

12

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р

ПРЕПРИНТ И Я Ф 82 - 73

В. И. Юрченко

О СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ

Новосибирск

1973

О СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ

В.И.Юрченко

А Н Н О Т А Ц И Я

Проводится анализ уравнений квазистационарного поля. В трёхмерном случае источник напряжения вводится в уравнения поля посредством вектора сторонних сил, на который наложены некоторые простые ограничения. Производится сравнение систем уравнений и граничных условий для электромагнитных потенциалов A , φ и электромагнитных полей. В последнем случае для правильной постановки задачи вектор электрического поля представляется в виде суммы вихревого \vec{E}^V и градиентного \vec{E}^G векторов. При этом из уравнений можно исключить либо вектор \vec{B} , либо \vec{E}^V и, таким образом, записать две различные системы уравнений. Показано, что наиболее удобными для численных и аналитических расчётов являются уравнения для электромагнитных потенциалов.

Рассматривается задача об определении двумерного квазистационарного поля в системе проводников образующих многовитковую цепь. Указаны методы решения этой задачи в линейном и нелинейном случаях.

Дана постановка задачи для случая бесконечно тонкого скинслоя.

В в е д е н и е

Анализ магнитного поля при учёте скин-эффекта важен во многих приложениях. Часто достаточно ограничиться решением уравнения типа теплопроводности для магнитного поля внутри проводника с заданным на его границе значением функции. Такую задачу в случае сложной области можно решить по крайней мере численно /1/. В простых случаях можно указать точные решения /2,3/.

Когда проводники занимают только часть области, в которой ищется поле, решение этого уравнения наталкивается на значительные трудности. Здесь целесообразно использовать уравнение для векторного потенциала, которое в квазистационарном приближении имеет вид^{x)}

$$\sigma_M \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \Delta \vec{A} - \sigma_M \nabla \varphi$$

Смысл этого уравнения прост. Запишем его в виде

$$\vec{E}^r = -\frac{1}{\sigma_M} \Delta \vec{A} - \vec{E}^v$$

где $\vec{E}^r = -\nabla \varphi$ - градиентное электрическое поле (падение напряжения на единице длины) - $\frac{1}{\sigma_M} \Delta \vec{A} = \rho \vec{j}$ - омическое падение напряжения на единице длины, $\vec{E}^v = -\partial \vec{A} / \partial t$ - вихревое электрическое поле (э.д.с. индукции на единице длины). На электротехническом языке уравнение для векторного потенциала можно истолковать как закон баланса напряжений в цепи из последовательно соединённых L и R , а \vec{E}^r - как напряжение источника питания.

Величина напряжения естественным образом входит в уравнение в виде источников поля. Важно также, что для решения

x) В работе использована система единиц СИ.

этого уравнения не нужно задавать специальных условий для векторного потенциала и его производных на границах областей, где характеристики среды существенно отличаются (полос магнитопровода, границы проводника). Решение уравнения на границах проводников автоматически удовлетворяет условию непрерывности вместе с первыми производными, а при переходе через поверхность, где магнитная проницаемость терпит скачок, условию непрерывности V_1^x). По этим причинам уравнение для векторного потенциала оказывается удобным в численных /4-8/ и аналитических расчетах /9/. Для численного решения в двумерном случае его можно записать в интегральном виде с последующим расчетом интегральных уравнений /4-7/. Возможен также прямой расчет разностным методом /8/.

В этой работе рассматривается постановка задачи об отыскании трехмерного поля вокруг проводников, подключенных к генератору переменного напряжения в случае, когда относительные магнитная и диэлектрическая проницаемости среды $\mu = \epsilon = 1$, и производится сравнение различных систем уравнений, которые могут быть записаны для такой задачи, с точки зрения их удобства для численных или аналитических расчетов.

Во второй части рассмотрен общий случай двумерной задачи. Дана постановка этой задачи в виде, позволяющем использовать для её решения разностный метод.

Рассмотрен случай бесконечно-тонкого скин-слоя.

х) Граничные условия в подобных задачах используются если решение ищется отдельно в каждой подобласти и затем производится их сшивка на совместной границе. В этом случае использование граничных условий связано с методом решения задачи. Если имеется метод, позволяющий найти поле сразу во всей области, эти условия не нужны.

1. ТРЕХМЕРНОЕ ПОЛЕ

Ниже рассматривается задача об определении поля вокруг проводников, подключенных к генератору напряжения.

1. Основные уравнения

Источник напряжения проще всего ввести в уравнения посредством обобщенного закона Ома

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}^c) \quad (1.1)$$

считая вектор \vec{E}^c , описывающий э.д.с. генератора напряжения, заданной функцией координат и времени. Распределение вектора \vec{E}^c можно для наглядности ограничить небольшой областью проводника, относящейся к генератору (рис.1), хотя может оказаться удобным какое-либо иное распределение. Вектор \vec{E}^c должен удовлетворять некоторым простым требованиям, которые будут сформулированы в п.4.

Везде ниже будем считать проводимость σ функцией координат, имеющей постоянное значение в области проводника и равной нулю в пустоте. В этих предположениях исходную систему уравнений, которая получается присоединением к уравнениям Максвелла уравнения (1.1), можно записать в виде (током смещения пренебрегаем, $\mu = \epsilon = 1$).

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (1.2)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{rot } \vec{E}^s = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.4)$$

$$\text{div } \vec{E}^s = 0 \quad (1.5)$$

$$\text{rot } \vec{E}^r = 0 \quad (1.6)$$

$$\operatorname{div} \vec{E}^r = \rho / \epsilon_0 \quad (1.7)$$

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E}^e + \vec{E}^r + \vec{E}^c) \quad (1.8)$$

Здесь мы представили вектор электрического поля \vec{E} в виде суммы вихревого \vec{E}^e и градиентного \vec{E}^r векторов. Подобное разбиение применяется в математической физике при определении векторных полей [1] и в данном случае оправдано по двум соображениям. Во-первых, исходный вектор разбивается таким образом на два более простых, но различных в математическом отношении вектора, что упрощает постановку задачи. В частности, это позволит в дальнейшем получить уравнения и граничные условия, не содержащие поверхностной плотности зарядов. Во-вторых, векторы \vec{E}^e , \vec{E}^r различны в физическом смысле, и такое разбиение способствует физической ясности рассматриваемых вопросов.

Из уравнения (1.2) следует, что везде

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (1.9)$$

и, следовательно, нормальная к поверхности проводника составляющая тока равна нулю:

$$j_{\perp} = 0 \quad (1.10)$$

(В противном случае $\operatorname{div} \vec{j}$ на поверхности проводника обращалась бы в бесконечность). Это единственное граничное условие, которое необходимо использовать при расчете поля, и оно следует непосредственно из уравнений.

В уравнениях (1.2) - (1.10) заданной величиной является вектор \vec{E}^c , остальные величины \vec{V} , \vec{E}^e , \vec{E}^r , \vec{j} , ρ подлежат определению.

