13

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ПРЕПРИНТ И Я Ф 86 - 73

М.М.Карлинер, А.С.Медведко

О ГАРМОНИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИИ РАВНОВЕСНОЙ ОРБИТЫ ПУЧКА В УСКОРИТЕЛЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Новосибирск

1973

Карлинер М.М., Медведко А.С.

О ГАРМОНИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИИ РАВНОВЕСНОЙ ОРБИТЫ ПУЧКА В УСКОРИТЕЛЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

А Н Н О Т А Ц И Я

Решение задачи коррекции равновесной орбиты пучка в ускорителях заряженных частиц с жесткофокусирующей магнитной структурой может быть существенно упрощено, если для коррекции орбиты использовать ортогональную систему корректирующих воздействий.

Рассматривается применение в качестве таких воздействий системы тригонометрических функций (азимутальных гармоник) и определяются требования, предъявляемые к построению систем коррекции и наблюдения за равновесной орбитой, выполнение которых приводит к устранению взаимного влияния гармоник.

Карлинер М.М., Медведко А.С.

О ГАРМОНИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИИ РАВНОВЕСНОЙ ОРБИТЫ ПУЧКА В УСКОРИТЕЛЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В накопительном кольце установки ВЭПП-3 сбор показаний датчиков положения равновесной орбиты пучка и распределение корректирующих воздействий осуществляется при помощи опрашивающего устройства, благодаря которому азимутальные картины искажений орбиты и подаваемых корректирующих воздействий превращаются во временные последовательности, повторяющиеся с периодом 20 мсек. Гармонический анализ и синтез подобных временных последовательностей средствами электроники является сравнительно простой задачей. В связи с этим появилась необходимость в более детальном рассмотрении свойств метода гармонической коррекции равновесной орбиты.

Коррекция равновесной орбиты пучка заряженных частиц в жесткофокусирующей магнитной структуре возможна при использовании корректирующих возмущений магнитного поля в виде азимутальных гармоник /1,2/ и в виде комбинации сосредоточенных воздействий, вычисленных по известным возмущениям орбиты матричным способом /2/, либо методом азимутальных производных /3/. Если искажения магнитного поля распределены сравнительно равномерно и сильные локальные искажения отсутствуют, то воздействие их удобно представлять (и подавлять) суммой азимутальных гармоник.

В кольцевой машине, состоящей из $2N$ элементов периодичности и такого же количества равномерно размещенных корректоров и датчиков положения равновесной орбиты, гармоники с номерами $0\leqslant n\leqslant N$ оказываются разделенными (разделение гармоник означает, что введение какой-либо азимутальной гармоники возмущений магнитного поля приводит к появлению на датчиках аналогичного "синусоидального" искажения равновесной орбиты). В этом случае далекие от резонанса бетатронных колебаний гармоники оказывают слабое воздействие на пучок, что позволяет при коррекции орбиты ограничиваться только несколькими гармониками корректирующих воздействий.

В магнитной структуре типа "рейстрек" (полукольца, разделенные прямолинейными промежутками) прямолинейные промежутки вносят асимметрию, приводящую к взаимной связи гармоник, что усложняет процесс коррекции орбиты.

Рассмотрим вопрос о взаимном влиянии гармоник в такой установке подробнее. Для этого выразим гармоники, получающиеся при анализе показаний датчиков, через гармоники возмущений магнитного поля, поданные на корректоры.

Пусть в магнитную систему ускорителя, содержащую I корректоров и J датчиков, подано корректирующее воздействие в виде суммы K дискретных гармоник $(2K \leq I, 2K \leq J)$

Корректирующее воздействие, поступающее на i-ый корректор, равно

$$F_i = m_i \sum_{k=1}^{K} \left(g_k \cos k \frac{2\pi}{I} i + h_k \sin k \frac{2\pi}{I} i \right) \tag{1}$$

Равновесная орбита при наличии возмущающего магнитного поля $F(\theta)$ (θ -азимут) описывается вынужденным решением уравнения бетатронных колебаний:

$$y'' + w(\theta) y = F(\theta) \tag{2}$$

записываемого также в виде:

$$\eta'' + \nu^2 \eta = \nu^2 \beta^{3/2} F \tag{3}$$

при известной [4] замене переменных:

$$\eta = y \beta^{-1/2}, \quad \varphi = \frac{L}{2\pi} \int \frac{d\theta}{\nu \beta}$$

где ν -относительная частота бетатронных колебаний,

β -элемент матрицы Твисса,

L -длина орбиты.

