) равно

$$(1p|\,\bar{r}^{(1,0)}|2p') = \frac{1}{\mathcal{J}}\Pi_{12}\Big(\bar{t} + \frac{1}{2}j_i^2\Big)_{12} +$$
$$\langle p|\,h_i^{(1,0)} - \frac{1}{\mathcal{J}}L_i\,|p'\rangle\, \Pi_{12}^{pp'}\,(\bar{t}_i - j_i)_{12} \qquad (105)$$

Подставляя (105) в (91) и учитывая правила отбора и свойства T-четности, получим, что это согласование выполняется лишь при условии, что векторная часть гамильтониана равна

$$h_i^{(1,0)} = \frac{1}{\mathcal{J}}L_i \quad (i = x, y), \qquad 106)$$

т.е. совпадает с "угловой скоростью" внутренних возбуждений, несущих момент L. При этом (см.(104))

$$(1p|\,\bar{\xi}^{(1,0)}|2p') = \frac{1}{\mathcal{J}}\bar{t}_{12}\,\delta_{pp'},$$
$$(1p|\,\bar{r}^{(1,0)}|2p') = \frac{1}{\mathcal{J}}\bar{t}_{12}\,\delta_{pp'}\,\Pi_{12} + \frac{1}{2\mathcal{J}}(j_i^2)_{12}\,\Pi_{12}\,\delta_{pp'} \qquad (107)$$

Результат (106) можно получить и согласованием гамильтониана, как в (62). Наконец, такое же согласование определяет

$$h^{(1,0)} = \frac{1}{2\mathcal{J}}L_i^2 + Const \qquad (108)$$

Окончательно, вращательный гамильтониан (37) первого приближения приобретает (с точностью до постоянного слагаемого) вид

$$H^{(1,0)} = D_L^{-1}\Big\{\bar{h}^{(1,0)} + h_i^{(1,0)}R_i + \frac{1}{2}h_{ik}^{(1,0)}R_iR_k\Big\}D_L =$$
$$= \frac{1}{2\mathcal{J}}\big(D_L^{-1}L_iD_L + R_i\big)^2 = \frac{I_i^2}{2\mathcal{J}} \qquad (109)$$

где I – полный момент в подвижных осях (21,22).

Подобный анализ позволяет найти и вклады второго вращательного и смешанного порядков. Векторные величины второго порядка по вращению, как следует из (88), дают не зависящую от p перенормировку векторов (95). Из (92) можно найти $h_{ik}^{(20)}$, т.е. добавку к моменту инерции, которая не содержится в МПВ. Возникающие здесь физические эффекты обсуждались в работе /7/. Аналогично уравнение (79) и соответствующие члены условия (91) определяют (также не зависящую от коллективных возбуждений) перенормировку скаляра (105). Векторная добавка $h_i^{(20)}$ к гамильтониану обращается в нуль.

Принципиально новые эффекты – реальное смешивание полос-содержания в членах $r_i^{(1,1)}$, $\bar{r}^{(1,1)}$. Вводя обозначения

$$G_{pp'}(a|b) = -\frac{1}{\mathcal{J}\mathcal{J}_0(\omega_{pp'})}\sum_{123}(1p|\,\xi^{(0)}|2p')\big(a_{31}b_{23}B_{132}^{pp'p'} + a_{23}b_{31}B_{321}^{p'p'p}\big),$$
$$(110)$$

$$F_{pp'}(a|A) = -\frac{1}{\mathcal{J}_0(\omega_{pp'})}\sum_{12}\Pi_{12}^{pp'}a_{21}(1p|A|2p'), \qquad (111)$$

и используя формулы (82,83) и условия согласования (91,92), найдем матричные элементы гамильтониана (37) между смешивающимися затравочными полосами, построенными на различных коллективных возбуждениях

$$\langle p|\,h_{ik}^{(1,1)}|p'\rangle = F_{pp'}(j_k|\,\xi_i^{(1,1)}) + G_{pp'}(j_k|\,t_i - j_i) \qquad (112)$$

$$\langle p|\,h_k^{(1,1)}|p'\rangle = F_{pp'}(j_k|\,\bar{\xi}^{(1,1)}) + F_{pp'}\Big(\frac{1}{2}[j_k, j_i]_+|\,\xi_i^{(1,1)}\Big)$$
$$+\, G_{pp'}\Big(j_k|\,\bar{t} + \frac{1}{2}j_i^2\Big) + G_{pp'}\Big(\frac{1}{2}[j_k, j_i]_+|\,t_i - j_i\Big). \qquad (113)$$

Величины $\xi_i^{(1,1)}$, $\bar{\xi}^{(1,1)}$ определяются решением уравнений для поля, которые получаются из (34) с помощью (36).

Из структуры функций (110) следует, что, если операторы a и b имеют одинаковую (различную) T-четность, то смешиваются полосы p и p', построенные на состояниях, которые генерируются также операторами одинаковой (различной) T-четности.