2. Уравнения для электромагнитных потенциалов

Калибровку векторного потенциала возьмем в виде

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (2.1)$$

При такой калибровке векторный потенциал описывает только вих-

ревые поля^{х)}

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad \vec{E}^e = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{E}^r = -\nabla \varphi$$

и уравнения для \vec{A} , φ имеют вид:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\Delta \varphi = -\rho / \epsilon_0$$

$$\vec{j} = \sigma (-\partial \vec{A} / \partial t + \vec{E}^r + \vec{E}^e)$$

Исключим из этих уравнений ρ , \vec{j} (чтобы исключить ρ , нужно взять дивергенцию от последнего уравнения и воспользоваться (1.9), (2.1)). Получим следующие уравнения:

$$\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \Delta \vec{A} + \gamma (\vec{E}^r + \vec{E}^e) \quad (2.2)$$

$$\Delta \varphi = \text{div} \vec{E}^e \quad (2.3)$$

$$\gamma = \sigma \mu_0$$

с граничным условием

$$E_{i\perp}^r = -E_{i\perp}^e + \frac{\partial A_{i\perp}}{\partial t} \quad (2.4)$$

которое следует из (1.10). Здесь и в дальнейшем индекс i означает, что величины берутся с внутренней к поверхности проводника стороны, индекс e - с внешней. Значок \perp обозначает проекцию вектора на внутреннюю нормаль.

х) При любом другом виде калибровки векторный потенциал описывает также часть градиентного поля.

Уравнение (2.3) записано для внутренних точек проводника. Для того, чтобы оно было справедливо во всем пространстве, в правой части этого уравнения должны быть учтены поверхностные заряды. Однако, в нашем приближении значение вектора \vec{E}^r вне проводников не оказывает влияния на величину вектора \vec{A} и не входит в граничное условие (2.4), поэтому для определения векторного потенциала достаточно знать лишь значение вектора \vec{E}^r внутри проводников. Для определения \vec{E}^r имеем внутреннюю краевую задачу для уравнения Пуассона (2.3) с граничным условием (2.4). Необходимое условие разрешимости этой задачи [1]

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E}^c d^3z = \int_S \vec{E}^c \cdot d\vec{s}$$

где интеграл слева берется по объему проводника, а справа — по его поверхности, выполняется. Распределение потенциала в пустоте может быть найдено решением внешней краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta \varphi = 0$ с граничным значением потенциала на поверхности проводника, полученным из решения внутренней краевой задачи. Необходимо отметить, что решение внутренней краевой задачи для скалярного потенциала определено с точностью до произвольной постоянной, т.е. потенциал в задаче (2.2)–(2.4) определяется неоднозначно. Неоднозначность потенциала имеется и в общем случае, когда в уравнениях учитывается ток смещения. Здесь к скалярному потенциалу можно добавить любой электростатический потенциал нанесенных на проводники зарядов. Так как электрическое поле таких зарядов в проводниках равно нулю, магнитное поле останется тем же самым. В квазистационарном приближении ввиду отсутствия в уравнениях тока смещения к решению можно добавить электростатический потенциал зарядов, величина которых произвольным образом меняется во времени. Это не влияет на величину вектора \vec{E}^r в проводнике и, следовательно, оказывает влияния на векторный потенциал. В общем случае неоднозначность можно устранить заданием начального значения вектора \vec{E}^r в пустоте, в квазистационарном случае такой возможности нет. Здесь её можно устранить либо посредством задания полного поверхностного заряда на каждом проводнике, либо заданием потенциала в какой-либо точке каждого проводника.

Что касается уравнения для векторного потенциала, то, как видно, оно совпадает с неоднородным уравнением теплопроводности в среде с переменной теплоемкостью. Коэффициент при первой производной по времени, играющий роль теплоемкости среды, меняется скачком до нуля при переходе через границу проводника по направлению внешней нормали, а "источники тепла" отличны от нуля только в области занятой проводником. Решение этого уравнения должно быть непрерывно всюду вместе с первыми производными и обращаться в нуль на бесконечности.

Для векторного потенциала должно быть задано начальное условие $\vec{A}(\vec{r}, 0) = \vec{f}(\vec{r})$. Покажем, что если \vec{A}, φ удовлетворяют уравнениям (2.2), (2.3) с граничным условием (2.4), то при выполнении равенства

$$\operatorname{div} \vec{f} = 0 \quad (2.5)$$

дивергенция векторного потенциала равна нулю всегда. Для этого возьмем дивергенцию уравнения (2.2). Воспользовавшись соотношением $\Delta \vec{A} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} + \nabla \operatorname{div} \vec{A}$

и тем, что дивергенция ротора тождественно равна нулю, получим для величины $u = \operatorname{div} \vec{A}$ уравнение теплопроводности с источниками

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \gamma \operatorname{div} (\vec{E}^r + \vec{E}^c) + \varrho \quad (2.6)$$

Символом ϱ обозначены поверхностные источники, которые появляются при дифференцировании из-за скачка σ на поверхности проводника. Поверхностная плотность источников равна

$$\gamma \left(E_{i\perp}^r + E_{i\perp}^c - \frac{\partial A_{i\perp}}{\partial t} \right)$$

В силу уравнений (2.3), (2.4) источники в (2.6) равны нулю, поэтому при нулевом начальном условии (2.5) решение уравнения (2.6) равно нулю всегда. Таким образом, (2.1) является фактически ограничением на начальное условие, поэтому для нахождения \vec{A}, φ достаточно иметь уравнения (2.2), (2.3) с граничным условием (2.4) и с начальным условием, удовлетворяющим (2.5):

3. Уравнения для электромагнитных полей

Систему уравнений (1.2) - (1.8) можно привести к системе уравнений с меньшим числом неизвестных путем исключения некоторых величин. Исключая ρ , \vec{j} , получим

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \gamma (\vec{E}^s + \vec{E}^r + \vec{E}^c) \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}^s = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{E}^s = 0 \quad (3.4)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}^r = 0 \quad (3.5)$$

$$\operatorname{div} \vec{E}^r = -\operatorname{div} \vec{E}^c \quad (3.6)$$

На поверхности проводника должно быть

$$E_{iL}^s + E_{iL}^r + E_{iL}^c = 0 \quad (3.7)$$

Для уравнения (3.6) справедливы замечания, сделанные в предыдущем пункте для уравнения (2.3). В виду условия (3.5) задачу об определении вектора \vec{E}^r можно сформулировать в виде внутренней краевой задачи для уравнения (2.3).