Представляя правую часть уравнения (3) рядом Фурье, получим решение также в виде ряда, n-ная гармоника которого равна [5] :

$$\eta_n = \frac{\nu^2}{\nu^2 - n^2} \left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi \right) \tag{4}$$

где a_n и b_n -амплитуды гармоник возмущений в системе переменных η, φ :

$$a_n=\frac{1}{\pi\nu}\sum_{i=1}^{I}\overline{\beta_i^{1/2}}F_i\cos n\varphi_i\,\Delta l_i$$

$$b_n=\frac{1}{\pi\nu}\sum_{i=1}^{I}\overline{\beta_i^{1/2}}F_i\sin n\varphi_i\,\Delta l_i \tag{5}$$

здесь $\overline{\beta_i^{1/2}}$ -усреднение $\beta^{1/2}(l)$ на длине i -того корректора (Δl_i), φ_i - координата i -то корректора.

Подставляя в (5) вместо F_i их значения из (1), после несложных преобразований получим:

$$a=Ag+Bh$$

$$b=Cg+Dh \tag{6}$$

где $a=\{a_n\}$, $b=\{b_n\}$, $g=\{g_k\}$, $h=\{h_k\}$

- "векторы" амплитуд гармоник сил, A, B, C, D - матрицы с элементами вида:

$$A_{nk}=\sum_{i=1}^{I}M_i\cos k\frac{2\pi}{I}i\cos n\varphi_i\,;\quad B_{nk}=\sum_{i=1}^{I}M_i\sin k\frac{2\pi}{I}i\cos n\varphi_i\,;$$

$$C_{nk}=\sum_{i=1}^{I}M_i\cos k\frac{2\pi}{I}i\sin n\varphi_i\,;\quad D_{nk}=\sum_{i=1}^{I}M_i\sin k\frac{2\pi}{I}i\sin n\varphi_i\,. \tag{7}$$

$M_i=\frac{1}{\pi\nu}m_i\overline{\beta_i^{1/2}}\Delta l_i$ -постоянные коэффициенты.

Очевидно, что отклонения "y" орбиты в произвольной (j - той) точке азимута равны:

$$y_j = \beta_j^{1/2} \sum_{n=1}^{K} \eta_n(j) = \beta_j^{1/2} \sum_{n=1}^{K} \frac{\nu^2}{\nu^2 - n^2} \left(a_n \cos n\varphi_j + b_n \sin n\varphi_j \right) \tag{8}$$

Нормированное по току пучка показание датчика, размещенного в этой точке:

$$u_j = q_j y_j$$

Образуем из этих сигналов последовательность и подвргнем её дискретному преобразованию Фурье. Тогда амплитуды полученных синусных и косинусных дискретных гармоник (U , V) выразятся через векторы a , b следующим образом:

$$\begin{aligned} U &= GQa + RQb \\ V &= SQa + HQb \end{aligned} \tag{9}$$

где Q -диагональная матрица с общим членом $Q_{nn} = \frac{\nu^2}{\nu^2 - n^2}$

Элементы матриц G, R, S, H соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned} G_{kn} &= \sum_{j=1}^{J} P_j \cos n\varphi_j \cos k \frac{2\pi}{J} j \,; \quad R_{kn} = \sum_{j=1}^{J} P_j \sin n\varphi_j \cos k \frac{2\pi}{J} j \,; \\ S_{kn} &= \sum_{j=1}^{J} P_j \cos n\varphi_j \sin k \frac{2\pi}{J} j \,; \quad H_{kn} = \sum_{j=1}^{J} P_j \sin n\varphi_j \sin k \frac{2\pi}{J} j \,. \end{aligned} \tag{10}$$

$P_j = \frac{2\pi}{J} q_j \beta_j^{1/2}$ -постоянные коэффициенты.