Поэтому в первом случае смешивающий гамильтониан имеет тензорный вид (112), а во втором векторный (113).

8. Микроскопическая теория и феноменологическое описание

Полученные в разделе 7 выражения (112, 113) совместно с условиями согласования поля полностью определяют поправки к правилам Алаги для матричных элементов переходов. Феноменологически эти поправки вводятся обычно по следующей схеме /15/. Пусть мы хотим описать смешивание полос $|\rho\rangle$ и $|\rho'\rangle$ с $\Delta K = \varkappa$. Постулируем смешивающий гамильтониан в виде

$$H_c = h_\varkappa T_{-\varkappa} + э.с. \tag{114}$$

где $T_{\pm\varkappa}$ -тензор из компонент момента I_λ, с правилами отбора $|\Delta K| = \varkappa$, а $h_{\pm\varkappa}$ -внутренний оператор, переводящий из полосы $|\rho\rangle$ в полосу $|\rho'\rangle$, например, пропорциональный оператору фонона. По теории возмущений находят новые стационарные состояния:

$$\Phi_I = |IK_\rho\rangle - a_I |IK'\rho'\rangle, \quad \Phi'_I = |IK'\rho'\rangle - a|IK_\rho\rangle, \tag{115}$$

где коэффициент смешивания равен

$$a_I = \chi_{\rho'\rho} \langle IK'|T_{-\varkappa}|IK\rangle, \quad \chi_{\rho\rho'} = \frac{\langle\rho'|h_\varkappa|\rho\rangle}{\omega_{\rho'\rho}} \tag{116}$$

Предполагается, что физические операторы перехода имеют вид, известный из обобщенной модели

$$Q_{\ell\mu} = \sum_\lambda D^{\ell *}_{\mu\lambda} \tilde{Q}_{\ell\lambda}, \tag{117}$$

где величины $\tilde{Q}_{\ell\lambda}$ действуют только на внутреннюю функцию[3]. Тогда матричные элементы оператора (117) по новым состояниям (115) равны матричным элементам по старому базису от преобразованного оператора $Q_{\ell\mu} + \delta Q_{\ell\mu}$, где

$$\delta Q_{\ell\mu} = [\chi T_{-\varkappa} + \chi^+ T_\varkappa, \sum_\lambda D^{\ell *}_{\mu\lambda} \tilde{Q}_{\ell\lambda}] \tag{118}$$

Нетрудно видеть, что результативно феноменологические поправки (118) имеют такую же операторную структуру, какую даёт микроскопический подход (26), если L не имеет поперечной части, т.е. $I_\perp = R_\perp$. Однако в феноменологии поправки к разным операторам определяются одной величиной χ и поэтому слишком жестко связаны между собой. Так, если нас интересуют переходы между полосами аксиального ядра, а статические величины $\tilde{Q}_{\ell 0}$, совпадающие с $\tilde{Q}_{\ell 0}$ в обозначениях (26), почти одинаковы в обеих полосах, то

$$\delta Q_{\ell\mu} = \chi \tilde{Q}_{\ell 0} \left[T_{-\varkappa}, D^{\ell *}_{\mu 0}\right] + э.с. \tag{119}$$

Согласно (119), поправки к различным операторам относятся между собой (кроме очевидных геометрических факторов) просто как соответствующие статические мультиполи $\tilde{Q}$.

Микроскопическая теория не дает такой универсальной картины. Кроме добавок типа (118), обусловленных изменением волновой функции (115) ("смешивание"), операторы приобретают свои специфические добавки, определяемые изменением нужной части м.п. при вращении ("искажение", см. (24)). Эти вклады имеют такую же геометрическую структуру, но не универсальны; вместо (117) следует писать ряд (26), т.е. эффективно величины $\tilde{Q}_{\ell\lambda}$ сами содержат вращательный момент.

Проиллюстрируем сказанное на простой модели, где самосогласованное поле носит мультипольный характер

$$S = -\varkappa \sum_\mu q^+_{\ell\mu} Q_\mu, \quad Q_\mu = Tr\{q_{\ell\mu} R\} \tag{120}$$

Для величин Q_μ справедливо разложение (26) с коэффициентами (28), причем в силу аксиальности $\tilde{Q}^{(0)}_\mu = \delta_{\mu 0} Q_0$. В статическом базисе (73) легко выразить /10/ матричные элементы одночастичного момента $j^{(\pm)} = j_x \pm i j_y$:

$$j^{(\pm)}_{12} = -\varkappa \alpha_\ell Q_0 \frac{(q^+_{\pm 1})_{12}}{E_1 - E_2}, \quad \alpha_\ell = \sqrt{\ell(\ell+1)(2\ell+1)} \begin{pmatrix} \ell & 1 & \ell \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \sqrt{2}(-1)^{\ell-1}. \tag{121}$$