Дальнейшее уменьшение числа неизвестных можно произвести, исключая из уравнений вектор \vec{E}^s или \vec{B} . Так, пользуясь (3.3), (3.4) можно получить, что

$$\vec{E}^s = -\operatorname{rot} \iiint_V \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{r}')}{\partial t} \cdot \frac{d^3 \vec{r}'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

где интегрирование производится по всему пространству, и подставить это выражение в уравнение (3.1) и граничное условие (3.7). Аналогичную процедуру можно проделать и с вектором \vec{B} . Если использовать первую возможность, получится следующая система уравнений

$$\text{rot } \vec{B} = \gamma \left(-\text{rot} \iiint_V \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{z}')}{\partial t} \cdot \frac{d^3 z'}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} + \vec{E}^r + \vec{E}^c \right)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\Delta \varphi = \text{div } \vec{E}^c \quad (\vec{E}^r = -\nabla \varphi)$$

с граничным условием

$$-\text{rot}_{iL} \iiint_V \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{z}')}{\partial t} \cdot \frac{d^3 z'}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} + E_{iL}^r + E_{iL}^c = 0 \quad (3.8)$$

Первое уравнение этой системы будет иметь обычный вид уравнения теплопроводности, если взять от него ротор. При этом получим уравнение

$$\gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \Delta \vec{B} + \gamma \text{rot } \vec{E}^c + \vec{q} \quad (3.9)$$

которое, также как и уравнение (2.2), можно считать уравнением теплопроводности во всем пространстве. Вектором \vec{q} обозначены поверхностные источники, обусловленные скачком σ на поверхности проводника, их поверхностная плотность

$$\gamma \left[\vec{n} \times \left(-\text{rot}_{iL} \iiint_V \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{z}')}{\partial t} \cdot \frac{d^3 z'}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} + \vec{E}_i^r + \vec{E}_i^c \right) \right]$$

где \vec{n} — вектор внутренней нормали.

Если уравнение (3.9) записывается и решается отдельно внутри и вне проводника, то, кроме граничного условия (3.8), должно быть задано граничное условие, обеспечивающее непрерывность вектора \vec{B} на поверхности проводника

$$\vec{B}_i = \vec{B}_e \quad (3.10)$$

а также условие, учитывающее наличие поверхностных источников \vec{q} . Поверхностные источники должны быть учтены посредством задания скачка нормальной производной вектора \vec{B} на границе проводника. Проводя те же вычисления, которые делаются при определении скачка нормальной производной потенциала простого слоя при переходе через поверхность, содержащую заряды, получим

$$\left. \frac{\partial \vec{B}}{\partial n} \right|_e - \left. \frac{\partial \vec{B}}{\partial n} \right|_i = \gamma \left[n \times \left(-\operatorname{rot}_i \int \int \int_V \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{z}')}{\partial t} \frac{d^3 \vec{z}'}{4\pi |\vec{z} - \vec{z}'|} + \vec{E}_i^r + \vec{E}_i^s \right) \right] \quad (3.11)$$

Таким образом, исходную систему уравнений можно заменить следующей

$$\left. \begin{aligned} \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \Delta \vec{B} + \gamma \operatorname{rot} \vec{E}^c \\ \Delta \varphi &= \operatorname{div} \vec{E}^c \end{aligned} \right\} \quad \text{в проводнике}$$

$$\Delta \vec{B} = 0 \quad \text{в пустоте}$$

с граничными условиями (3.8), (3.10), (3.11).

Подобная система уравнений и граничных условий имеет более сложный вид, чем система (2.2) - (2.4). Это обусловлено тем, что уравнение (3.9) является уравнением более высокого порядка по пространственным переменным, чем уравнение (2.2).

Если из исходных уравнений исключить вектор \vec{B} , то получим более простую систему:

$$\gamma \frac{\partial \vec{E}^s}{\partial t} = \Delta \vec{E}^s - \gamma \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^r + \vec{E}^c)$$

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \vec{E}^c$$

$$E_{i\perp}^s + E_{i\perp}^r + E_{i\perp}^c = 0$$

Первое уравнение этой системы является уравнением (2.2), от которого взята частная производная по времени. Источники в правой части этого уравнения будут δ -образными, если напряжение, подключаемое к проводнику, имеет ступенчатый вид, поэтому написанная система также менее удобна для расчетов, чем система (2.2) - (2.4).

Отметим теперь, что разбиение вектора \vec{E} на вихревую и градиентную части позволяет избежать появления в уравнениях и граничных условиях поверхностной плотности зарядов ρ_n . Встречающаяся в литературе система уравнений и граничных условий для вектора \vec{E} ($\vec{E}^c = 0$)

$$\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \Delta \vec{E} \quad \text{в проводнике}$$

$$\Delta \vec{E} = 0 \quad \text{в пустоте}$$

$$E_{i\parallel} = E_{e\parallel}$$

$$E_{i\perp} - E_{e\perp} = \rho_n / \epsilon_0$$

не является полной. Во-первых, ρ_n , также как и \vec{E} , является неизвестной величиной, поэтому второе граничное условие есть не более чем переобозначение переменных, во-вторых, как было отмечено в п.2, поверхностный заряд не определяется однозначно. Таким образом, постановка задачи для вектора \vec{E} без разбиения его на вихревую и градиентную части представляется нам затруднительной.

4. Ограничения на вектор \vec{E}^c

Произвольно заданный вектор \vec{E}^c в уравнениях Максвелла является, вообще говоря, "чужой величиной", поэтому на этот вектор должны быть наложены некоторые ограничения.

Циркуляция вектора \vec{E}^c по любому контуру типа L (рис.1), через который нельзя провести поверхность, целиком лежащую внутри проводника, должна иметь одно и то же значение, равное э.д.с. генератора напряжения:

$$\oint_L \vec{E}^c \cdot d\vec{l} = \text{э.д.с.} \quad (4.1)$$

Для выполнения (4.1) необходимо равенство нулю циркуляции по любому контуру типа ℓ . Отсюда следует первое ограничение на вектор \vec{E}^c

$$\text{rot } \vec{E}^c = 0 \quad (4.2)$$

Отметим, что (4.2) справедливо только для области занятой проводником, где задается вектор \vec{E}^c . Это условие не означает, что вектор \vec{E}^c можно представить в виде градиента некоторой функции. Последнее возможно только, если (4.2) выполнено во всем пространстве, а также если интеграл (4.1) равен нулю). Второе ограничение состоит в том, чтобы вектор \vec{E}^c был локализован в области, занимающей малую часть периметра проводника. Это ограничение существенно для определения скалярного потенциала, и позже мы к нему вернемся. Сначала обсудим условия (4.1), (4.2).