Подставляя (6) в (9) получим искомую связь между гармониками на входе корректоров и на выходе датчиков:

$$\begin{aligned} U &= (GQA + RQC)g + (GQB + RQD)h \\ V &= (SQA + HQC)g + (SQB + HQD)h \end{aligned} \tag{11}$$

Из сравнения выражений (7) и (10) видно, что в несимметричной магнитной системе при $I=J$ в случае совпадения координат датчиков и корректоров ($\varphi_i = \varphi_j$) выравниванием коэффициентов M_i и P_j можно получить:

$$G=A^T,\ R=B^T,\ S=C^T,\ H=D^T$$

где "T" означает транспонирование матрицы.

Для кольцевой машины, содержащей $2N$ элементов периодичности и столько же датчиков и корректоров при равномерной расстановке датчиков и корректоров $\varphi_i = 2\pi i/I$ и матрицы A, D, G, H обращаются в диагональные с элементами:

$$A_{nn}=D_{nn}=MN, \qquad G_{nn}=H_{nn}=PN,$$

а матрицы B, C, R, S –обращаются в нулевые вследствие ортогональности системы тригонометрических функций $\sin n\frac{2\pi}{I}i$, $\cos k\frac{2\pi}{I}i$, определенных на дискретном множестве точек [6].

В этом случае уравнения (17) приобретают известный [1] вид:

$$\begin{aligned} u &= \alpha Q g \\ v &= \alpha Q h \end{aligned} \tag{12}$$

где α – некоторый постоянный коэффициент.

В машинах с прямолинейными промежутками (ВЭПП-3, ВЭПП-4 – Новосибирск и $SPEAR$ –Стенфорд, США) из-за отличия в построении магнитной структуры прямолинейных промежутков от структуры полуколец условия ортогональности не соблюдаются. В результате недиагональные членв матриц уравнения (11) не обращаются в нуль, что означает появление взаимного влияния гармоник. Приближенное выполнение условий ортогональности,очевидно, приводит к минимизации перекрестных связей.

Практическое осуществление этих условий возможно только для $I=J$ в случае:

а) при произвольном виде функции $\varphi(\theta)=\frac{L}{2\pi}\int\frac{d\theta}{\nu\beta}$ корректоры (датчики) необходимо устанавливать через интервалы, соответствующие равным величинам набега фазы $\Delta\varphi$ между соседними корректорами (датчиками). Такая расстановка в ряде случаев может сильно отличаться от равномерной по θ ;

б) необходимо выравнивание масштабных коэффициентов сил корректоров (M_i) и масштабных коэффициентов датчиков (P_j).

Требование равномерности размещения корректоров по φ однозначно определяет число корректоров (датчиков) на прямолинейном промежутке (I_{np}). Так, если установка содержит $2N$ элементов периодичности на полукольцах и два прямолинейных промежутка; относительная частота свободных бетатронных колебаний ν , то обозначив набег фазы свободных колебаний на элементе периодичности через μ_1 , а на прямолинейном промежутке через μ_2, получим:

$$I_{np}=J_{np}=\frac{\mu_2}{\mu_1}=\frac{\mu_2\cdot 2N}{2\pi\nu-2\mu_2}. \qquad (13)$$

Накопитель ВЭПП-3, например, имеет $2N=16$, $\nu\simeq 5{,}25$, $\mu_2=2\pi$

Для него $$I_{np}=J_{np}=\frac{2\pi\cdot 2N}{2\pi(\nu-2)}=4{,}92\simeq 5.$$

К сожалению, не всегда в прямолинейные промежутки удается разместить оптимальное количество датчиков и корректоров. Так, на установке ВЭПП-3 в прямолинейных промежутках размещено по 4 корректора и только по 2 датчика.

Литература

1. А.А.Васильев. Труды международной конференции по ускорителям, 1963 г., 871.
2. Baconnier, Y, CERN, 65-35, November, 1965.
3. И.П.Карабеков. Атомная энергия, т.18, вып.1, 1965г., 18.
4. Г.Брук. "Циклические ускорители заряженных частиц", Атомиздат, М., 1970г.
5. Resegotti, L. CERN/ISR-MAG/68-30, June, 1968.
6. Хемминг. "Численные методы", "Наука", М., 1972г.

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов
Подписано к печати 4.X-73 г. МН 08560
Усл. 0,4 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 86. ПРЕПРИНТ

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, вг.