Это тождество, тесно связанное с законом сохранения момента, играет важную роль в выделении духовых колебательных мод/8/; пользуясь им, можно показать, что в модели (120) первая вращательная добавка (98) к полю исчезает, $t_i = 0$. Из (121) и (77) с учетом свойств Т-четности операторов $q_{2\mu}$ вытекает соотношение между функциями (110)

$$G_{pp'}(q_{\pm1}|j^{(+)}) = \frac{\omega_{pp'}}{\varkappa d_e Q_0} G_{pp'}(j^{(\mp)}V^{(+)}) \qquad (122)$$

Кроме того, можно явно вычислить следующие суммы:

$$\sum_{12} \Pi_{12}^{pp'} j_{21}^{(\mp)} (q_{\pm1}^{+})_{12} = \frac{2\omega_{pp'}}{\varkappa d_e Q_0} \mathcal{F}_0(\omega_{pp'}); \qquad (123)$$

$$1 + \varkappa \sum_{12} \Pi_{12}^{pp'} |(q_{\pm1})_{12}|^2 = \frac{\omega_{pp'}}{d_e Q_0} \sum_{12} \Pi_{12}^{pp'} j_{21}^{(\mp)} (q_{\pm1}^{+})_{12} = -\frac{2\omega_{pp'}^2 \mathcal{F}(\omega_{pp'})}{\varkappa d_e^2 Q_0^2} \qquad (124)$$

Заметим, что с помощью канонического преобразования всегда можно с требуемой точностью обратить в нуль недиагональные матричные элементы $h_{in}^{(1,1)}$, что эквивалентно процедуре, которая приводит к (118). Пользуясь этим произволом выбора состояний $|p\rangle$, положим $\langle p| h_{in}^{(1,1)} |p'\rangle = 0$ и найдем м.п. $r_i^{(1,1)}$ (83), а с помощью условий согласования (28) соответствующие мультполи $Q_\mu^{(1,1)}$, которые в силу правил отбора отличны от нуля лишь для $\mu = \pm 1$. Обозначая $Q_\mu^{(\pm)} = Q_\mu^{x(1,1)} \pm i Q_\mu^{y(1,1)}$ и подставляя тождества (122, 123), найдем

$$\langle p| Q_{\pm1}^{(+)} |p'\rangle = -\frac{d_e Q_0}{2\omega_{pp'}} G_{pp'}(j^{(\mp)}|j^{(+)}) \qquad (125)$$

Наконец, подставляя (125) в (112) и вспоминая, что $t_i = 0$, убеждаемся, что, действительно, $\langle p| h_{in}^{(1,1)} |p'\rangle = 0$, т.е. решение (125) является согласованным.

Мультиполи (125) целиком определяют самосогласованное поле $g_i^{(1,1)}$, а, следовательно, м.п. $r_i^{(1,1)}$. Отсюда для произвольного аддитивного оператора $Z_{e\mu} = Tr\{Z_{e\mu} R\}$ получим

вклад, аналогичный (125)

$$\langle p| Z_{\pm1}^{(+)} |p'\rangle = \pm\frac{1}{2} G_{pp'}(j^{(\mp)}|j^{(+)}) \Big\{ \frac{d_e' Z_0}{\omega_{pp'}} \pm \sum_{12} \Pi_{12}^{pp'} (Z_{\pm1})_{21} j_{12}^{(\pm)} \Big\} + \mathcal{F}_0(\omega_{pp'}) G_{pp'}(Z_{\pm1}|j^{(+)}), \qquad (126)$$

где $\overline{Z}_{e\mu}^{(0)} \equiv \delta_{\mu0} Z_0$, а d_e' определено в (121).

При $Z = q$ формулы (126) и (125) совпадают в силу (122, 124). Но для произвольного оператора $Z_{e\mu}$ не существует соотношений, аналогичных (122 - 124), поэтому, вообще говоря, (126) нельзя свести к виду (125). Первое слагаемое в (126) вполне аналогично (125) и имеет такой же универсальный смысл, как в феноменологическом подходе (119), причем роль "смешивающего гамильтониана" $h_\varkappa$ (114) играет функция $G_{pp'}(N)$. Второе и третье слагаемые в (126) являются специфическими для каждого оператора и не имеют феноменологических аналогов.

С еще большей осторожностью следует относится к феноменологическому описанию эффектов высших порядков, в частности, отличий в моментах инерции основной и колебательных полос. Везде, наряду с универсальными членами, которые даются высшими порядками по возмущению (114), возникают новые члены того же порядка величины и той же операторной формы, но специфические для каждого эффекта. Представляет большой интерес расчет рассмотренных здесь неадиабатических явлений для конкретных ядер

Авторы благодарны С.Т.Беляеву за неизменное внимание к работе и многочисленные полезные обсуждения.

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов
Подписано к печати 24.10.1973г. МН 08588
Усл. 1,3 печ.л., тираж 200экз. Бесплатно.
Заказ 88 . ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вг