Для заданного значения э.д.с. вектор \vec{E}^c , удовлетворяющий условию (4.2), можно указать бесчисленным образом, однако, векторный потенциал определяется однозначно, независимо от способа задания вектора \vec{E}^c . Покажем это сначала для стационарной задачи, когда

$$\Delta \varphi = \text{div } \vec{E}^c \quad (4.3)$$

$$E_{iL}^r = -E_{iL}^c \quad (4.4)$$

Пусть для векторов \vec{E}_1^c и \vec{E}_2^c , которые имеют одинаковые значения э.д.с. решением уравнения Пуассона (4.3) найдены векторы \vec{E}_1^r и \vec{E}_2^r . Соответствующие векторы плотности тока $\vec{j}_1 = \sigma(\vec{E}_1^r + \vec{E}_1^c)$ и $\vec{j}_2 = \sigma(\vec{E}_2^r + \vec{E}_2^c)$ имеют равную нулю циркуляцию по контуру ℓ , через который можно провести поверхность, все точки которой находятся внутри проводника, и одно и то же значение циркуляции по контуру ℓ . Поэтому циркуляция вектора $\vec{j}_0 = \vec{j}_1 - \vec{j}_2$ по любому контуру внутри проводника равна нулю и его можно представить в виде градиента некоторой функции ψ . Так как дивергенция векторов \vec{j}_1 , \vec{j}_2 и их нормальные к границе составляющие равны нулю, функция ψ внутри проводника удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \psi = 0$ с граничным условием на поверхности $\partial \psi / \partial n = 0$.

Решением такой задачи может быть только произвольная постоянная, поэтому $\vec{j}_0 = 0$ и, стало быть, $\vec{j}_1 = \vec{j}_2$, т.е. вектор \vec{j} , и, следовательно, векторный потенциал определены однозначно.

То же имеет место и в нестационарном случае, если выполнено (4.2). Сделав в уравнениях (2.2) - (2.4) замену

$$\begin{aligned}\vec{E}^c - \nabla\varphi_0 &\rightarrow \vec{E}^c \\ \varphi - \varphi_0 &\rightarrow \varphi\end{aligned}$$

где φ_0 - решение задачи (4.3) - (4.4), получим уравнения и граничные условия и, следовательно, векторы \vec{A} , \vec{B} , не зависящие от начального вида вектора \vec{E}^c . Это важное обстоятельство позволяет при определении векторного потенциала выбирать удобный для вычислений вид вектора \vec{E}^c .

Приведенные рассуждения показывают, что для определения векторов \vec{B} , \vec{E}^B (это чаще всего и нужно в прикладных задачах) необходимо только ограничение (4.2). Локализация вектора \vec{E}^c в области, относящейся к генератору, необязательна. Последнее существенно, если по условиям задачи требуется определить вектор \vec{E}^r в пустоте. Действительно, пусть для заданного \vec{E}_1^c найдены \vec{A} , φ . образуем теперь вектор $\vec{E}_2^c = \vec{E}_1^c - \nabla\varphi$

При таком стороннем векторе получим то же самое решение для векторного потенциала, а для скалярного потенциала решением будет произвольная константа, что не соответствует действительности. Чтобы обойти возможные трудности, связанные с локализацией вектора \vec{E}^c в малой области, можно сначала решить систему (2.2) - (2.4) с наиболее удобным для вычислений видом вектора \vec{E}^c . При этом для градиентной части вектора \vec{E} внутри проводника получится какое-то фиктивное значение \vec{E}_0^r . Рассечем теперь проводник поверхностью S (рис.1) так, чтобы область, занятая проводником, стала односвязной (любой контур в этой области есть контур типа ℓ). В этой области можно определить интересующий нас потенциал посредством формулы

$$\varphi = c + \int_{\vec{z}_0}^{\vec{z}} (\vec{E}^c + \vec{E}_0^r) \cdot d\vec{l}$$

где \vec{z}_0 — точка взятая с какой-либо стороны поверхности S , C — произвольная постоянная (неоднозначность потенциала обоснована в п.2). Пусть интегрирования проходят внутри проводника, не пересекая поверхности S . При таком определении потенциала область, относящаяся к генератору, есть бесконечно тонкий слой на поверхности S , а значение потенциала (с точностью до произвольной постоянной C) не зависит от выбранного для вычислений вида вектора \vec{E}^c .

Для выяснения следствий, к которым может привести неправильное задание вектора \vec{E}^c , рассмотрим встречающуюся в приложениях задачу об определении реакции системы на заданное внешнее возмущение, когда действием реакции на возмущающую систему можно пренебречь. В такой задаче уравнение для векторного потенциала имеет вид

$$\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \Delta \vec{A} + \gamma \vec{E}^c + M_0 \vec{j}^c$$

где \vec{j}^c — ток, задающий возмущающее магнитное поле. В области занятой проводником $\vec{j}^c = 0$.

Формулировку этой задачи можно свести к предыдущей, если векторный потенциал представить в виде $\vec{A} = \vec{A}^{(0)} + \vec{A}^{(1)}$, где $\vec{A}^{(0)}$ — векторный потенциал заданного возмущающего магнитного поля, $\vec{A}^{(1)}$ — поля, возникшего под действием возмущения. Тогда для $\vec{A}^{(1)}$ будем иметь уравнения (2.2) — (2.4), в которых $\vec{E}^c = -\partial \vec{A}^{(0)}/\partial t$, $\text{div} \vec{E}^c = 0$. Такая формулировка может быть более удобной для расчетов. В этом случае роль вектора \vec{E}^c выполняет вектор вихревого электрического поля, индуцированного изменением возмущающего магнитного поля. В отличие от предыдущей задачи $\text{rot} \vec{E}^c$ не равен нулю.

Теперь отметим следующее. Если в начальный момент времени, когда $\vec{A} = 0$, включается внешнее поле, описываемое потенциалом $\vec{A}^{(0)}$, то по истечению достаточно короткого промежутка времени, когда скин-слой много меньше размера проводника, магнитное поле внутри его равно нулю, т.е. $\text{rot} \vec{A}^{(0)} = -\text{rot} \vec{A}^{(0)}$. Отсюда следует, что вектор \vec{E}^c с отличным от нуля ротором, введенный формальным образом в уравнения (2.2) — (2.4), приводит к появлению в проводнике магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \int_0^t \text{rot} \vec{E}^c dt$$
, т.е. скин - эффект отсутствует. Трудно представить, чтобы такая ситуация имела место в прикладных задачах. Этот пример показывает важность правильного задания вектора \vec{E}^c , в противном случае можно получить несуществующие эффекты.

5. Обсуждение

Как видно, источник напряжения можно просто ввести в уравнения с помощью вектора \vec{E}^c с некоторыми простыми ограничениями на него. Векторный потенциал однозначно определяется напряжением источника и не зависит от способа задания вектора \vec{E}^c .

При записи уравнений для электромагнитных полей разбиение вектора \vec{E} на вихревую и градиентную части обеспечивает правильную постановку задачи. При этом оказывается, что из уравнений можно исключить либо вектор \vec{B} , либо \vec{E}^B . Полностью вектор электрического поля \vec{E} из уравнений не исключается. Разделение вектора \vec{E} на \vec{E}^G и \vec{E}^B позволяет исключить из уравнений и граничных условий поверхностную плотность зарядов.

Наиболее предпочтительны для расчетов уравнения для электромагнитных потенциалов, т.к. уравнения для электромагнитных полей являются уравнениями более высокого порядка либо по пространственным переменным, либо по времени.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОГО КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ В СЛУЧАЕ МНОГОВИТКОВОЙ СИСТЕМЫ

В /8/ дан пример расчета разностным методом двумерного квазистационарного поля для одновитковой системы с симметрично расположенными проводниками. Величина градиентного электрического поля \vec{E}^G в уравнении для векторного потенциала в этом случае простым образом выражается через величину приложенного к проводникам напряжения $U(t)^X$. Если же симметрии нет или система имеет много витков, простой способ задания ^{X)} укажем еще один случай. Если одновитковая система представляет собой проводник в замкнутом экране, толщина стенок которого много больше величины скин-слоя, легко показать (в плоско-параллельном случае), что в стенках экрана $E^T = 0$. Расчёт поля в этих условиях можно провести, задавая во внутреннем проводнике $E^T = U(t)/L$, а на внешней границе экрана $A(\vec{r}, t) = 0$.

ния вектора \vec{E}^{Γ} возможен только для стационарного поля. В квазистационарном случае отличное от нуля вихревое электрическое поле $\vec{E}^{\nu} = -\partial\vec{A}/\partial t$ приводит к разделению зарядов на концах проводников, из-за чего величина градиентного поля в них может существенно отличаться от его стационарного значения.

Для примера рассмотрим схему на рис.2. Пусть к выводам проводника I внезапно приложено напряжение. Появляющееся при этом поле \vec{E}^{ν} приводит к разделению зарядов на концах проводника II, являющегося концентратором потока, и к появлению в нём градиентного электрического поля \vec{E}^{Γ} . (В квазистационарном приближении этот процесс происходит мгновенно). Если скин-слой много меньше поперечного размера проводника, $E_{\varphi}^{\Gamma} = -E_{\varphi}^{\nu}$, что обеспечивает отсутствие тока в его толще и концентрацию потока в области не занятой этим проводником. Можно сказать, что в многовитковой системе каждый отдельный виток по отношению к остальным виткам выступает в роли такого концентратора и в нем будет наводиться соответствующее градиентное поле. Для такого рода систем необходимо в процессе расчета уравнения для векторного потенциала рассчитывать также величину вектора \vec{E}^{Γ} в каждом проводнике. Ниже излагается постановка задачи для расчета поля в этом случае.

Рассмотрение будем проводить для плоскопараллельного поля. Длину системы вдоль оси Z (направлена вверх от плоскости рис.3) примем равной L . Отличные от нуля Z -компоненты векторного потенциала и градиентного электрического поля - A, E^{Γ} должны определяться из уравнения

$$\gamma \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} + \gamma E^{\Gamma} \quad (1)$$

$$A|_{x,y=\infty} = 0 \quad (2)$$

с каким либо начальным условием, где $\gamma = \sigma \mu_0$, σ - проводимость среды, μ - её относительная магнитная проницаемость, и условий:

1. Обход вектора \vec{E}^{Γ} по контуру проводников, образующих цепь, равен сумме напряжений действующих в цепи (напряжения задаются источниками, а также возникают на сосредоточенных нагрузках, подключенных к концам проводников);

2. Величина тока в каждом проводнике цепи одна и та же.

Область определения уравнения (1) ограничим областью y (рис.3), а условие (2) заменим условием

$$\mathcal{A} / r = 0 \quad (3)$$

которое означает, что контур Γ является сверхпроводящим экраном. Расстояние от проводников до экрана должно быть достаточно большим, чтобы влияние противотоков в экране на распределение тока в проводниках было малым.^{х)} Введение экрана расширяет круг задач, которые можно решить с помощью этого уравнения (1).

Действительно, условие (2) записано в предположении, что полный ток через плоскость x, y равен нулю. Это условие, очевидно, не выполнено в задаче об определении поля вокруг одиночного проводника. Такая задача возникает, когда расстояние между проводниками много больше их поперечного размера и эффектом близости можно пренебречь. Непосредственное использование уравнения для векторного потенциала с вектором \vec{E}^r здесь невозможно, т.к. это бы означало, что напряжение приложено к бесконечно большой индуктивности. По этой причине задача о расчете поля вокруг одиночного проводника может быть сформулирована только в виде токовой: задан ток через сечение проводника в зависимости от времени — нужно найти распределение тока в его сечении.

Уравнение для векторного потенциала можно использовать и здесь, если индуктивность системы сделать конечной, что в реальных случаях всегда выполнено. Окружим проводник сверхпроводящим экраном Γ . Один конец системы проводник-экран замкнем, к другому приложим напряжение $u(t)$. Индуктивность такой системы конечна и здесь можно применить уравнение для векторного потенциала. Эту задачу будем называть однопроводниковой. В однопроводниковой задаче $E^r = u(t) / L$.

х) При расчете поля разностным методом в этом случае нужно использовать сетку с меняющимся по геометрической прогрессии шагом /8/.

Напряжение $u(t)$ может быть подобрано так, чтобы выполнялось токовое условие: ток через проводник равен заданному.

Таким образом (3) допускает существование в области проводников, для которых задано токовое условие.

Для изложения методики расчета возьмем простой вариант подключения, когда n проводников составляют многовитковую систему, к концам которой приложено напряжение $u(t)$. Начальное условие возьмем нулевым.

Методика просто обобщается и на другие возможные варианты, когда проводники образуют несколько цепей, в цепях имеются различные сосредоточенные нагрузки, возможно присутствие проводников с заданным через их сечение током и т.д.

Рассмотрим сначала линейную задачу (отсутствие насыщения железа). Зададим в i -ом проводнике вектор E^r δ -образным, в остальных проводниках положим $E^r = 0$. Расчет такого случая ничем не отличается от расчета однопроводниковой задачи, если в последней задать E^r , и может быть проведен также, как в [8]. Обозначим через $a_i(t, x, y)$, $I_{i,j}(t)$ получившиеся при этом соответственно векторный потенциал и ток, идущий по проводнику с номером j . Используя принцип суперпозиции, запишем условия 1), 2) в виде

$$\sum_{i=1}^n k_i e_i(t) = \frac{u(t)}{L} \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n \int_0^t e_i(\tau) I_{i,j}(t-\tau) d\tau = k_j I(t)$$

$$j = 1, \dots, n$$

которые представляют теперь $n+1$ уравнение относительно неизвестных $I(t)$, $e_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$), где $I(t)$ — ток в цепи, e_i — величина E^r в i -ом проводнике, $k_j = 1$, если направление обхода контура многовитковой системы в j -ом проводнике совпадает с положительным направлением оси x и $k_j = -1$ в обратном случае. Численный расчет уравнений (4)

не представляет затруднений и, если необходимо зная только величину $I(t)$, решение задачи на этом заканчивается.

Если на взятом временном интервале для определения величин $I_{i,j}(t)$ с нужной точностью требуется N шагов по времени, то расчет многовитковой системы практически эквивалентен расчету $n \times (N+1)$ однопроводниковых систем на один шаг (к N добавлена единица, т.к. для δ -образного напряжения поле рассчитывается также в момент $t=0$). Значения e_i , получающиеся при решении системы (4), позволяют определить векторный потенциал или любую линейную комбинацию векторного потенциала и его производных в многовитковой системе по формуле

$$A(t, x, y) = \sum_{i=1}^n \int_0^t e_i(\tau) a_i(t-\tau, x, y) d\tau$$

Если запоминание функций a_i требует чрезмерно большого объема памяти ЭВМ, целесообразно при расчете однопроводниковых систем запоминать только функции $I_{i,i}(t)$, затем, рассчитав $e_i(t)$, решить уравнение (1), в котором в области занятой проводником с номером i следует положить $E^r = e_i$. Тогда расчет многовитковой системы эквивалентен расчету $(n+1) \times (N+1)$ однопроводниковых систем на один шаг.

Рассмотрим еще один возможный способ решения линейной задачи. Пусть уравнение (1) интегрируется с заданным шагом по времени τ . Число шагов равно N . На каждом шаге для любых e_i расчетным путем можно получить значения функций $f_m(e_1, e_2, \dots, e_n, I)$, имеющих вид

$$f_m = k_m I(t) - I_m(t) \quad m=1, \dots, n$$

$$f_{n+1} = \sum_{i=1}^n k_i e_i - \frac{u(t-\frac{\tau}{2})}{L}$$

где I_m - ток в проводнике с номером m .

Для выполнения условий 1), 2) нужно

$$f_m(e_1, e_2, \dots, e_n, I) = 0 \quad (4)$$

$$m = 1, \dots, n+1$$

что представляет систему $n+1$ уравнений для определения e_1, e_2, \dots, e_n, I .

Пусть на каком-либо шаге по времени для ориентировочных значений $e_i = e_i^{(0)}$ приведен расчет уравнения (1), а $I_m^{(0)}$ — величина полученного при этом тока в m -ом проводнике. Запишем

$$I_m = I_m^{(0)} + \sum_{i=1}^n \alpha_{mi} \Delta_i \quad (5)$$

где $\Delta_i = e_i - e_i^{(0)}$, I_m, e_m — истинные значения

тока и градиентного электрического поля в m -ом проводнике. Коэффициенты α_{mi} , если задача линейна и шаг по времени один и тот же, не зависят от величин $e_i^{(0)}$ и момента времени, для которого делается расчет, и могут быть найдены заранее. Действительно, зададим в i -ом проводнике $E_i^r = 1$, в остальных проводниках $E_i^r = 0$. Рассчитаем уравнение (1) на один шаг по времени, Коэффициент α_{mi} равен получившемуся при этом значению тока в m -ом проводнике.

С известными α_{mi} система (4) с учетом (5) является системой линейных уравнений относительно Δ_i, I . После их определения необходимо вновь рассчитать уравнение (1) на этом же шаге, положив $e_i = e_i^{(0)} + \Delta_i$.

Как видно, расчет многовитковой системы с помощью такого способа эквивалентен расчету $n + 2N$ однопроводниковых задач на один шаг. Этот способ представляется более экономичным, если требуется рассчитать поле в многовитковой системе только для одного варианта подключения проводников и нагрузок. Если же требуется рассмотрение большого числа вариантов, целесообразнее пользоваться первым способом.

В случае нелинейной задачи принцип суперпозиции не выполняется. Здесь для определения величин ϵ_i необходимо использовать какой-либо итерационный метод решения системы (4). Функции f_m для заданных значений аргументов определяются численно. Имеется большое число методов для решения таких систем [10]. Вопрос о выборе наиболее подходящего из них мы здесь не рассматриваем.

Отметим, что в случае умеренного насыщения, по-видимому, наиболее эффективно использование метода аналогичного второму из описанных выше для линейной задачи. Коэффициенты d_{mi} могут быть определены заранее в предположении, что насыщения железа нет, а значения ϵ_i в каждой итерации определяются решением системы линейных уравнений. Итерации прекращаются, когда величины Δ_i станут достаточно малыми.

Ш. ПРИБЛИЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО ТОНКОГО СКИН-СЛОЯ

В простых случаях геометрию двумерного поля при бесконечно тонком скин-слое можно найти с помощью конформных преобразований [1, 11]. Ниже дана постановка задачи для определения трёхмерного поля и двумерного поля в многовитковой системе.

А. Пусть в пространстве имеется только проводник 1 (рис. 1), который подключен к генератору напряжения. Вектор магнитного поля вне проводника удовлетворяет условиям:

$$\int_{l'} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_{L'} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

где ℓ' - любой контур, не охватывающий проводник, \mathcal{L}' - контур, охватывающий его, I - полный ток через сечение проводника. На поверхности проводника $H_{\perp} = 0$.

Найдём поле тока I , идущего по контуру \mathcal{L} , обозначим его через \vec{H}^c . Можно считать, что $I(t) = \text{const}$, т.к. в данном случае геометрия поля \vec{H} не зависит от времени, т.е. его можно представить в виде $\vec{H}(\vec{r}, t) = I(t) \cdot \mathcal{L}(\vec{r})$.

Запишем $\vec{H} = \vec{H}^c + \vec{H}^{(a)}$. Очевидно, обход вектора $\vec{H}^{(a)}$ по любому контуру вне проводника равен нулю и можно написать $\vec{H}^{(a)} = -\nabla\psi$. Для определения ψ имеем задачу

$$\Delta\psi = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0$$

Γ - поверхность проводника.

Б. Рассмотрим теперь действие на проводник быстрого переменного возмущения, описываемого потенциалом $\vec{A}^{(a)}$ (п.1).

Образуем вектор $\vec{H}^{(a)}$ такой, что внутри проводника

$$\vec{H}^{(a)} = -\frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{A}^{(a)}, \text{ а снаружи } \vec{H}^{(a)} = -\nabla\psi, \text{ где}$$

ψ является решением уравнения Лапласа во внешней к проводнику области с граничным условием $\partial\psi/\partial n = -\text{rot}_{\perp} \vec{A}^{(a)}$.

Как видно, вектор $\vec{H}^{(a)}$ имеет непрерывную перпендикулярную составляющую при переходе через поверхность проводника, т.е. везде $\text{div} \vec{H}^{(a)} = 0$. Составляющая $H_{\parallel}^{(a)}$, вообще гово-

ря, разрывна и её скачок определяет поверхностную плотность тока, дающую поле $\vec{H}^{(a)}$. образуем вектор $\vec{H}^{(z)} = \vec{H}^{(a)} + \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{A}^{(a)}$.

Если форма проводника такова, что через любой контур внутри его можно провести поверхность целиком лежащую в проводнике (проводник II), то вектор $\vec{H} = \vec{H}^{(z)}$ является искомым магнитным полем и с его определением решение задачи заканчивается. Если рассматривается проводник III, то необходимо учесть, что приближение быстропеременного поля эквивалентно допущению, что проводники являются сверхпроводящими.

Это означает отсутствие потока магнитного поля через контур проводника, не присоединенного к источнику Напряжения (если в начальный

момент этот поток равнялся нулю, что мы предполагаем). В соответствии со сделанным замечанием поступим следующим образом. Пусть по контуру \mathcal{C} ток I , определим поле $\vec{H}^{(2)}$ этого тока при бесконечно тонком скин-слое (п.А). Ток подберём так, чтобы поток суммарного поля $\vec{H} = \vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)}$ через площадь, охваченную контуром проводника, был равен нулю. Вектор суммарного поля будет искомым.

В. Рассмотрим более общий случай. Пусть в пространстве имеются проводники I, II, III, напряжение приложено к проводнику 1. Возьмем поле тока I_1 , идущего по контуру \mathcal{L} , и определим в пустоте вектор $\vec{H}^{(1)}$ так, как это сделано в п.А. При этом требуем, чтобы условие $\vec{H}_1^{\parallel} = -\vec{H}_1^c$ выполнялось на поверхности всех проводников. Введем далее вектор \vec{H}^c соответствующий току I_2 по контуру \mathcal{C} и таким же образом определим вектор $\vec{H}^{(2)}$.

Выберем I_2 так, чтобы поток вектора $\vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)}$ через любой контур, лежащий на поверхности проводника III равнялся нулю. Вектор $\vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)}$ является искомым, его геометрия от времени не зависит.

Рассмотрение, проведенное в этом пункте достаточно для правильной постановки задачи об определении магнитного поля при любых возможных конфигурациях проводников. В общем случае магнитное поле вне проводников нельзя представить в виде градиента какой-либо функции. Подобное представление, однако, может применяться для расчетов, если заранее ясно, что поле в выбранном объеме имеет равную нулю циркуляцию по любому контуру. В этом случае в задании граничных условий на поверхности объема, как и самих границ, всегда имеется некоторый произвол. Граничные условия должны задаваться так, чтобы этот произвол не приводил к сильным искажениям магнитного поля в интересующем месте объема.

Рассмотрение, проведенное для трёхмерного случая без изменений переносится на два измерения. Возможен другой подход. При достаточно быстром изменении приложенного напряжения можно считать, что каждая точка области занятой проводником имеет векторный потенциал равный

$$A = \int_0^t E^r dt$$

Конфигурация магнитного поля вне проводников находится решением уравнения Лапласа для векторного потенциала $\Delta A = 0$ с граничным условием:

$$A|_r = C_n$$

где Γ_n - контур проводника с номером n . Постоянные C_n должны быть выбраны так, чтобы ток в каждом проводнике цепи имел одно и то же значение. Решение этой задачи может быть проделано методами аналогичными описанным в II.

Автор выражает благодарность Б.В.Чирикову за полезное обсуждение работы.

Л и т е р а т у р а

1. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики, "Наука", 1966.
2. Г.Кнопфель. Сверхсильные импульсные магнитные поля, "Мир", 1972.
3. Б.М.Будак и др. Сб.задач по математической физике. М., "Наука", 1972.
4. О.В.Тозони. Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах. "Техника", 1967.
5. Э.В.Колесников, Д.Д.Саввин. Известия ВУЗов, электромеханика, № 8, стр. 827, 1968.
6. Э.В.Колесников. Известия ВУЗов, электромеханика, № 12, стр.1284, 1970.
7. Э.В.Колесников. Известия Вузов, электромеханика, № 1, стр. 3, 1971.
8. В.Ц.Юрченко. Преприят ИЯФ СО АН СССР, 1973.
9. В.И.Юрченко. Преприят ИЯФ СО АН СССР, , 1973.
10. И.С.Березин, Н.П.Жидков. Методы вычислений, т.1 "Наука", 1966.
11. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.

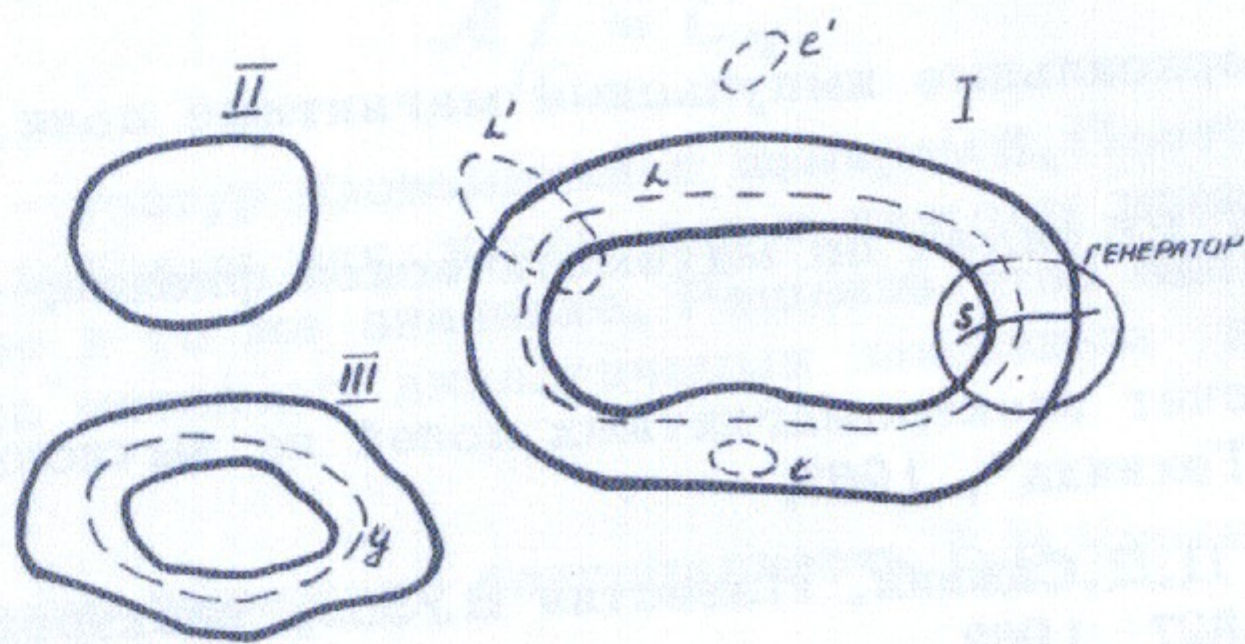


Рис. 1.

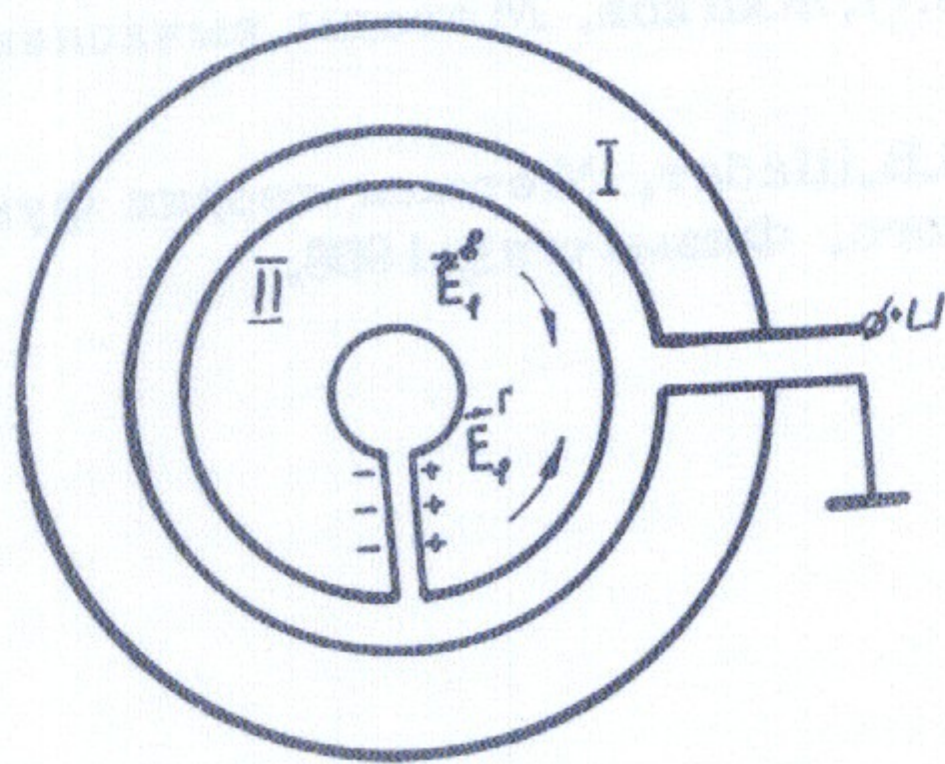


Рис. 2.

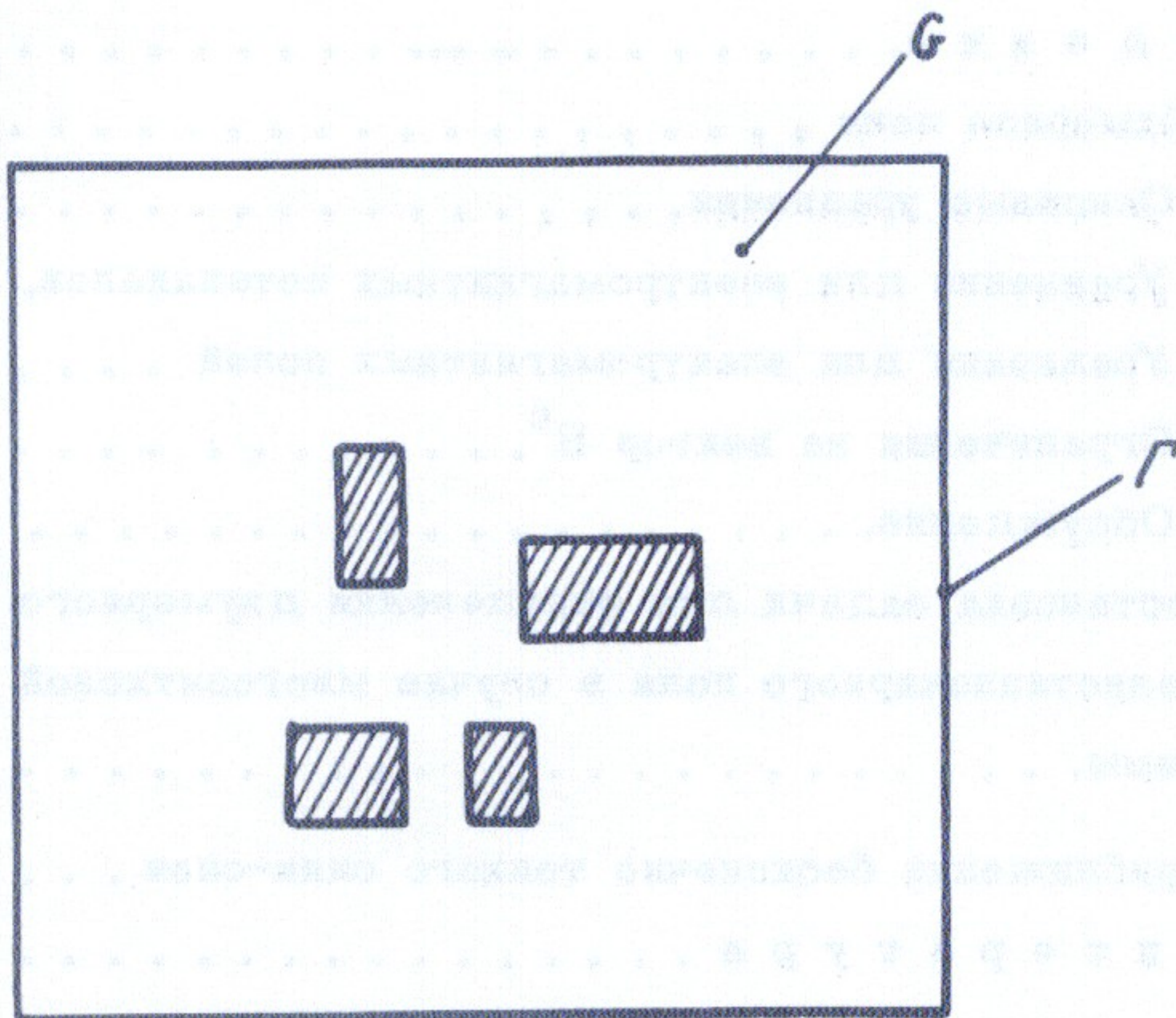


Рис. 3.

С о д е р ж а н и е

	Стр.
В в е д е н и е	3
1. Трёхмерное поле	5
1. Основные уравнения.	5
2. Уравнения для электромагнитных потенциалов.	6
3. Уравнения для электромагнитных полей	10
4. Ограничения на вектор E^c	13
5. Обсуждение.	17
II. Постановка задачи для определения двумерного квазистационарного поля в случае многовитковой системы.	17
III. Приближение бесконечно тонкого скин-слоя	23
Л и т е р а т у р а	27

Ответственный за выпуск С.Н.Родионов
Подписано к печати 24.9-73 г. МН 08544
Усл. 1,4 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно
Заказ 82 . ПРЕПРИНТ.

Отпечатано на ротапринте ИЯФ СО АН СССР, вг.